Mecánica de Estructuras

Miguel Cervera Ruiz

Elena Blanco Díaz



Mecánica de Estructuras

Mecánica de Estructuras

Miguel Cervera Ruiz
Elena Blanco Díaz

Publicado por:

CIMNE

Mecánica de Estructuras
Miguel Cervera Ruiz
Elena Blanco Díaz

Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España
www.cimne.com

Impreso por: Dsignum

ISBN: 978-84-942844-8-9
Depósito legal: B-16312-2014

A nuestras familias

Prólogo

"Mecánica de Estructuras" tiene el objetivo de proporcionar a los estudiantes de grado de ingeniería una visión y una comprensión claras de los fundamentos del análisis estructural, y de su aplicación en estructuras de barras articuladas y reticuladas. La obra recoge la experiencia docente de los autores en asignaturas relacionadas con el Análisis de Estructuras en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. El planteamiento del texto coincide, en gran medida, con el de asignaturas de Mecánica de Estructuras que, con diferentes nombres, desarrollan la materia de Teoría de Estructuras en diversas titulaciones españolas de Ingeniería.

Este libro es una nueva versión de la edición original de 1992, y de las mejoras introducidas en las sucesivas ediciones de 1995, 1999 y 2001. En esta nueva presentación, se ha modernizado el contenido del volumen con nuevos capítulos, nuevas secciones y nuevos ejemplos para facilitar la comprensión de los temas. Asimismo, se ha renovado totalmente el material gráfico.

La obra se estructura en dos partes diferenciadas. Una primera parte, formada por los Capítulos 1 al 5, en la que se introducen los conceptos fundamentales de la Mecánica de Estructuras y una segunda parte, formada por los Capítulos 6 al 9, en la que se estudia específicamente la resolución de estructuras de barras por los métodos de flexibilidad y rigidez. Las estructuras articuladas y reticuladas, planas y espaciales, se tratan en detalle mediante el método directo de rigidez. La comprensión de los diferentes temas se ve favorecida por la inclusión de numerosos ejercicios y ejemplos resueltos paso a paso.

En el Capítulo 1 se presentan los objetivos fundamentales del Análisis de Estructuras y, las definiciones básicas que serán utilizadas a lo largo de los temas posteriores. Se definen los distintos tipos de estructuras, continuas y de barras, y se presentan los elementos estructurales básicos que las forman. Se introducen también las acciones a considerar en el proyecto de una estructura de acuerdo con las normativas vigentes.

En el Capítulo 2 se introducen los conceptos de equilibrio y compatibilidad aplicados a estructuras articuladas y reticuladas. Se enuncia, además, la hipótesis de linealidad y, como consecuencia, el Principio de Superposición. Se definen los conceptos de indeterminación estática y grado de hiperestatismo, así como el de grado de indeterminación cinemática y, en estructuras reticuladas, el grado de traslacionalidad. Finalmente, se presentan los métodos generales de resolución de estructuras.

En el Capítulo 3 se tratan las relaciones existentes entre esfuerzos y movimientos en estructuras articuladas planas y estructuras reticuladas de plano medio. El análisis se centra en los llamados métodos diferenciales de cálculo de movimientos, basados en las relaciones diferenciales derivadas del estudio de la flexión. Se introducen además, las ecuaciones elásticas en estructuras reticuladas de plano medio.

El Capítulo 4 introduce el concepto fundamental de trabajo como base de los principios variacionales de la Mecánica de Estructuras. Basados en ellos se presentan teoremas asociados al trabajo virtual y métodos generales para la resolución de estructuras articuladas y reticuladas.

El Capítulo 5 enuncia los principios y teoremas asociados al concepto de energía de deformación, aplicables en sistemas estructurales de comportamiento lineal. Se presentan los teoremas asociados a la minimización de la energía potencial y los métodos generales de análisis basados en ellos.

Los Capítulos siguientes se dedican específicamente al análisis de estructuras de barras mediante los métodos generales de resolución.

En el Capítulo 6 se muestra la aplicación del Método de Flexibilidad a la resolución de estructuras articuladas y reticuladas planas. Se plantea primero, la resolución de estructuras articuladas y, a continuación, la resolución de vigas continuas. Finalmente, se aplica el método a la resolución de estructuras porticadas.

El Capítulo 7 presenta el Método de Rigidez. Como en el capítulo anterior, se tratan las estructuras articuladas planas, las vigas continuas y las estructuras porticadas de plano medio. Para éstas últimas se tratan los casos intraslacional y traslacional.

En el Capítulo 8 se muestra la aplicación del Método Directo de Rigidez a la resolución de estructuras articuladas. Se plantean primero las Bases del Método de forma general. Se muestra después, en detalle, su aplicación a estructuras articuladas planas y espaciales.

El Capítulo 9 se dedica a la aplicación del Método Directo de Rigidez a la resolución de estructuras reticuladas. En primer lugar, se plantea su aplicación a estructuras reticuladas de plano medio y, después, a otras tipologías estructurales, emparrillados planos y reticuladas espaciales.

Los autores agradecen a los profesores del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña su colaboración en la compilación y redacción de este libro. Apreciamos, de modo particular, la ayuda de los profesores Dra. Antonia Larese y Dr. José Manuel González, que colaboraron en la edición y revisaron la versión final del manuscrito. Asimismo, agradecemos al Sr. Raúl Giménez por la delineación de las figuras y esquemas que se incluyen.

Agradecemos a la E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona y al Centro Internacional de Métodos Numéricos (CIMNE) por el apoyo recibido a través de sus respectivos programas de incentivación para la elaboración de material docente.

Finalmente, agradecemos a nuestras familias el apoyo y comprensión recibidos, sin los que no hubiera sido posible nuestro trabajo.

Miguel Cervera Ruiz y Elena Blanco Díaz

Barcelona, junio de 2014

Índice General

1 Estructuras y acciones

1.1 Introducción

La palabra "estructura" tiene diferentes significados. En su acepción más general se refiere a la forma en que se organizan las partes de un sistema u objeto. Desde el punto de vista ingenieril, las "estructuras" están ligadas a la construcción; así, son estructuras los puentes, los edificios, las torres, las presas, etc. De una forma más específica, y más adaptada a las modernas tipologías de construcción, entendemos por *estructura* aquella parte de la construcción que "soporta" el conjunto, es decir, que es capaz de resistir las diversas acciones que actúan sobre ella (peso propio, sobrecargas de uso, viento, movimientos sísmicos, etc).

Naturalmente, el hombre ha concebido y construído todo tipo de "estructuras" desde tiempos muy remotos. En un principio, lo hace para satisfacer sus necesidades primarias, de cobijo frente al medio exterior; más tarde, al crecer y diversificarse las relaciones sociales de todo tipo, para posibilitar y favorecer su desarrollo. La tecnología es, sin duda, una de las bases de este desarrollo, y la ingeniería, en sus diversas ramas, el resultado de su concreción a través de los tiempos.

Así, la *ingeniería estructural* es la rama de la ingeniería que trata la concepción, el diseño y la construcción de las estructuras necesarias para desarrollar las actividades humanas. Como tal, la ingeniería estructural debe contemplar cuatro criterios básicos que las estructuras, como cualquier otro ingenio humano, deben satisfacer; éstos son:

- *funcionalidad:* toda estructura debe servir para aquello para lo que ha sido concebida,
- *seguridad:* toda estructura debe soportar las cargas a las que se ve sometida durante su vida útil,
- *economía:* toda estructura debe construirse aprovechando los recursos materiales disponibles, y
- *estética:* toda estructura debe tener una apariencia exterior adecuada.

A estos criterios básicos se suman otros complementarios, tales como el impacto ambiental, la facilidad de mantenimiento y gestión, la reciclabilidad, etc, que cobran mayor importancia en las economías más desarrolladas. Evidentemente, la importancia relativa de cada uno de los criterios en juego depende mucho del tipo de estructura de que se trate. Claramente no son los mismos para el edificio de contención de una central nuclear, donde el requisito de seguridad es esencial, que para un palacio de exposiciones, donde los criterios de funcionalidad y estética deben ser decisivos, o para una construcción auxiliar de obra, en la que la economía primará, decisivamente, sobre los condicionantes estéticos. En cualquier caso, puede asegurarse que los dos criterios esenciales en toda estructura son la funcionalidad, su razón de ser, y la seguridad, su garantía de ser.

En función de lo anterior, el Análisis de Estructuras es, en un sentido amplio y contemporáneo, el conjunto de métodos y técnicas que permite evaluar, en primer lugar, la viabilidad de las estructuras que se diseñan y, en segundo lugar, el grado de satisfacción de los (múltiples) criterios de diseño. En un sentido más específico y clásico, el Análisis de Estructuras se ocupa de la validación del comportamiento mecánico de las estructuras, en las distintas etapas que éstas atraviesan. Esto implica que deben analizarse, al menos, las siguientes etapas:

- *proyecto*, para validar y evaluar las distintas alternativas planteadas, ya sea en cuanto a tipología estructural, materiales a emplear, dimensiones, etc.
- *construcción*, para validar y evaluar los distintos métodos de construcción posibles, y
- *vida útil*, para asegurar las mejores condiciones de funcionalidad, mantenimiento y reciclaje.

El Análisis de Estructuras tiene, pues, como objetivo fundamental determinar la respuesta de las estructuras cuando éstas se ven sometidas a las diferentes acciones que deben soportar durante su construcción y vida útil. Por “respuesta estructural” se entiende, básicamente, la determinación de los estados de tensión y deformación a los que la estructura va a estar sometida por efecto de los diferentes estados de carga que se consideran. La determinación de los estados de tensión es necesaria de cara a satisfacer los criterios de *resistencia* que establecen las correspondientes normativas y los usos de buena práctica para garantizar la seguridad de las estructuras. Por su parte, la determinación de los estados de deformación suele ser necesaria para satisfacer los criterios de *rigidez*, que están a menudo ligados a requisitos de *funcionalidad*.

Por tanto, el Análisis de Estructuras pretende establecer las condiciones de *resistencia* y *rigidez* de las estructuras analizadas. Como veremos a lo largo de este Libro, es

habitual que la determinación de unas y de otras no pueda abordarse de forma independiente, sino que es necesario plantear el problema resolviendo ambas simultáneamente (esfuerzos y movimientos o, en su caso, tensiones y deformaciones).

Desde el punto de vista histórico, el Análisis de Estructuras entronca con la tradición de la Resistencia de Materiales y, posteriormente, de la Teoría de la Elasticidad. Por tanto, su origen se remonta a la segunda mitad del siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX, con el advenimiento de la revolución industrial y la aparición de la fundición como material de construcción. Esta nueva tecnología posibilita tipologías de construcción innovadoras y evidencia la necesidad de métodos de análisis para las nuevas formas "estructurales". Aunque son muchos los nombres de los ingenieros que contribuyeron a su desarrollo inicial, destacaremos el de Louis Navier, que publicó trabajos de relevancia sobre cálculo de placas, arcos hiperestáticos y puentes colgantes.

La Resistencia de Materiales y el Análisis de Estructuras se desarrollan extraordinariamente en la segunda mitad del siglo XIX con la expansión, casi universal, del ferrocarril y la imperiosa necesidad de construir puentes cada vez de mayor luz. Esto fomenta el avance de los métodos de cálculo de estructuras *articuladas,* primero isostáticas y luego hiperestáticas. En la primera mitad del siglo XX aparece el hormigón armado como material de construcción y, con él, las estructuras se vuelven más complejas, *reticuladas* y muy hiperestáticas. En consecuencia, aparecen y se perfeccionan nuevos métodos de cálculo. Las guerras mundiales, el desarrollo industrial y económico y, en la segunda mitad del siglo XX, la aparición de los ordenadores digitales han motivado y posibilitado los avances más recientes en el campo de la Mecánica de Estructuras.

1.2 Estructuras continuas y estructuras de barras

Las estructuras pueden adoptar tipologías muy diversas, de acuerdo a su geometría y a su forma de trabajar. Así, podemos hablar de *estructuras continuas,* cuando no es posible diferenciar los distintos "elementos" que las forman, y *estructuras de barras*, cuando están formadas por piezas prismáticas enlazadas entre sí. Entre las estructuras continuas podemos distinguir aquellas en las que es posible identificar un "espesor" y hablar de estructuras *superficiales*, tales como placas (que trabajan a flexión), membranas (que trabajan a tracción y/o compresión), láminas (que trabajan a flexión y a tracción y/o compresión), etc., de aquellas estructuras *sólidas* o *masivas.* Por su parte, las estructuras masivas pueden tener una geometría y un comportamiento bidimensional (estados planos de deformaciones o con simetría de revolución) o tridimensional (caso general).

Así, en las Figuras 1.1 y 1.2 se muestran dos estructuras superficiales sometidas a su peso propio; la losa del tablero de puente de la Figura 1.1 trabaja a flexión, mientras



Fig. 1.1: Estructura superficial sometida a peso propio: losa trabajando a flexión



Fig. 1.2: Estructura superficial sometida a peso propio: membrana trabajando a tensión y compresión

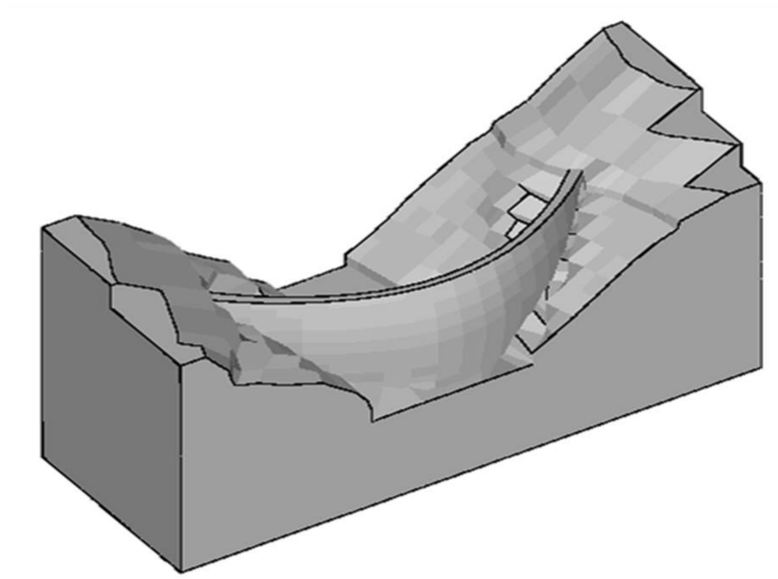


Fig. 1.3: Ejemplo de estructura masiva: presa bóveda con su cimentación.

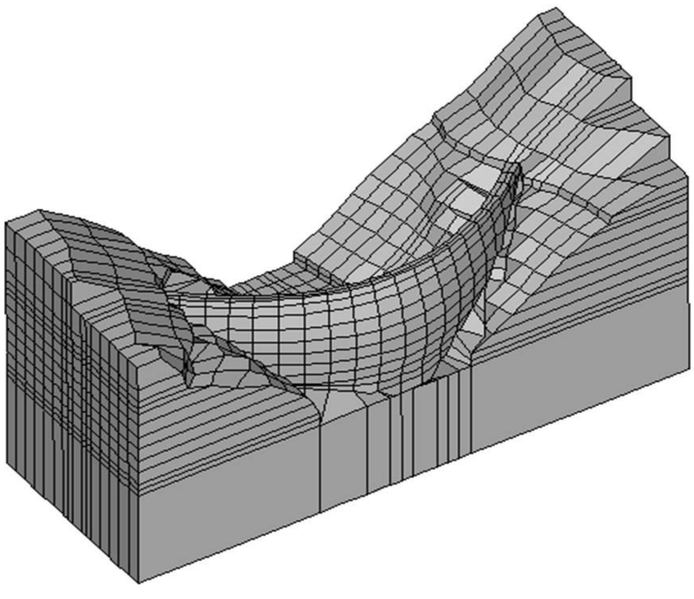


Fig. 1.4: Discretización por elementos finitos de una presa bóveda y su cimentación

que la torre de refrigeración de la Figura 1.2 trabaja como membrana, a compresión en la dirección meridional y tracción en la dirección circunferencial. La Figura 1.3 muestra un ejemplo de estructura masiva tridimensional; se trata de una presa bóveda de doble curvatura y parte de su macizo de cimentación.

La determinación de las tensiones y deformaciones que actúan sobre las estructuras continuas es un problema complejo que, generalmente, se aborda aplicando métodos aproximados de discretización (diferencias finitas, elementos finitos, etc.) a las ecuaciones diferenciales o integrales de la Mecánica de Sólidos, ya sea a partir de la Teoría de la Elasticidad o de modelos más complejos que permitan considerar efectos no lineales del problema mecánico (comportamiento de los materiales, grandes movimientos, etc.). Como ejemplo de aplicación de estos métodos avanzados de cálculo, la Figura 1.4 muestra la discretización por elementos finitos de la presa bóveda de la Figura 1.3.

Aunque es posible aplicar estos mismos métodos al análisis de las estructuras de barras, es habitual abordar el análisis de éstas desde los postulados de la Resistencia de Materiales. Según éstos, el estado tensional en las barras que forman la estructura se determina a partir del principio de Saint-Venant, que establece que, bajo ciertas condiciones, las tensiones (y deformaciones) sobre una sección normal de una pieza se pueden determinar, exclusivamente, a partir de los valores de los esfuerzos que actúan sobre dicha sección. El principio de Saint-Venant permite reducir el análisis de estructuras de barras al problema de determinar las leyes de esfuerzos que actúan sobre las diversas piezas que forman la estructura.

1.3 Elementos estructurales básicos, apoyos y enlaces

Las barras que forman las estructuras se denominan según la función que desempeñan y su forma de trabajar. Se define como *viga* al elemento estructural horizontal, en general recto, sometido principlamente a cargas verticales y que trabaja fundamentalmente a flexión. Se llama *pilar*, *soporte* o *columna* al elemento estructural, generalmente recto y vertical, que resiste cargas axiales de compresión y en algunos casos también momentos de flexión. Se llama *cable* o *tirante* al elemento estructural sometido a tracción. Se utilizan, en general, para salvar grandes distancias, ya que están limitados sólo por su peso y su forma de anclaje. En la Figura 1.5 se muestra la combinación de estos elementos estructurales básicos en un puente atirantado.

Los *arcos* son tipos estructurales planos de directriz curva o poligonal que soportan sus cargas fundamentalmente a compresión. Deben ser rígidos para mantener su forma, y esto genera esfuerzos secundarios (momentos y cortantes) que deben tenerse en cuenta en su diseño. La Figura 1.6 muestra un arco catenario sometido a cargas en su plano.



Fig. 1.5: Elementos estructurales básicos



Fig. 1.6: Arco catenario



(a)

(b)

(c)

Fig. 1.7: Apoyos: (a) simple (b) fijo (c) empotramiento

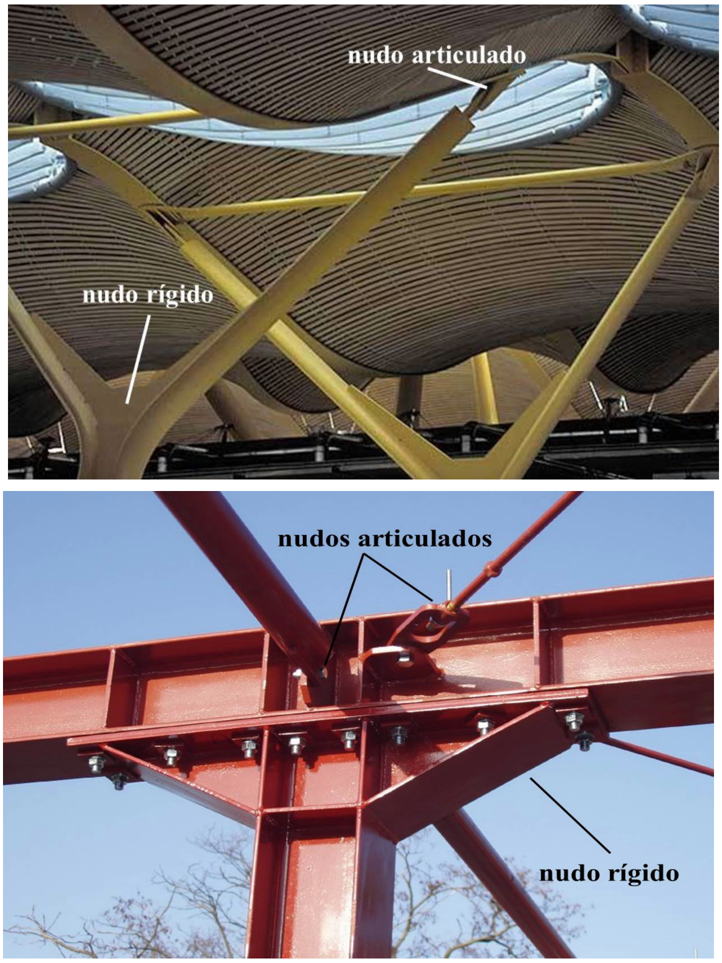


Fig. 1.8: Enlaces: nudos articulados y rígidos

Se llama *apoyo* a todo dispositivo destinado a unir la estructura al medio de sustentación. Los apoyos cumplen la triple función de: (a) impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura, (b) limitar la deformación que sufre y (c) transmitir las cargas que soporta la estructura al medio de sustentación.

En estructuras planas, los apoyos más frecuentes son el apoyo simple o articulado móvil (Figura 1.7a), el apoyo fijo o articulación (Figura 1.7b) y el empotramiento (Figura 1.7c).

Se llama *enlace* o *nudo* a todo dispositivo destinado a unir entre sí las diferentes barras que forman una estructura. Los enlaces cumplen la doble función de: (a) impedir o limitar los movimientos relativos de unas barras respecto a otras, y (b) trasmitir las

cargas que unas soportan a las demás. Los enlaces más frecuentes son la articulación o nudo articulado y el empotramiento o nudo rígido (Figura 1.8).

Los apoyos y enlaces para estructuras planas pueden fácilmente generalizarse para estructuras espaciales. En este caso, el número de grados de libertad es mayor, y por tanto, la tipología de apoyos y enlaces posibles es más amplia.

1.4 Estructuras de barras

Se llama *estructura de barras* a aquella formada por el ensamblaje de piezas prismáticas. Su finalidad consiste en soportar las acciones que actúan sobre ella y transmitir las correspondientes fuerzas y momentos al medio de sustentación. Aunque las estructuras de barras no son la única tipología existente, sí es la comunmente utilizada. Por este motivo, es la tratada en este Libro.

Es habitual clasificar las estructuras de barras según la *disposición de las directrices* de las piezas y según el *tipo de unión* entre ellas. Así, según la disposición de las directrices de las piezas que forman la estructura, se habla de *estructura plana* cuando las directrices de todas las piezas están contenidas en un mismo plano y de *estructura espacial* en caso contrario.

Las estructuras espaciales son mucho más complejas de concebir, diseñar y construir que las estructuras planas. Por eso, es común que muchas estructuras aparentemente tridimensionales se diseñen realmente como un conjunto de estructuras planas que trabajan solidariamente para conseguir los mecanismos resistentes necesarios.

Se llama *estructura articulada* a una estructura formada por piezas prismáticas unidas entre sí mediante articulaciones. Dado que los enlaces articulados no permiten transmitir momentos flectores de unas piezas a otras, es fácil deducir que las barras de una estructura articulada trabajan básicamente a esfuerzo axil, ya que la única flexión a la que pueden estar sometidas es la debida a las cargas transversales que actúen directamente sobre ellas. Resolver una estructura articulada implica, pues, determinar el valor de los esfuerzos axiles que actúan sobre las diferentes barras. Las estructuras articuladas se representan de forma idealizada de la siguiente manera: la barra se representa mediante una línea que es la directriz de la pieza; los nudos articulados se representan mediante un círculo y los apoyos se representan teniendo en cuenta los grados de libertad restringidos: articulado móvil o fijo (Figura 1.9).

Se llama *estructura reticulada* a una estructura formada por piezas prismáticas unidas entre sí mediante nudos rígidos. Puesto que los nudos rígidos sí transmiten los momentos de una barra a otra, las piezas de una estructura reticulada trabajan fundamentalmente a flexión y, en su caso, también a torsión.

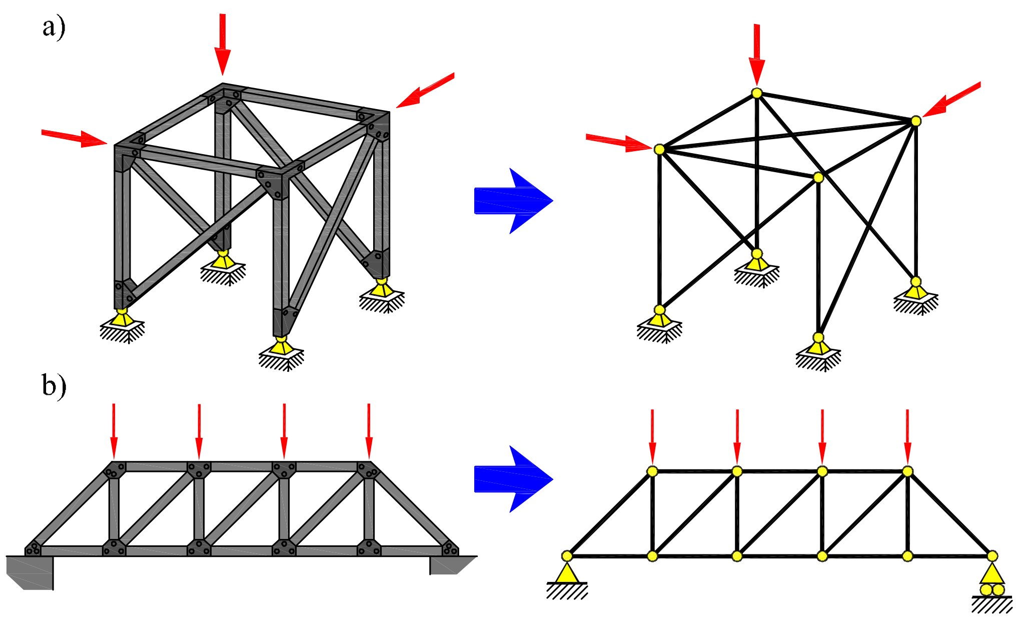


Fig. 1.9: Idealización de estructuras de barras articuladas: (a) espacial (b) plana

Resolver una estructura reticulada implica, por tanto, determinar las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes, esfuerzos axiles y, en su caso, momentos torsores que actúan sobre las diferentes barras.

Análogamente, las estructuras reticuladas se clasifican en *planas* y *espaciales*. Las estructuras reticuladas se idealizan de forma que las barras se representan mediante su directriz y los nudos se idealizan mediante un punto en el que concurren las directrices de las barras (Figura 1.10).

Dentro de las estructuras reticuladas planas se consideran dos casos particulares de interés:

- *estructuras de plano medio:* son aquellas en las que el plano que contiene a las directrices de las piezas es a su vez plano de simetría de éstas y que están sometidas a cargas contenidas en dicho plano medio. Por razones de simetría, las piezas que forman las estructuras de plano medio trabajan a flexión compuesta recta, esto es, están sometidas a momentos flectores, de eje perpendicular al plano medio, y a esfuerzos cortantes y axiles, contenidos en dicho plano. Se les llama también *pórticos* (Figura 1.10b) cuando están formadas a base de soportes y dinteles, y *marcos* cuando las piezas están unidas formando células cerradas (Figura 1.10c).
- *emparrillados planos:* son aquellas formadas por piezas en las que las secciones

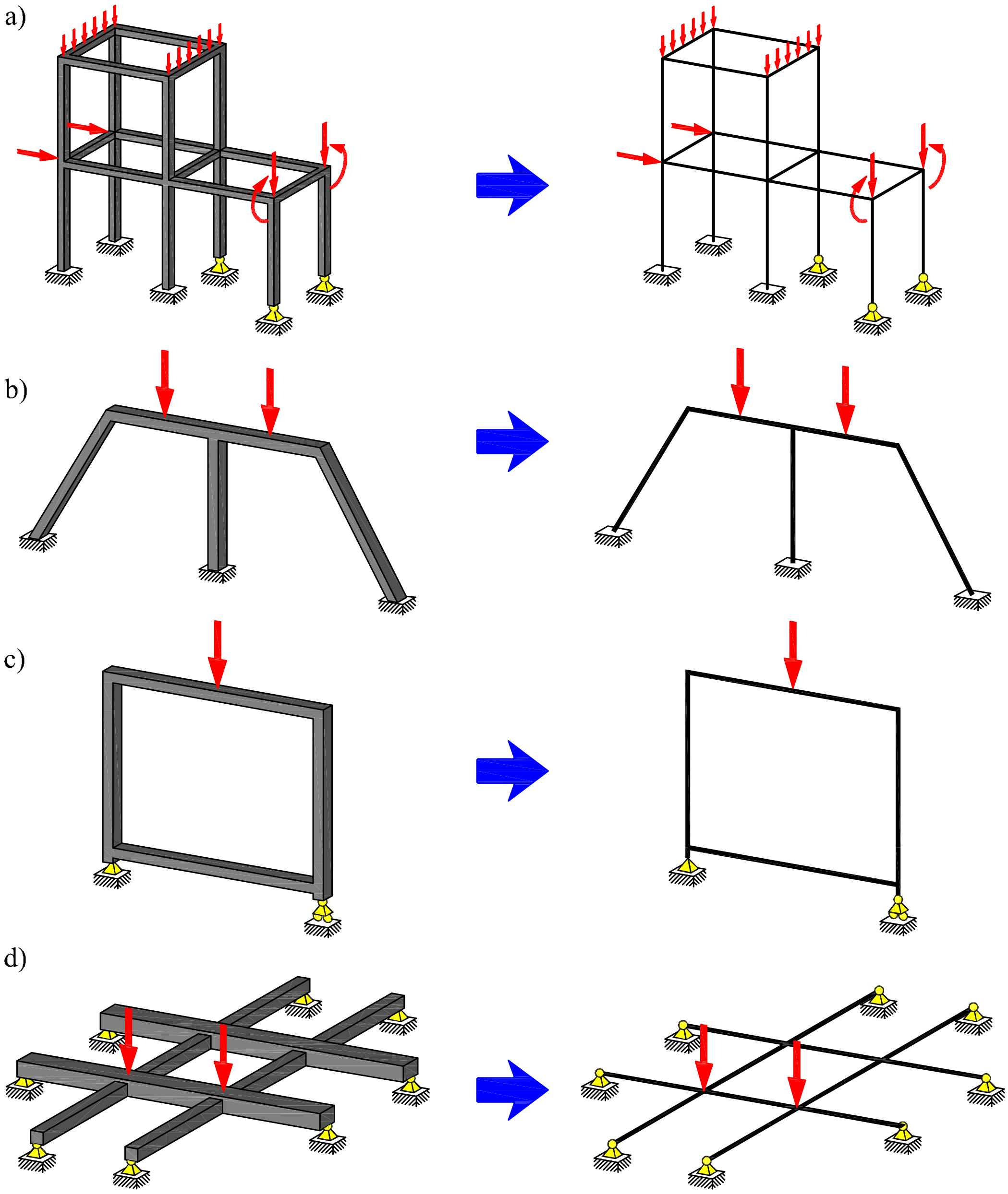


Fig. 1.10: Idealización de estructuras de barras reticuladas: (a) espacial, (b) plano medio: pórtico, (c) plano medio: marco y (d) emparrillado plano



Fig. 1.11: Estructura reticulada espacial



Fig. 1.12: Estructura reticulada de plano medio

rectas son simétricas respecto a planos perpendiculares al que contiene a las directrices de las piezas y que están sometidas a cargas perpendiculares al plano de las directrices (Figura 1.10d). Las piezas de los emparrillados planos trabajan a flexo-torsión simple, esto es, están sometidas a momentos flectores y torsores, de eje contenido en el plano del emparrillado, y a esfuerzos cortantes perpendiculares a éste.

La Figura 1.11 muestra la estructura reticulada espacial de un bloque residencial; en la Figura 1.12 se muestra un puente fluvial cuya estructura es reticulada de plano medio (un arco con tablero superior de vigas rectas). En la Figura 1.13 se muestra un ejemplo de puente con tablero metálico de emparrillado plano de vigas que trabajan a flexión y torsión.

En este Libro se tratará específicamente de la resolución de estructuras de barras. Primeramente se trata la resolución por los métodos clásicos de *flexibilidad* y *rigidez* de estructuras articuladas planas y estructuras reticuladas de plano medio. Después se plantea la solución por el *método directo de rigidez* de estructuras de barras de cualquier tipo.



Fig. 1.13: Emparrillado plano

1.5 Acciones sobre las estructuras

Las acciones a considerar en el proyecto de una estructura, o de un elemento estructural, están establecidas por la reglamentación vigente en cada país. En el espacio europeo se han desarrollado unas normas de carácter voluntario recogidas en los Eurocódigos Estructurales. En particular, las acciones a considerar sobre una estructura se definen en el "Eurocódigo 1: Acciones sobre las estructuras".

En España, las acciones a considerar sobre las estructuras están definidas en los siguientes reglamentos vigentes:

- CTE Código Técnico de Edificación.
- IAP Instrucción sobre acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera.
- IAPF Instrucción relativa a las acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril.
- EHE Instrucción de Hormigón Estructural.

Todos ellos están adaptados a las directivas que se han desarrollado en el ámbito europeo (Eurocódigos).

Según su variación en el tiempo, las acciones sobre una estructura pueden clasificarse en: acciones permanentes (G), acciones permanentes de valor no constante (G^*), acciones variables (Q) y acciones accidentales (A).

Las *acciones permanentes* (G) son las cargas que actúan en todo momento y son constantes en posición y magnitud, por ejemplo:

1. *el peso propio* de los elementos estructurales, que se determina a partir de las dimensiones y los pesos específicos medios de los materiales que los forman.
2. *las cargas muertas*, que son las debidas al peso de los elementos no estructurales (cerramientos, enlucidos, tabiquería, pavimentos, falsos techos, etc.).

La Figura 1.14 muestra el peso específico aparente de los materiales de construcción de uso más frecuente.

Las *acciones permanentes de valor no constante* (G^*) son las cargas que actúan en todo momento pero cuya magnitud no es constante, por ejemplo, la fuerza de pretensado, los asientos bajo las cimentaciones, las acciones reológicas, etc.

Materiales y elementos	Peso específico aparente kN/m^3	Materiales y elementos	Peso específico aparente kN/m^3
Materiales de albañilería		**Madera**	
Arenisca	21,0 a 27,0	Aserrada, tipos C14 a C40	3,5 a 5,0
Basalto	27,0 a 31,0	Laminada encolada	3,7 a 4,4
Calizas compactas, mármoles	28,0	Tablero contrachapado	5,0
Diorita, gneis	30,0	Tablero cartón gris	8,0
Granito	27,0 a 30,0	Aglomerado con cemento	12,0
Sienita, diorita, pórfido	28,0	Tablero de fibras	8,0 a 10,0
Terracota compacta	21,0 27,0	Tablero ligero	4,0
Fabricas		**Metales**	
Bloque hueco de cemento	13,0 a 16,0	Acero	77,0 a 78,5
Bloque hueco de yeso	10,0	Aluminio	27,0
Ladrillo cerámico macizo	18,0	Bronce	83,0 a 85,0
Ladrillo cerámico perforado	15,0	Cobre	87,0 a 89,0
Ladrillo cerámico hueco	12,0	Estaño	74,0
Ladrillo silicocalcáreo	20,0	Hierro colado	71,0 a 72,5
Mampostería con mortero		Hierro forjado	76,0
de arenisca	24,0	Latón	83,0 a 85,0
de basalto	27,0	Plomo	112,0 a 114,0
de caliza compacta	26,0	Zinc	71,0 a 72,0
de granito	26,0		
Silería		**Plásticos y orgánicos**	
de arenisca	26,0	Caucho en plancha	17,0
de arenisca o caliza porosas	24,0	Lámina acrílica	12,0
de basalto	30,0	Linóleo en plancha	12,0
de caliza compacta o mármol	28,0	Mástico en plancha	21,0
de granito	28,0	Poliestireno expandido	0,3
Homigones y morteros		**Otros**	
Hormigón ligero	9,0 a 20,0	Adobe	16,0
Hormigón normal(1)	24,0	Asfalto	24,0
Hormigón pesado	>28,0	Baldosa cerámica	18,0
Mortero de cemento	19,0 a 23,0	Baldosa de gres	19,0
Mortero de yeso	12,0 a 28,0	Papel	11,0
Mortero de cemento y cal	18,0 a 20,0	Pizarra	29,0
Mortero de cal	12,0 a 18,0	Vidrio	25,0

(1) En hormigón armado con armados usuales o fresco aumenta 1 kN/m^3

Fig. 1.14: Peso específico aparente de materiales de construcción

Las *acciones variables* (Q) son las cargas externas que pueden actuar o no sobre la estructura, como por ejemplo, las sobrecargas de uso, las acciones climáticas (viento, nieve, etc.).

Las *acciones accidentales* (A) son aquellas cuya posibilidad de actuación durante un *período de referencia* establecido es pequeña, pero cuya importancia puede ser considerable en ciertas estructuras (impacto de vehículos, sismos, inundaciones, agresión térmica de incendios, etc.).

En lo que sigue se describe brevemente cómo trata la normativa española las acciones variables y accidentales más importantes.

Sobrecarga de uso

La sobrecarga de uso es el peso de todo lo que puede gravitar sobre la estructura por razón de su utilización.

En edificios, *la sobrecarga de uso* puede simularse con una carga uniformemente repartida. El CTE define dicha carga distribuída según el uso del edificio a proyectar. Para comprobaciones locales de capacidad portante se define una carga concentrada actuando sobre cualquier punto de la zona. La Figura 1.15 muestra algunos valores característicos de sobrecarga de uso definidos por el CTE.

En puentes de carretera, la IAP define las sobrecargas de uso a tener en cuenta como un tren de cargas que consta de: a) componentes verticales (fuerzas gravitatorias) y b) de componentes horizontales (fuerzas de frenado, arranque y fuerza centrífuga).

Las componentes verticales del tren de cargas son:

- Una sobrecarga uniforme de 4 kN/m^2 extendida en toda la plataforma del tablero o en parte de ella, según sea más desfavorable para el elemento en estudio.

- Uno o dos vehículos de 600 kN repartidos en 6 cargas puntuales de 100 kN en la

Categoria de uso		Subcategoria de uso		Carga uniforme [kN/m^2]	Carga concentrada [kN]
A	Zonas residenciales	A1	Viviendas y zonas de habitaciones en hospitales y hoteles	2	2
		A2	Trasteros	3	2
B	Zonas administrativas			2	2
C	Zonas de acceso al público (con la excepción de las superficies pertenecientes a las categorías A, B, C y D)	C1	Zonas con mesas y sillas	3	4
		C2	Zonas con asientos fijos	4	4
		C3	Zonas sin obstáculos que impidan el libre movimiento de las personas como vestíbulos de edificios públicos, administrativos, hoteles, salas de exposición en museos, etc.	5	4
		C4	Zonas destinadas a gimnasio u actividades físicas	5	7
		C5	Zonas de aglomeración (salas de conciertos, estadios, etc.)	5	4
D	Zonas comerciales	D1	Locales comerciales	5	4
		D2	Supermercados, hipermercados o grandes superficies	5	7
E	Zonas de tráfico y de aparcamiento para vehículos ligeros (peso total <30 kN)			2	20(1)
F	Cubiertas transitables accesibles sólo privadamente(2)			1	2
G	Cubiertas accesibles únicamente para conservación(3)	G1(7)	Cubiertas con inclinación inferior a 20°	1(4)(6)	2
		G2	Cubiertas ligeras sobre correas (sin forjado)(5)	0,4(4)	1
			Cubiertas con inclinación superior a 40°	0	2

Fig. 1.15: Valores característicos de las sobrecargas de uso

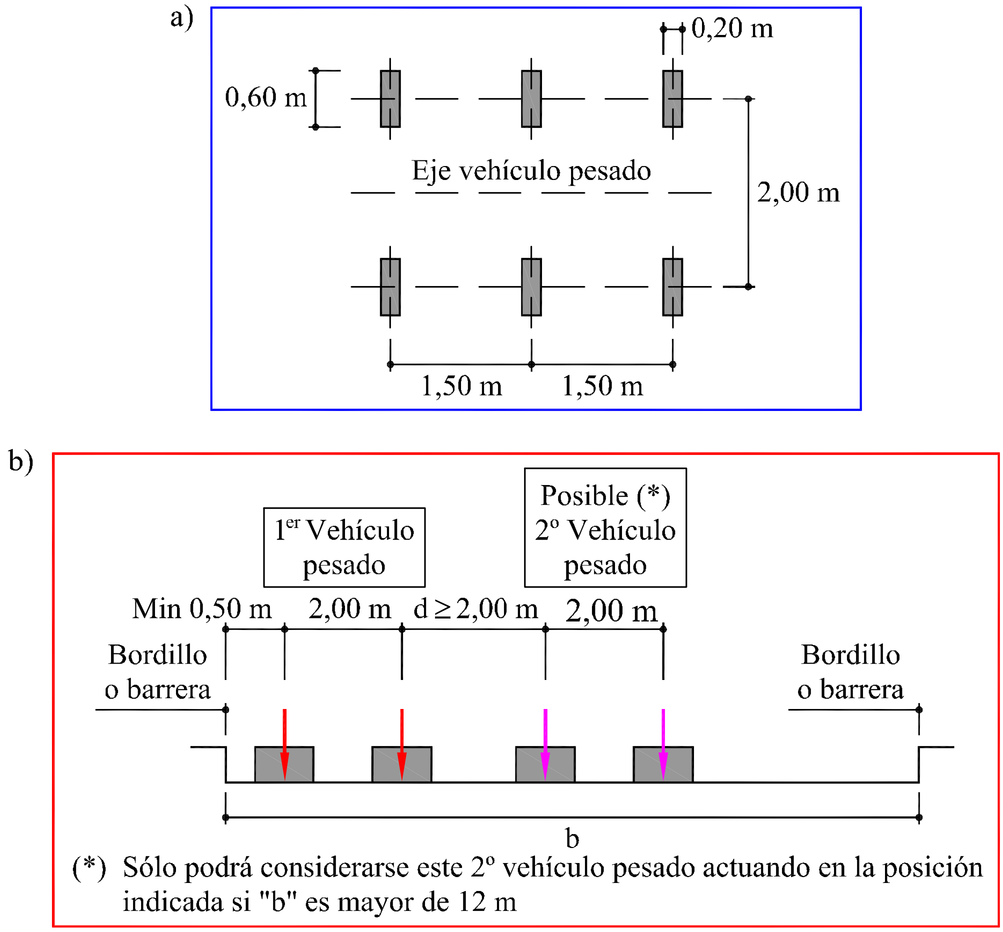


Fig. 1.16: (a) Planta croquis vehículo pesado (b) Posicionamiento transversal de los vehículos pesados

posición que se indica en la Figura 1.16a, y de eje longitudinal paralelo al de la calzada. La instrucción especifica la posición y el número de ellos (Figura 1.16b).

- Una sobrecarga uniforme de 4 kN/m^2 extendida en toda la superficie o en parte de ella, según sea más desfavorable para el elemento en estudio de aceras, pistas de ciclistas o ciclomotores, medianas que estén separadas de la plataforma del tablero.

Acción del viento

La distribución y el valor de las presiones que ejerce el viento sobre una estructura y las fuerzas resultantes dependen de varios factores: la geometría y las dimensiones de la estructura, las características y permeabilidad de sus superficie y la dirección, intensidad y racheo del viento.

En edificios, la acción del viento q_e es una presión perpendicular a la superficie en cada punto expuesto y puede expresarse como (CTE):

$$q_e = q_b \cdot c_e \cdot c_p \tag{1.1}$$

donde q_b es la presión dinámica del viento que de forma simplificada puede adoptarse igual a 0,5 kN/m^2, c_e es el coeficiente de exposición, variable con la altura del punto considerado, y c_p es el coeficiente eólico o de presión, dependiente de la forma y orientación de la superficie respecto al viento (Figura 1.17).

En puentes, la acción del viento puede asimilarse a una carga estática, salvo en estructuras muy flexibles en las que puede originarse fenómenos vibratorios importantes. El empuje producido por el viento se calcula por separado para cada elemento del puente, según la expresión (IAP):

$$F = C_D \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2}\rho\, V_C^2\right) \tag{1.2}$$

Grado de aspereza del entorno		Altura del punto considerado (m)							
		3	6	9	12	15	18	24	30
I	Borde del mar o de un lago, con una superficie de agua en la dirección del viento de al menos 5 km de longitud	2,4	2,7	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,7
II	Terreno rural llano sin obstáculos ni arbolado de importancia	2,1	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,3	3,5
III	Zonal rural accidentada o llana con algunos obstáculos aislados como árboles o construcciones pequeñas	1,6	2,0	2,3	2,5	2,6	2,7	2,9	3,1
IV	Zona urbana en general, industrial o forestal	1,3	1,4	1,7	1,9	2,1	2,2	2,4	2,6
V	Centro de negocio de grandes ciudades, con profusión de edificios en altura	1,2	1,2	1,2	1,4	1,5	1,6	1,9	2,0

Coeficientes de exposición c_e

	Esbeltez en el plano paralelo al viento					
	< 0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	≥ 5,00
Coeficiente eólico de presión, c_p	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8
Coeficiente eólico de succión, c_s	−0,3	−0,4	−0,4	−0,5	−0,6	−0,7

Coeficientes eólicos

Fig. 1.17: Valores de los coeficientes de exposición y eólicos (CTE)

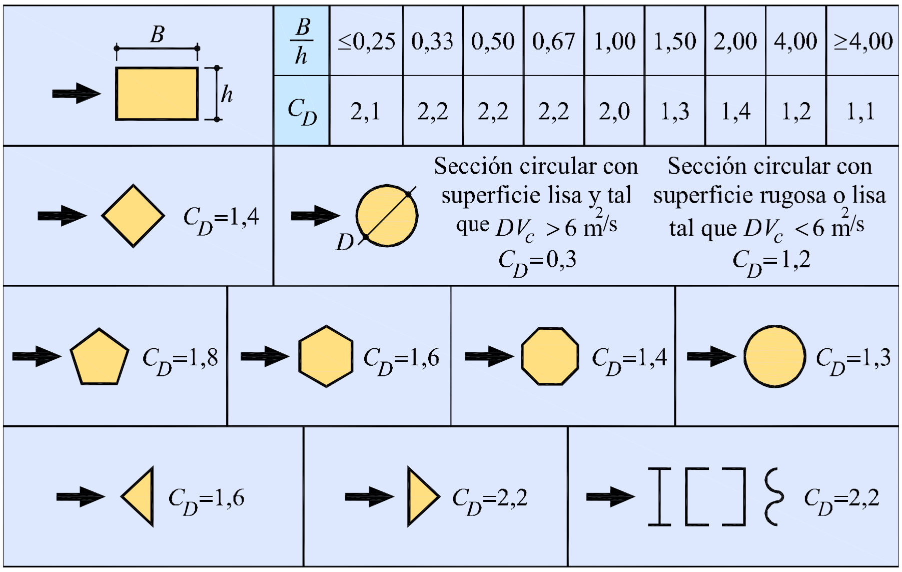


Fig. 1.18: Coeficientes de arrastre C_D para las secciones más usuales (IAP)

donde F es el empuje horizontal del viento, C_D es el coeficiente de arrastre del elemento considerado (Figura 1.18), A es el área neta total del elemento expuesta al viento y proyectada sobre un plano normal a éste, y $\left(\frac{1}{2}\rho V_C^2\right)$ es la presión básica de cálculo, en la que ρ es la masa específica del aire y V_C es la velocidad de cálculo del viento.

Cargas térmicas

Las variaciones de temperatura producen deformaciones en los elementos estructurales, que en caso de estar impedidas dan lugar a tensiones que deben tenerse en cuenta en el proyecto de una estructura.

En edificios, los efectos de la acción térmica pueden obtenerse a partir de la variación de la temperatura media de los elementos estructurales, separadamente para el verano (dilatación) y el invierno (contracción). En el CTE se dan tablas que proporcionan los valores de las temperaturas ambiente extremas, en verano y en invierno, según la situación geográfica de la estructura.

En puentes, la IAP tiene en cuenta: la *componente de variación uniforme de temperatura* del elemento estructural y el *gradiente térmico* en las secciones transversales del mismo. La componente de *variación uniforme de temperatura* depende de la *temperatura efectiva* mínima y máxima que puede alcanzar el elemento en un periodo de tiempo determinado. Su valor depende de la tipología estructural del elemento, de sus

dimensiones, de los materiales que lo constituyen y de los valores de la temperatura en el lugar donde se ubique el puente. El *gradiente térmico* se define como la diferencia de temperatura positiva entre la fibra superior y la inferior del tablero, dividida por la distancia entre ambas fibras. Esta variación se supone lineal entre ambas fibras.

Cargas de nieve

La intensidad y distribución de la carga de nieve depende del clima del lugar, del tipo de precipitación y del relieve del entorno. En el caso de edificios depende de la forma del edificio o de la cubierta, de los efectos del viento y de los intercambios térmicos en los paramentos exteriores.

Según el CTE, en cubiertas planas de edificios de pisos situados en localidades de altitud inferior a 1.000 metros, es suficiente considerar una carga de nieve de 1,0 kN/m^2. Para otros casos, el código especifica los pasos a seguir para calcular la carga de nieve; por ejemplo, en estructuras ligeras sensibles a la carga vertical, o cuando el viento origina un depósito irregular de nieve sobre las cubiertas, etc.

En puentes, la IAP calcula el valor de la sobrecarga de nieve según la zona climática donde se sitúa la estructura.

Acciones sísmicas

La normativa exige que en caso de peligrosidad sísmica es obligatorio incluir en el proyecto de una estructura el estudio sísmico de la misma, realizado según la Norma de Construcción Sismorresistente: Parte General y Edificación (NCSE). En la Figura 1.19 puede verse el mapa de peligrosidad sísmica del territorio nacional de la citada norma, que proporciona el valor de la aceleración sísmica básica a_b expresada en relación al valor de la gravedad g. Además, se tienen en cuenta las características geotécnicas del terreno de cimentación.

La construcción debe resistir la acción horizontal del sismo en todas las direcciones, lo que obliga a analizarlo en más de una dirección. En general, basta hacerlo en dos direcciones ortogonales en planta.

Incendio

El Documento Básico de Seguridad en caso de Incendios (DB-SI) del CTE fija los criterios a seguir en caso de incendio en edificios. El aumento de temperatura que se produce en el incendio de un edificio afecta a su estructura de dos formas diferentes. Por un lado, los materiales sufren una modificación importante de sus propiedades mecánicas. Por otro, las deformaciones que sufren los elementos estructurales debido

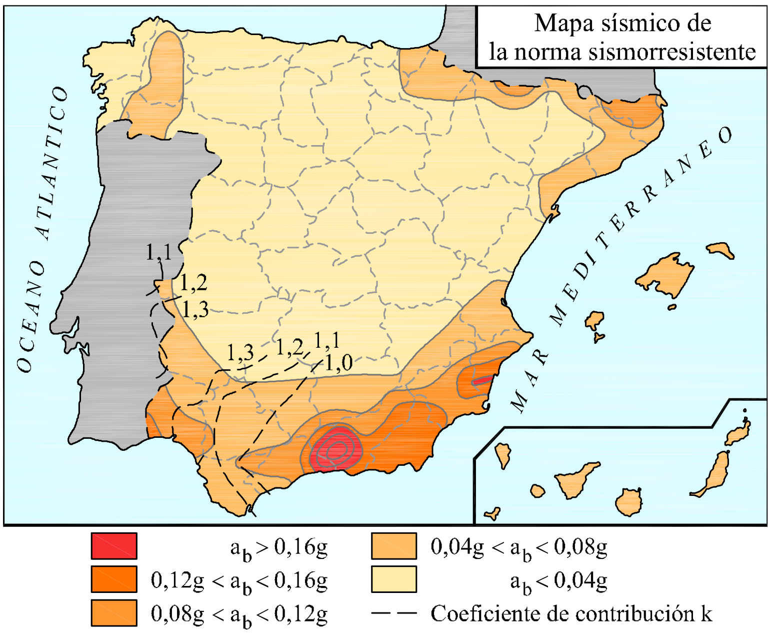


Fig. 1.19: Mapa de peligrosidad sísmica

al incremento de temperatura dan lugar, en general, a tensiones que se suman a las debidas a otras acciones.

En caso de incendio, las acciones a considerar son las mismas *acciones permanentes* y *variables* que en el cálculo de situación persistente, si es probable que actúen durante el incendio. Además, si para el cálculo de la *resistencia al fuego* se emplean los métodos indicados en el DB-SI, puede tomarse como efecto de la acción del incendio únicamente el derivado del efecto de la temperatura en la resistencia del elemento estructural.

Impacto

El impacto de un cuerpo sobre la estructura o uno de los elementos estructurales de la misma provoca acciones que dependen de la masa, de la geometría y de la velocidad del cuerpo impactante, así como de la capacidad de deformación y el amortiguamiento tanto del cuerpo como del elemento sobre el que impacta.

El impacto de un cuerpo puede representarse mediante una fuerza estática equivalente que tenga en cuenta los parámetros que intervienen.

En edificios, según el CTE, los valores de cálculo de las fuerzas estáticas equivalentes debidas al *impacto de vehículos* de hasta 30 kN de peso total son de 50 kN en la dirección

paralela a la vía y de 25 kN en la dirección perpendicular, no actuando simultáneamente.

En puentes, según la IAP, el impacto de un vehículo contra un elemento estructural se asimila a una carga estática cuya resultante se encuentre situada a $1,2\,\mathrm{m}$ sobre la superficie del pavimento, de valor igual a 1.000 kN en la dirección del tráfico y a 500 kN en sentido perpendicular a dicha dirección.

En el caso de puentes que crucen cursos de agua navegables, es necesario tener en cuenta la posibilidad de la colisión de una embarcación contra los elementos de la estructura.

Combinación de acciones

En el proyecto de una estructura, una vez determinadas las acciones a tener en cuenta, se consideran las posibles combinaciones de las mismas. Se llama *combinación de acciones* al conjunto de acciones compatibles actuando simultáneamente para una comprobación determinada. Cada combinación está formada por las acciones permanentes, una acción variable determinante y una o varias acciones variables concomitantes. Cualquiera de las acciones variables puede ser determinante.

Se llama *estado límite* (*E.L.*) a aquella situación de carga que al ser superada conduce al colapso de la estructura, o bien, a que ésta deje de ser funcional, durable o estética. Los estados límite se clasifican en dos categorías, los *estados límite últimos* (*E.L.U.*), que corresponden al colapso total o parcial de la estructura, y los *estados límite de servicio* (*E.L.S.*), que están definidos por los requisitos funcionales y de durabilidad que debe cumplir la estructura en servicio.

Los *estados límite últimos* son los mismos para todos los tipos de estructuras y materiales. Los más importantes son:

- *E.L.U. de equilibrio* por pérdida de estabilidad estática de una parte o del conjunto de la estructura, considerada como cuerpo rígido.
- *E.L.U. de rotura* por agotamiento resistente o deformación plástica excesiva.
- *E.L.U. de inestabilidad o pandeo* local o general, de una parte o del conjunto de la estructura.

La normativa también define los *estados límites últimos de fatiga*, *de deslizamiento* entre materiales que trabajen solidariamente, *de anclaje*, etc.

Los *estados límite de servicio* difieren según el tipo de estructura y material. Así, por ejemplo, los relativos al fenómeno de fisuración son específicos del hormigón. Los más importantes son:

- *E.L.S. de deformación* que afecte a la apariencia o funcionalidad de la obra, que cause daño a elementos no estructurales.
- *E.L.S. de fisuración* que afecte a la durabilidad o estética de la estructura.
- *E.L.S. de vibraciones* que no sean aceptables para los usuarios de la estructura o que puedan afectar su funcionalidad o provocar daños en elementos estructurales.

Las normativas establecen las combinaciones de cargas que deben considerarse para comprobar los estados límites. Por ejemplo, para los estados límite últimos la combinación de cargas es:

$$\sum_{j\geq 1}\gamma_{G,j}\; G_{k,j} + \sum_{j\geq 1}\gamma_{G^*,j}\; G^*_{k,j} + \gamma_{Q,1}\; Q_{k,1} + \sum_{i>1}\gamma_{Q,i}\;\psi_{0,i}\; Q_{k,i} \qquad (1.3)$$

donde γ_F son coeficientes de ponderación de las acciones, $G_{k,j}$ es el valor característico de cada acción permanentes, $G^*_{k,j}$ es el valor característico de cada acción permanente de valor no constante, $Q_{k,1}$ es el valor característico de la acción variable determinante y $\psi_{0,i}\; Q_{k,i}$ es el valor de combinación de las acciones variables concomitantes. El coeficiente $\psi_{0,i}$ tiene en cuenta la pequeña probabilidad de que actúen simultáneamente los valores desfavorables de varias acciones independientes.

En general, es necesario hacer tantas hipótesis o combinaciones como sea necesario, considerando en cada una de ellas una de las acciones variables como dominante y

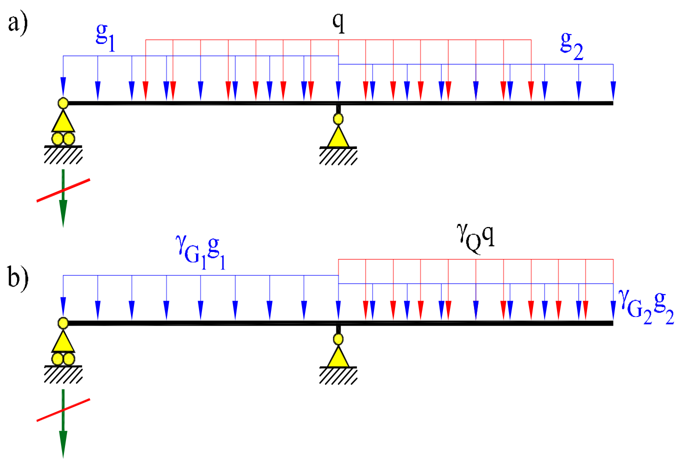


Fig. 1.20: (a) Viga bajo peso propio y carga distribuida variable (b) cargas para comprobar la estabilidad al vuelco

el resto como concomitantes. A continuación, se muestran algunos ejemplos de la combinación de cargas a considerar para comprobar un determinado estado límite.

Así por ejemplo, en el *E.L.U de equilibrio* se comprueba la pérdida de estabilidad estática de una parte o del conjunto de la estructura, considerada como un cuerpo rígido. En este caso, debe cumplirse que:

$$E_{d,desestab} \leq E_{d,estab} \tag{1.4}$$

donde $E_{d,desestab}$ es el valor de cálculo de los efectos de las acciones desestabilizadoras y $E_{d,estab}$ es el valor de cálculo de los efectos de las acciones estabilizadoras.

Supóngase la viga del Figura 1.20a, donde G_1 y G_2 son cargas permanentes debidas al peso propio, y q es una carga variable distribuida que puede extenderse en cualquier longitud. La hipótesis de carga para la comprobación de la estabilidad al vuelco es la correspondiente a la Figura 1.20b, donde γ_F son los coeficientes de ponderación de las acciones. Esta posición de la carga q es la que produce una reacción máxima

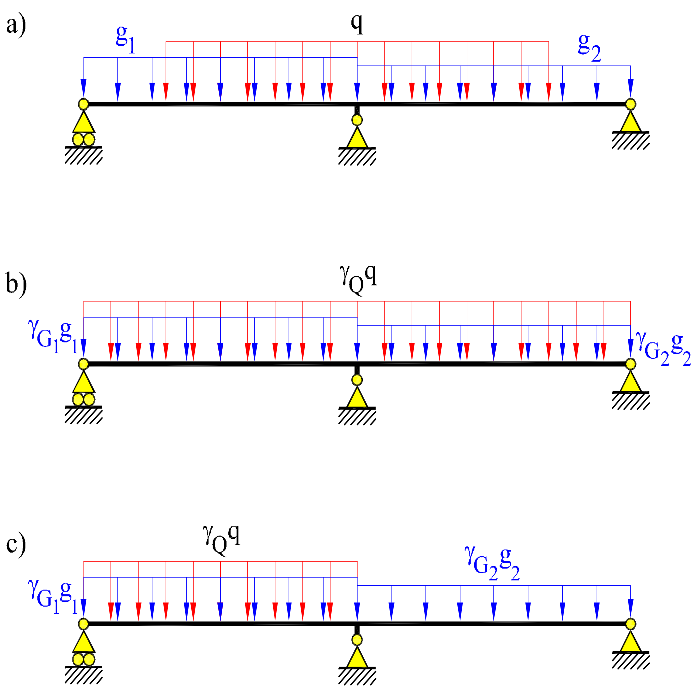


Fig. 1.21: (a) Viga bajo peso propio y carga distribuida variable, (b) cargas para comprobar el momento máximo en el apoyo central y (c) cargas para comprobar la flecha máxima

descendente que puede desestabilizar la estructura. En este caso, $E_{d,desestab}$ y $E_{d,estab}$ son las reacciones de cálculo desestabilizadoras y estabilizadoras, respectivamente.

En el *E.L.U de rotura* se comprueba el agotamiento resistente de los elementos estructurales más solicitados. Debe cumplirse que:

$$E_d \leq R_d \tag{1.5}$$

donde E_d es el valor de cálculo de los efectos de las acciones (leyes de esfuerzos, tensiones, etc.) y R_d es el valor de cálculo de la respuesta.

Así por ejemplo, supóngase que se desea comprobar el momento máximo para la estructura de la Figura 1.21a. La viga está sometida a las cargas permanentes de peso propio G_1 y G_2 y a una carga repartida variable q que puede extenderse en cualquier longitud.

La hipótesis de carga para el cálculo del momento máximo negativo es la indicada en la Figura 1.21b donde γ_F son los coeficientes de mayoración de las cargas. En este caso, E_d es el valor de cálculo del momento máximo negativo en el apoyo intermedio y R_d el momento máximo (negativo) a rotura.

En el *E.L.S. de deformación* se comprueba que la deformación sufrida por la estructura no afecte a su apariencia o funcionalidad; o bien, que no cause daño a elementos no estructurales. Debe cumplirse que:

$$E_d \leq C_d \tag{1.6}$$

donde E_d es el valor de cálculo de la deformación debida a las acciones que soporta la estructura y C_d es el valor límite admisible de la deformación.

Consideremos la viga de la Figura 1.21a, sometida a las cargas de peso propio G_1 y G_2 y a una carga distribuida variable q que puede extenderse en cualquier longitud. La hipótesis de carga para el cálculo de la *flecha máxima* es la que corresponde a la Figura 1.21c. Ahora, E_d es el valor de cálculo de la flecha máxima de la viga y C_d es el valor admisible de la flecha máxima.

1.6 Cargas tributarias

Cuando una carga repartida actúa sobre superficies planas como pisos o techos, debe determinarse la forma en que se transmite a los elementos estructurales que las soportan. Así, en la estructura de un edificio de pisos de la Figura 1.22, puede verse que el forjado está sustentado por viguetas transversales y vigas de borde. Para calcular la estructura reticulada hay que determinar cuál es la carga que transmite el forjado a las vigas a través del sistema de viguetas.

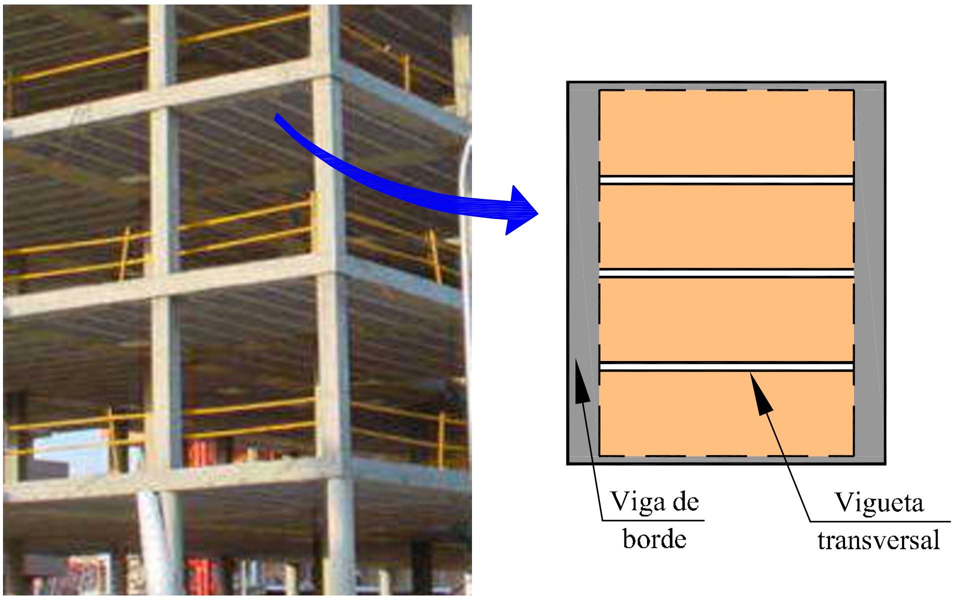


Fig. 1.22: Cargas tributarias

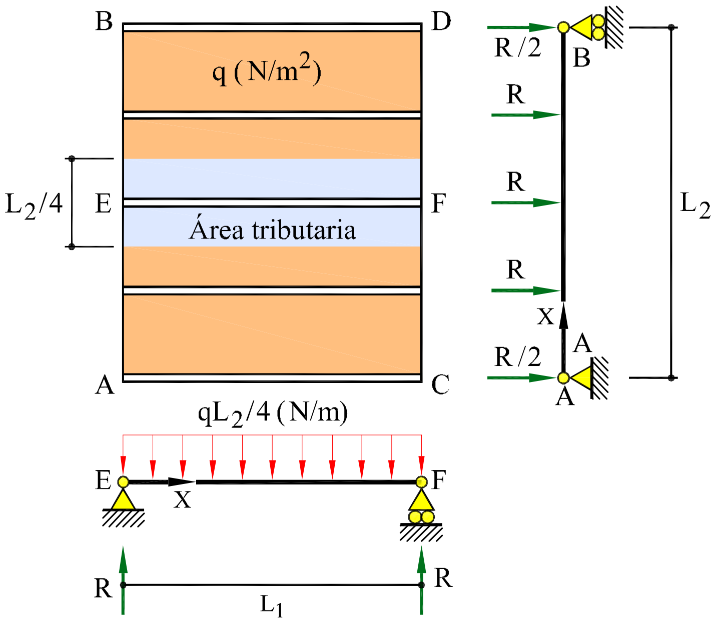


Fig. 1.23: Cargas tributarias: sistema en una dirección

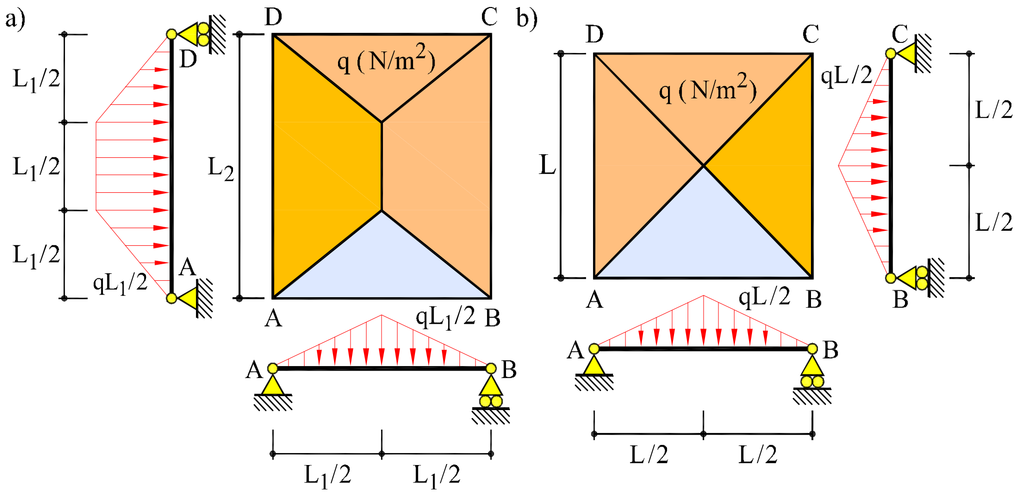


Fig. 1.24: Cargas tributarias: sistema en dos direcciones

Sistema en una dirección

Consideremos un forjado unidireccional (Figura 1.23) formado por una losa soportada por viguetas transversales (EF) que a su vez está apoyadas en dos vigas longitudinales (AB y CD). Si sobre la losa actúa una carga uniformemente repartida q, la vigueta EF soporta la carga que actúa sobre su *área tributaria* (área sombreada). Dicha carga es uniforme de valor $qL_2/4$. Las correspondientes reacciones en E y F cargan sobre las vigas longitudinales AB y CD.

Sistema en dos direcciones

Sea ahora un forjado bidireccional (Figura 1.24) formado por una losa apoyada sobre cuatro vigas perimetrales y donde $L_2/L_1 < 2$. La carga q repartida que actúa sobre la superficie de la losa se transmite a las vigas perimetrales mediante cargas distribuidas triangulares (vigas AB y DC) y trapezoidales (vigas AD y BC). En la Figura 1.24a se presenta la distribución de la carga para la relación $L_2/L_1{=}1,5$. Para la relación $L_2{=}L_1{=}L$ el área tributaria para las vigas de contorno es idéntica (Figura 1.24b).

2 Equilibrio y compatibilidad

2.1 Introducción

La Mecánica de Estructuras es una parte especializada de la Mecánica de Sólidos Deformables. Como tal, los problemas de los que se ocupa se formulan a partir de tres elementos básicos: las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones de compatibilidad y las ecuaciones constitutivas (de comportamiento del material).

En este Capítulo se tratan primero los conceptos de equilibrio y compatibilidad aplicados a estructuras articuladas y reticuladas. Ambos conceptos son elementos fundamentales de la Mecánica de Estructuras en su forma más general. Se enuncian además, la hipótesis de linealidad y, como consecuencia, el Principio de Superposición. La hipótesis de linealidad usada habitualmente en Mecánica de Estructuras, limita el comportamiento del material a la elasticidad lineal y al rango de pequeños desplazamientos.

Se introducen después los conceptos de indeterminación estática y grado de hiperestatismo en estructuras de barras, así como el de indeterminación cinemática y, en estructuras reticuladas, el de grado de traslacionalidad.

Se continúa con la consideración de *movimientos* y *deformaciones impuestas*, tanto en estructuras isostáticas como hiperestáticas.

Por último, se presentan los métodos generales de resolución de estructuras, el método de flexibilidad y el método de rigidez, objeto fundamental de este Libro.

2.2 Equilibrio y compatibilidad

2.2.1 Equilibrio

Las fuerzas (acciones y reacciones) que actúan sobre una estructura deben estar en *equilibrio estático*. Esto significa que deben formar un sistema de fuerzas de resultante nula y de momento resultante nulo; por tanto, deben cumplir las *ecuaciones de la*

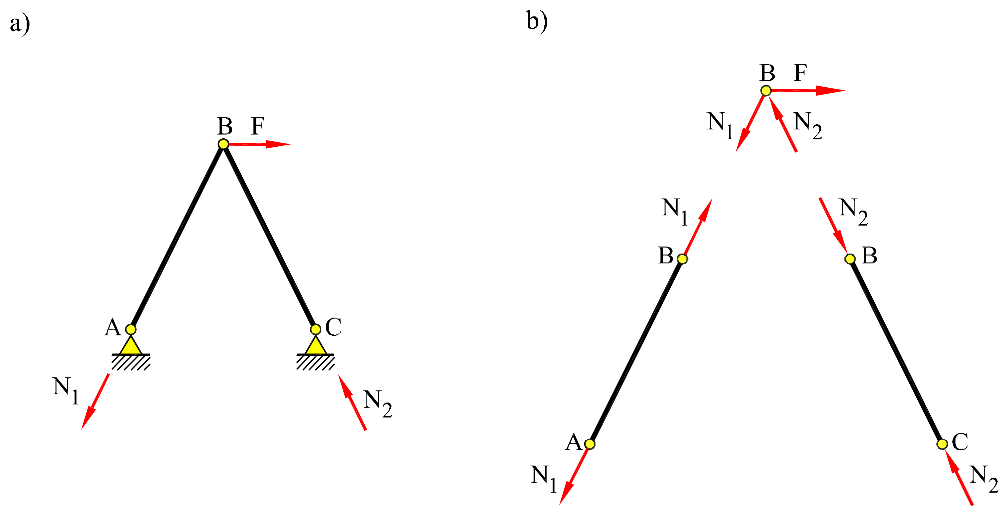


Fig. 2.1: Equilibrio en una estructura articulada: (a) equilibrio global, (b) equilibrio de piezas y nudos

estática, que, en forma vectorial, pueden escribirse como:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0 \tag{2.1}$$

$$\sum_i \boldsymbol{M}_i^o = 0 \tag{2.2}$$

donde $\boldsymbol{F}_i$ representa a cada una de las fuerzas que actúan sobre la estructura, $\boldsymbol{M}_i^o$ representa el momento de cada una de las fuerzas respecto de un punto arbitrario O y el símbolo $\sum_i$ representa la suma sobre todas las fuerzas i.

En el caso de estructuras planas cargadas en su plano, las anteriores ecuaciones vectoriales se reducen a tres ecuaciones escalares de la forma:

$$\sum_i (F_x)_i = 0 \quad ; \quad \sum_i (F_y)_i = 0 \quad ; \quad \sum_i (M_z)_i^o = 0 \tag{2.3}$$

donde los ejes x e y están sobre el plano de la estructura y el eje z es perpendicular a éstos.

Pero la condición de equilibrio estático, y las correspondientes ecuaciones que lo expresan matemáticamente, no son sólo aplicables a la estructura considerada en su conjunto, sino que debe satisfacerse también para cada parte integrante de ella, siempre que se consideren de forma explícita las fuerzas y momentos que el resto de la

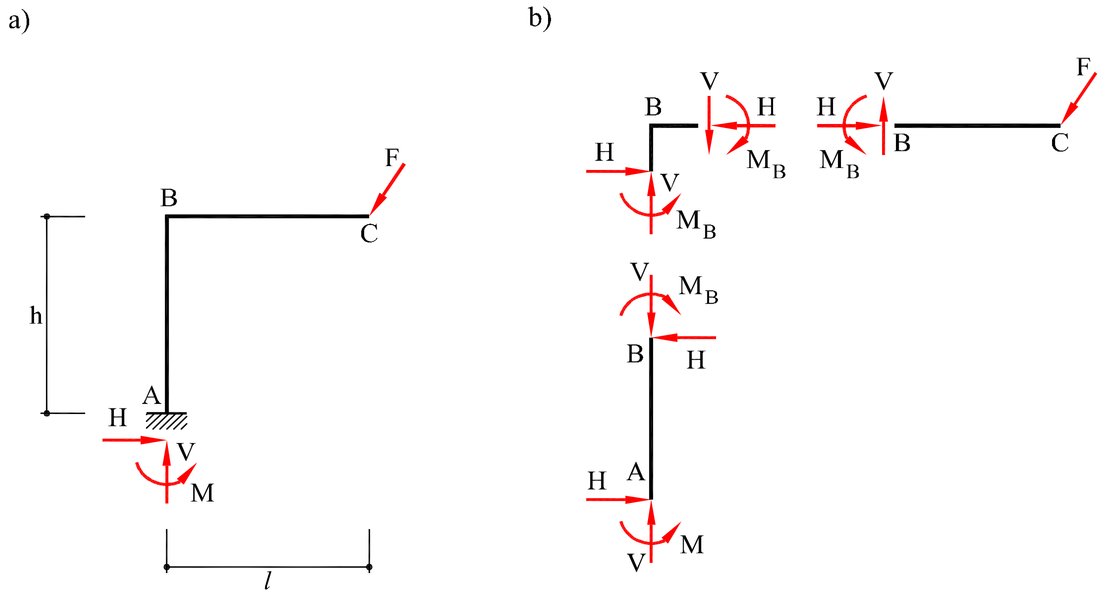


Fig. 2.2: Equilibrio en una estructura reticulada: (a) equilibrio global, (b) equilibrio de piezas y nudos

estructura ejerce sobre la parte considerada. La condición de equilibrio global, de hecho, es una condición necesaria, pero no suficiente, de equilibrio. Para que haya realmente equilibrio en una estructura, y no existan, por ejemplo, mecanismos parciales, es necesario (y suficiente) que estén en equilibrio todas y cada una de sus partes integrantes. En particular, las piezas que forman una estructura de barras deben estar en equilibrio, siempre que se consideren las fuerzas y momentos de extremo de barra que la estructura ejerce sobre las piezas. Análogamente, los nudos de la estructura deben estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas y momentos que actúan en los extremos de las barras que concurren en ellos.

Estas condiciones de equilibrio deben satisfacerse bajo cualquier hipótesis cinemática que se adopte y, en particular, bajo la hipótesis habitual de que las deformaciones y movimientos que se producen en la estructura son pequeños. En este caso, las ecuaciones de equilibrio pueden plantearse sobre la geometría original, no deformada.

Así, por ejemplo, la estructura articulada plana de la Figura 2.1a está en equilibrio global bajo la acción de las reacciones N_1 y N_2. Como el sistema de fuerzas actuante es coplanar, la condición de equilibrio (global) de momentos respecto del nudo B exige que las líneas de acción de las reacciones N_1 y N_2 pasen por dicho punto; la condición

de equilibrio (global) de fuerzas exige que la suma de las reacciones sea igual y opuesta a la fuerza F. En la Figura 2.1b se observa cómo las condiciones de equilibrio global implican necesariamente que tanto las dos barras de la estructura como el nudo B estén también en equilibrio, considerados como elementos aislados de la estructura.

Análogamente, la estructura reticulada plana de la Figura 2.2a está en equilibrio global bajo la acción de las reacciones H, V y M. El equilibrio de fuerzas implica que las reacciones H y V sean iguales y opuestas a las correspondientes componentes de F y el equilibrio de momentos respecto al punto C implica que $M = V \cdot l - H \cdot h$. En la Figura 2.2b puede comprobarse, de nuevo, que la satisfacción de las condiciones de equilibrio global implica que tanto las barras AB y BC como el nudo B, considerados individualmente, estén en equilibrio.

Cuando las restricciones que imponen los apoyos y enlaces son insuficientes para impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura o de alguno de sus elementos se tiene un *mecanismo total o parcial* (Figura 2.3). Así por ejemplo, la estructura articulada de la Figura 2.3a es un mecanismo total ya que los apoyos no pueden impedir el giro rígido de las barras alrededor de la rótula C. La estructura reticulada de la Figura 2.3b es un mecanismo total ya que los apoyos no pueden impedir la traslación horizontal de la estructura. La estructura reticulada de la Figura 2.3c es un mecanismo parcial porque el giro alrededor de la rótula es libre. En ninguno de los tres casos es posible que se cumplan todas las condiciones de equilibrio (global y parcial).

En ocasiones, se satisfacen las condiciones de equilibrio, pero el equilibrio resultante es *inestable*. En la Figura 2.4 se muestran dos sistemas de fuerzas en equilibrio: (a) *estable* y (b) *inestable*. Puede verse que el equilibrio inestable se da cuando al aplicar

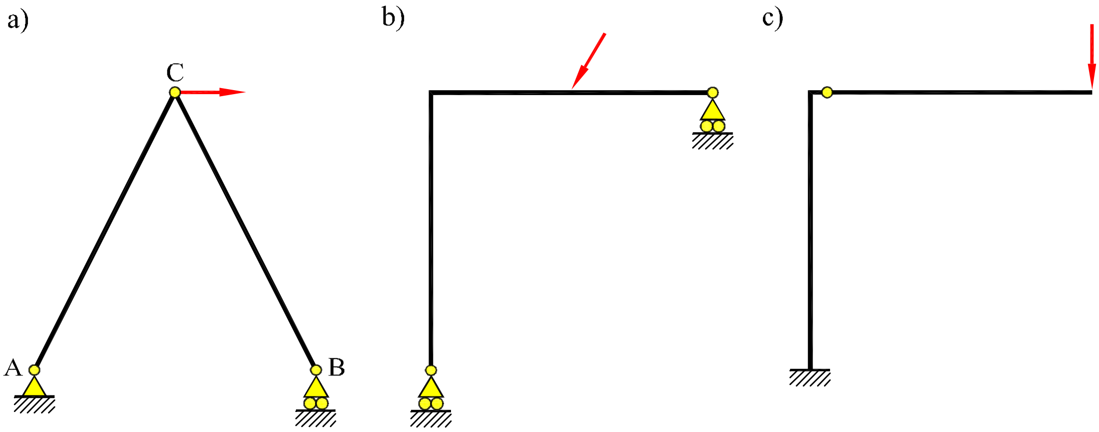


Fig. 2.3: Ejemplos de mecanismos totales o parciales en estructuras de barras

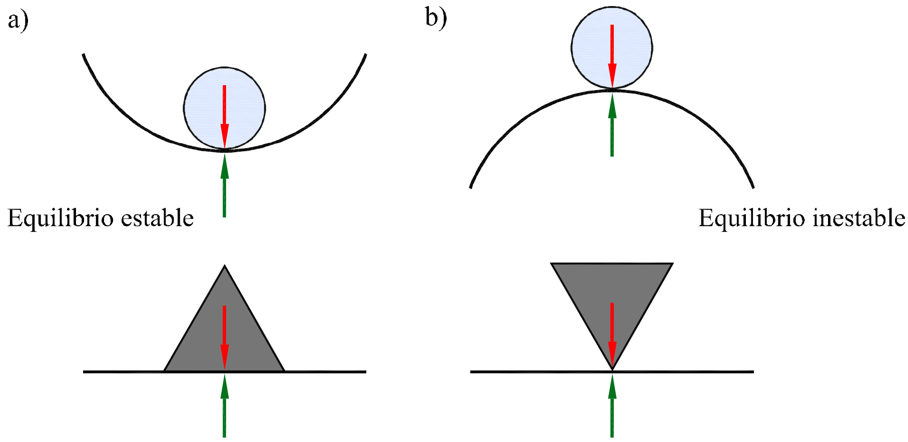


Fig. 2.4: Equilibrio y estabilidad

una pequeña perturbación al sistema de fuerzas, éste es incapaz de recuperar la situación de equilibrio de forma espontánea (Figura 2.4b).

En estructuras de barras, el equilibrio inestable está ligado a la existencia de mecanismos globales o parciales, en los que las restricciones que imponen los apoyos y los enlaces son insuficientes para garantizar la estabilidad total o parcial de la estructura. En la Figura 2.5 se ven dos ejemplos de equilibrio inestable: una perturbación lateral provocaría el colapso de ambos mecanismos.

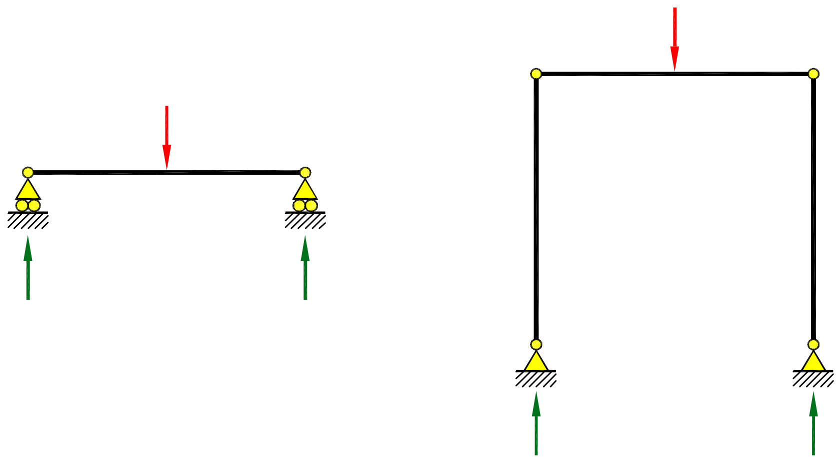


Fig. 2.5: Equilibrio y estabilidad

2.2.2 Compatibilidad

Las condiciones de equilibrio no son las únicas que se deben considerar en el comportamiento de las estructuras. De igual relevancia son las condiciones de *compatibilidad* sobre deformaciones y movimientos que deben satisfacerse en el proceso de deformación de la estructura bajo la acción de las cargas consideradas. Éstas se traducen en los siguientes requisitos:

- *condiciones de apoyo:* la deformación debe ser tal que se cumplan las limitaciones de movimiento impuestas por los apoyos,
- *continuidad en los nudos:* la deformación debe ser tal que los extremos de las diferentes barras que concurren en un nudo cumplan las limitaciones de movimiento impuestas por el correspondiente enlace, y
- *continuidad en las barras:* la deformación debe ser tal que se mantenga la continuidad de las piezas consideradas como elementos estructurales, es decir, que no se produzcan en ellas huecos ni solapamientos.

Estas condiciones de compatibilidad deben satisfacerse bajo cualquier hipótesis cinemática que se adopte y, en particular, bajo la hipótesis de pequeños movimientos.

Así, en la Figura 2.6b se muestra la deformada de una estructura articulada. Obsérvese que: (a) los puntos A y C son fijos, como corresponde a la condición de apoyo fijo especificada en ellos, pero las barras AB y BC pueden girar alrededor de dichos

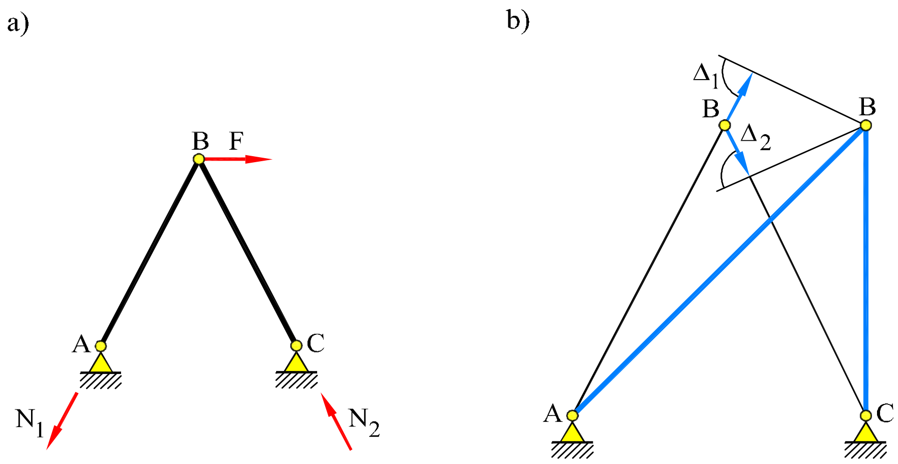


Fig. 2.6: Movimientos en una estructura articulada

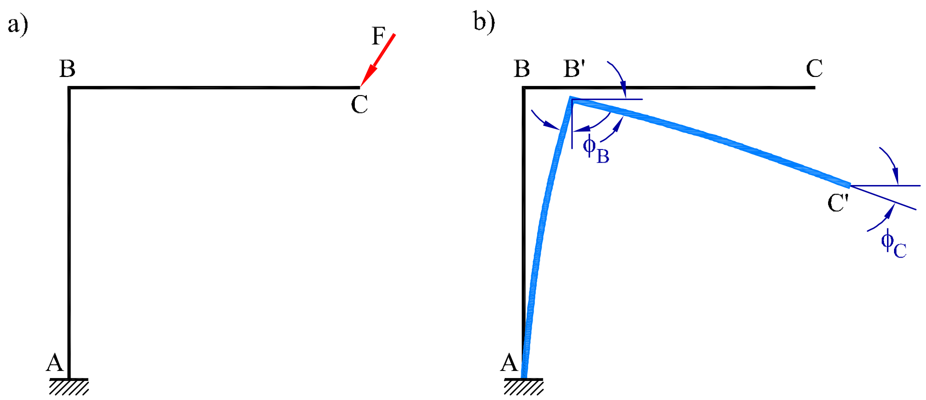


Fig. 2.7: Movimientos en una estructura reticulada

puntos, respectivamente; (b) los desplazamientos del nudo B son únicos y, por lo tanto, idénticos para los correspondientes extremos de las barras que concurren en él; dado que el nudo B es una articulación, puede darse un giro relativo entre las barras AB y BC; (c) las barras AB y BC trabajan a tracción y compresión, respectivamente, y sufren, por tanto, un alargamiento y un acortamiento que pueden calcularse en función del valor de los axiles respectivos. Las consideraciones de compatibilidad anteriores determinan de forma única la deformación de la estructura.

En la Figura 2.7b se muestra la deformada de una estructura reticulada. Obsérvese que: (a) los movimientos del punto A son nulos, desplazamientos y giro, como corresponde a la condición de empotramiento; (b) los movimientos del nudo B son únicos y, por lo tanto, idénticos para los correspondientes extremos de las barras que concurren en él; dado que el nudo B es rígido, no puede darse un giro relativo entre las barras AB y BC; (c) las barras AB y BC trabajan a flexión compuesta; sus rebanadas sufren unos acortamientos y giros diferenciales de flexión que pueden calcularse en función del valor de los esfuerzos respectivos. Las consideraciones de compatibilidad anteriores determinan, de nuevo, la deformación de la estructura.

2.3 Linealidad y Principio de Superposición

El problema de determinar los esfuerzos y movimientos que se producen en una estructura por acción de las cargas es *lineal*, esto es, la respuesta estructural es una función lineal de la solicitación si se admiten dos hipótesis adicionales:

- *hipótesis de linealidad geométrica*, es decir, suponer que los movimientos (desplazamientos y giros) que se producen son pequeños. Se entiende que los des-

plazamientos son pequeños comparados con las dimensiones geométricas de la estructura (espesor, luz, etc); los giros (en radianes) son pequeños comparados con la unidad.

- *hipótesis de linealidad material,* es decir, suponer que la relación entre tensiones y deformaciones es elástica y lineal, o sea, que los materiales de la estructura cumplen la ley de Hooke generalizada. Si los apoyos y enlaces no son rígidos, se suponen también elásticos y lineales.

Ninguna de estas hipótesis son principios básicos (como el equilibrio y la compatibilidad), sino que se consideran porque su adopción se traduce en dos consecuencias importantes:

- desde el punto de vista formal, en la garantía de que la solución del problema estructural, que satisface a la vez las condiciones de equilibrio y de compatibilidad, *existe y es única*, independientemente del procedimiento empleado para hallarla, y
- desde el punto de vista metodológico, en la posibilidad de adoptar importantes simplificaciones en el planteamiento del problema estructural, tanto en la imposición de las condiciones de equilibrio como de compatibilidad.

La validez de la aplicación de estas hipótesis a cada caso debe considerarse cuidadosamente, aunque en la mayoría de los casos de interés viene avalada por la práctica.

Así, la *hipótesis de linealidad geométrica*, también llamada *hipótesis de pequeños movimientos* o *principio de rigidez*, establece que la geometría de la estructura deformada no difiere sensiblemente de la geometría original, lo cual permite plantear las ecuaciones de equilibrio sobre la geometría original, en vez de tener que plantearlo sobre la geometría real, deformada, y desconocida *a priori*.

En la Figura 2.8a se ve un ejemplo de la aplicación del principio de rigidez; en este caso, en la deformación de una estructura articulada. Al considerar los movimientos de los nudos pequeños frente a las dimensiones de la estructura pueden calcularse las reacciones sin conocer los valores de dichos movimientos. Así, la reacción vertical en el apoyo 2 es:

$$V_2 \cdot (a-u) = F \cdot (a-v) \tag{2.4}$$

$$V_2 = F \cdot \frac{a-v}{a-u} \simeq F \tag{2.5}$$

donde u es el desplazamiento horizontal del punto 2, v es el desplazamiento vertical del punto 3 y a es la longitud nominal de la barra vertical 23. Si la hipótesis de pequeños movimientos no fuera válida, el cálculo de las reacciones y esfuerzos sería *no lineal*.

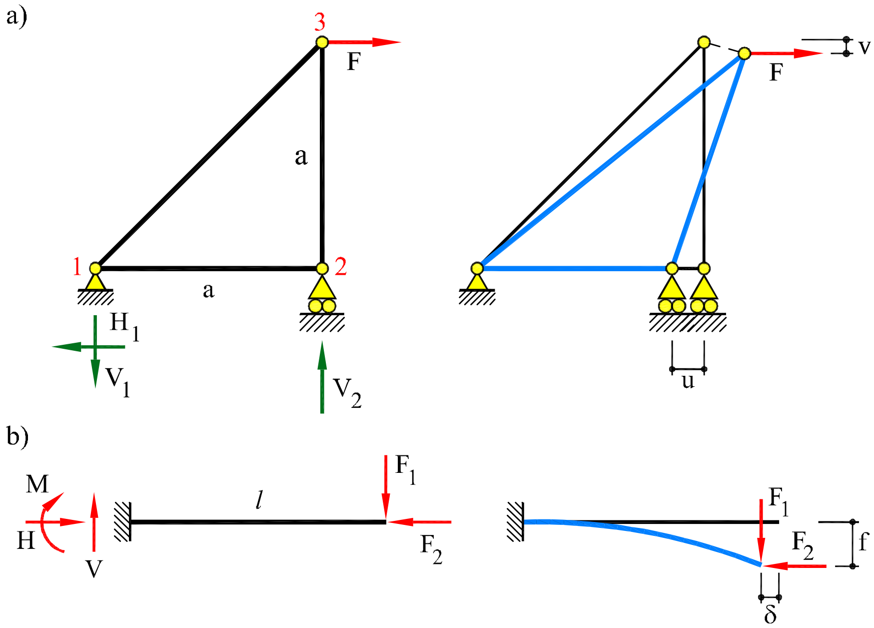


Fig. 2.8: Hipótesis de pequeños movimientos

En la Figura 2.8b se ve otro ejemplo de la aplicación del principio de rigidez, en este caso, en la deformación de un voladizo. Al considerar que los movimientos del extremo del voladizo son pequeños frente a las dimensiones de la pieza es posible calcular momentos sin conocer el valor de éstos. Así, el valor del momento de empotramiento es:

$$M = F_1 \cdot (l - \delta) + F_2 \cdot f \simeq F_1 \cdot l \tag{2.6}$$

donde δ es el acortamiento de la barra por efecto del axil, f es el movimiento vertical del extremo del voladizo y l es la longitud nominal de la viga. Se ha considerado, en la forma habitual, que δ es despreciable frente a l y que f es despreciable frente al canto de la pieza. Si la hipótesis de pequeños desplazamientos no fuera válida, la determinación de las reacciones y esfuerzos sería no lineal.

La consecuencia directa de las hipótesis de linealidad es el *principio de superposición*, que establece que *los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura son iguales a la suma de los efectos que originan cada una de las fuerzas del sistema actuando por separado*. Alternativamente, se puede enunciar diciendo que *los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura no dependen del orden de aplicación de las fuerzas del sistema sobre la estructura*.

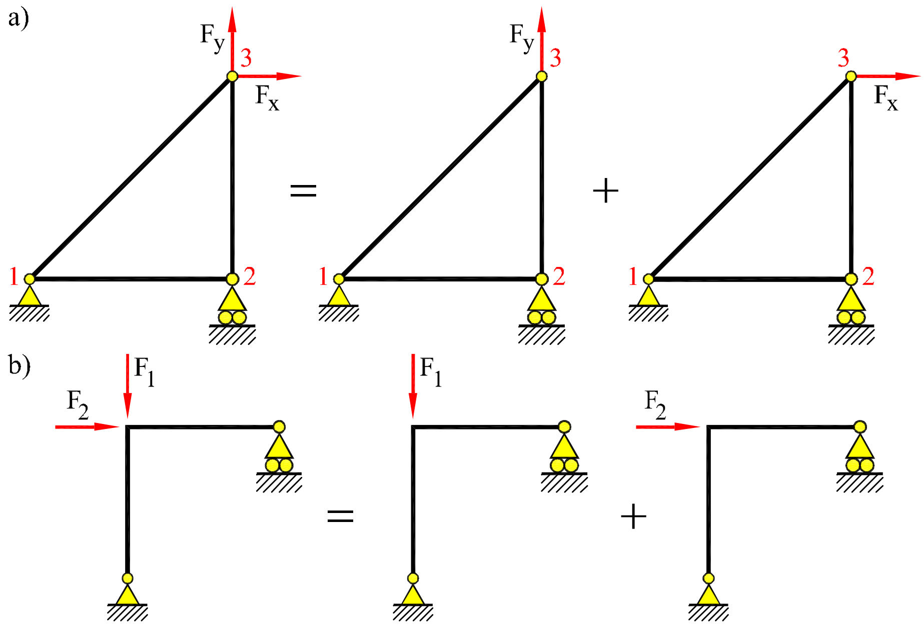


Fig. 2.9: Principio de Superposición

Este principio, muy utilizado en Mecánica de Estructuras se ilustra en la Figura 2.9. Es fácil ver que, sin las hipótesis de linealidad geométrica y material, el principio de superposición no sería válido.

2.4 Indeterminación estática. Grado de hiperestatismo

2.4.1 Concepto de indeterminación estática

Cuando es posible determinar (totalmente) las leyes de esfuerzos que actúan sobre todas las barras que forman una estructura utilizando solamente consideraciones de equilibrio de fuerzas y de momentos, sobre la estructura en su globalidad o sobre sus partes integrantes, la estructura está *estáticamente determinada* y se llama *isostática*. Veremos que, en general, las estructuras de barras están *estáticamente indeterminadas*. Se llaman entonces *hiperestáticas* y para resolverlas es necesario considerarlas deformables e imponer, adicionalmente, condiciones de compatibilidad sobre sus movimientos.

En *estructuras articuladas*, las barras trabajan a esfuerzo axil; si las fuerzas se aplican en los nudos, dicho axil es constante en cada barra. Resolver la estructura consiste en hallar los valores de los axiles que actúan sobre las distintas barras. Si la

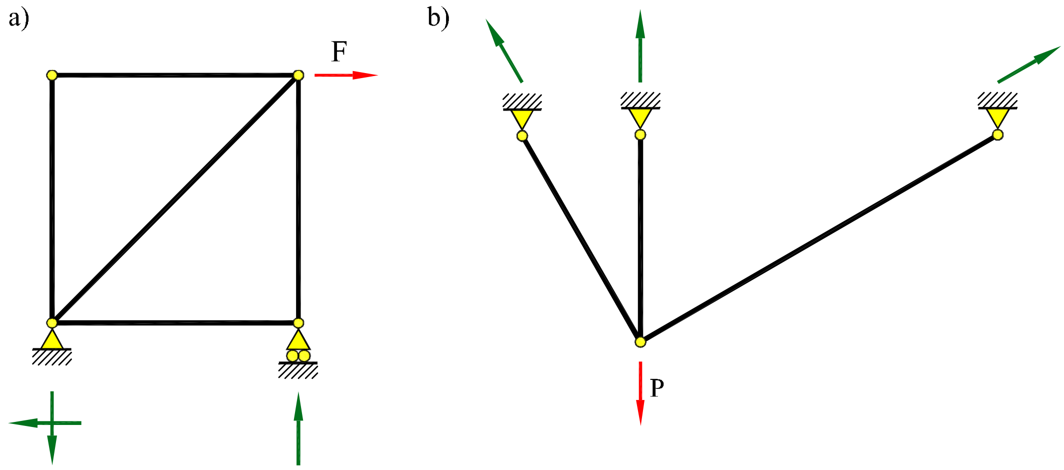


Fig. 2.10: Estructuras articuladas: (a) isostática (b) hiperestática

estructura es isostática, esto podrá hacerse aplicando exclusivamente consideraciones de equilibrio de fuerzas en los nudos (Figura 2.10a). El número de incógnitas del problema (reacciones exteriores y axiles en las barras) es igual al número de ecuaciones de la estática. En un problema plano, las ecuaciones de la estática que pueden plantearse es el doble del número de nudos, dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas por nudo. Por tanto, si la estructura articulada plana es *isostática* se cumple:

$$nr + nb = 2nn \tag{2.7}$$

donde nr es el número de reacciones exteriores, nb es el número de barras y $2nn$ es el número de ecuaciones de la estática. Así, por ejemplo, en la estructura de la Figura 2.10a, puede verse que el número de reacciones exteriores es $nr = 3$, el número de barras es $nb = 5$ y el número de nudos es igual a $nn = 4$. Aplicando la Ec. (2.7) se tiene $3 + 5 = 2 \cdot 4$. La estructura es isostática porque los axiles pueden hallarse aplicando sólo condiciones de equilibrio de fuerzas en los nudos.

Por el contrario, una estructura articulada plana es hiperestática cuando se cumple:

$$nr + nb > 2nn \tag{2.8}$$

En este caso, las ecuaciones de la estática son insuficientes para hallar los axiles de las barras de la estructura y para resolverla será necesario imponer condiciones de compatibilidad adicionales. En la estructura de la Figura 2.10b, se tiene $nr = 6$, $nb = 3$ y $nn = 4$. Por tanto: $6 + 3 > 2 \cdot 4$, y la estructura es hiperestática de grado 1.

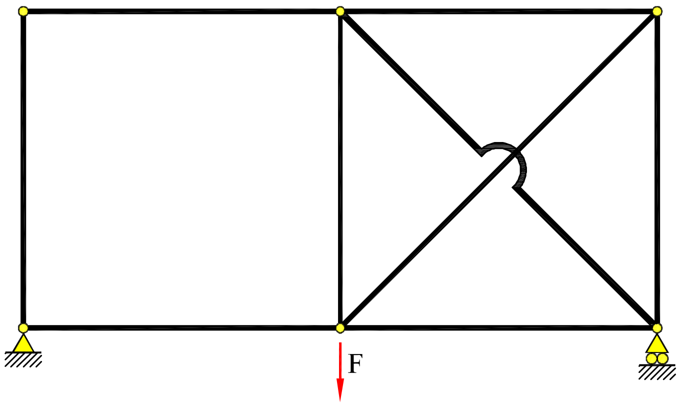


Fig. 2.11: Mecanismo parcial

Es importante señalar que la condición (2.7) es *necesaria pero no suficiente* para que la estructura sea isostática. Así, la estructura de la Figura 2.11 satisface la condición ($nr = 3, nb = 9, nn = 6$), pero es, sin embargo, un mecanismo en su parte izquierda, mientras que su parte derecha es hiperestática. En cualquier caso, la condición (2.7) refleja el procedimiento para resolver estructuras articuladas isostáticas.

En *estructuras reticuladas*, las barras trabajan, en general, a flexión compuesta y torsión, y resolver la estructura consiste en determinar las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles y, en su caso, momentos torsores que actúan sobre las dis-

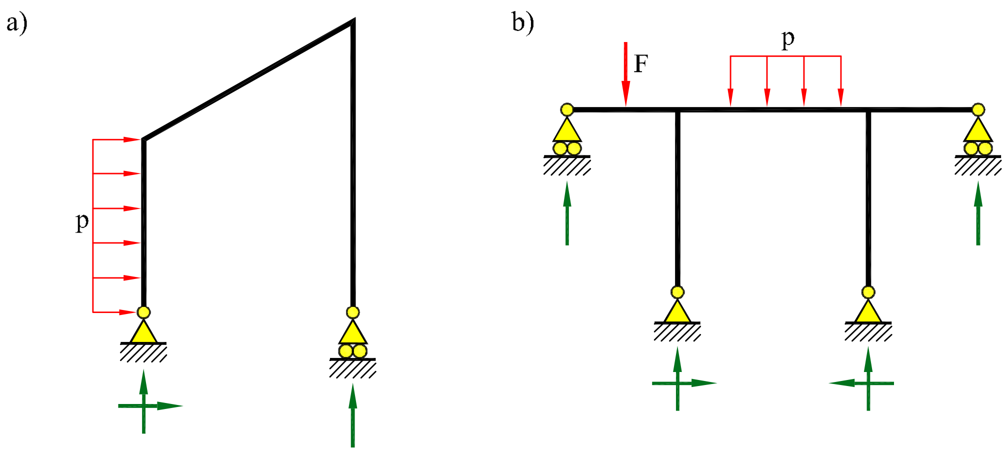


Fig. 2.12: Estructuras reticuladas planas: (a) isostática (b) hiperestática

tintas barras. Si la estructura es isostática (Figura 2.12a), esto podrá hacerse aplicando exclusivamente consideraciones de equilibrio. Si la estructura es hiperestática (Figura 2.12b), será necesario considerar en la resolución los movimientos (desplazamientos y giros) de los nudos que, a su vez, deberán ser compatibles con las deformaciones que sufran las diferentes barras concurrentes en ellos. La multiplicidad de esfuerzos que actúan en este tipo de estructura hace que este proceso sea más complejo que en las estructuras articuladas. En lo que sigue, consideraremos casos de estructuras reticuladas planas.

2.4.2 Grado de hiperestatismo

De forma general, se define el *grado de indeterminación estática* o *grado de hiperestatismo* de una estructura como el número mínimo de fuerzas (o momentos) que es necesario conocer para determinar completamente las leyes de esfuerzos. El grado de hiperestatismo se puede calcular como la diferencia:

$$\mathrm{h} = n - p\,e \tag{2.9}$$

donde n es el número de reacciones (externas o internas) que hay que conocer para poder determinar los esfuerzos actuantes en cualquier sección de la estructura, e es el número de ecuaciones de la estática y p es el número de partes en que queda dividida la estructura al hacer los cortes necesarios para poder determinar los esfuerzos. Cada una de las partes resultantes al dividir la estructura debe ser isostática, y debe, por tanto, satisfacer independientemente las ecuaciones de equilibrio estático.

Una vez calculado el valor h, para

h$=0$ hay el mismo número de incógnitas que de ecuaciones,
la estructura es *isostática*,
h>0 hay más incógnitas que ecuaciones,
la estructura es *hiperestática de grado* h,
h<0 hay menos incógnitas que ecuaciones,
la estructura es un *mecanismo de grado* h.

La estructura de la Figura 2.13a es externamente isostática, pero internamente hiperestática, ya que es una estructura reticulada, es decir, de nudos rígidos, formada por tres células cerradas. Una célula cerrada es siempre hiperestática, ya que en ella no se pueden determinar las leyes de esfuerzos si no se conocen éstos al menos en una de las secciones de la célula. Para ello es necesario “cortar” la célula, es decir, liberar un enlace rígido en una sección cualquiera. Con esto se introducen, naturalmente, tres incógnitas, los tres esfuerzos desconocidos en el enlace liberado.

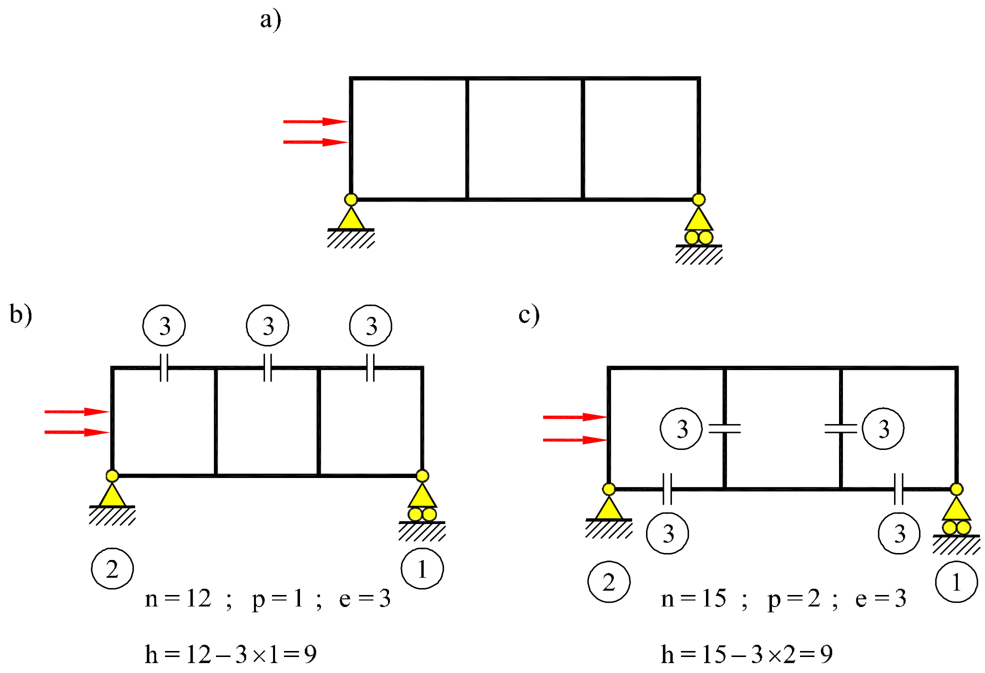


Fig. 2.13: Estructura reticulada celular: grado de hiperestatismo

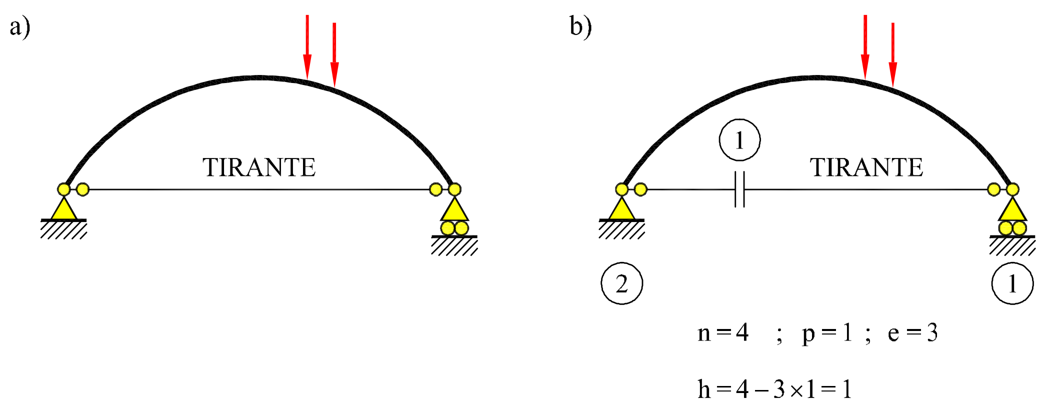


Fig. 2.14: Arco atirantado: grado de hiperestatismo

Así, en la Figura 2.13b se ha convertido la estructura en isostática a base de cortar las tres células en su parte superior. Puede ahora aplicarse la fórmula de la Ec. (2.9), con $n = 12$ (3 incógnitas exteriores más 3×3 incógnitas interiores), $p = 1$ (la estructura isostática consta de una sola parte) y $e = 3$ (al ser un sistema plano). El grado de hiperestatismo de la estructura es, por tanto, 9.

En la Figura 2.13c se ha adoptado un procedimiento alternativo: se han introducido cuatro "cortes", que introducen 3×4 incógnitas internas, pero que dividen a la estructura en $p = 2$ partes. Al aplicar ahora la Ec. (2.9), con $n = 15$ (3 incógnitas exteriores más 3×4 incógnitas interiores) y $p = 2$ (la estructura isostática consta ahora de dos partes), el grado de hiperestatismo de la estructura resulta ser 9. Obsérvese que el grado de hiperestaticidad es, naturalmente, independiente de por dónde y cómo se dan los cortes para convertir la estructura en isostática.

La estructura de la Figura 2.14a es externamente isostática, pero internamente hiperestática, ya que presenta una célula cerrada. Para "abrir" esta célula basta "cortar" el tirante inferior, es decir, liberar el enlace interno que el cable representa (Figura 2.14b) . Al hacer esto, se introduce una sola incógnita interna, el axil de tracción en el cable. El grado de hiperestatismo de la estructura es obviamente 1, ya que basta conocer una incógnita interna para convertirla en isostática. Idéntico resultado se obtiene

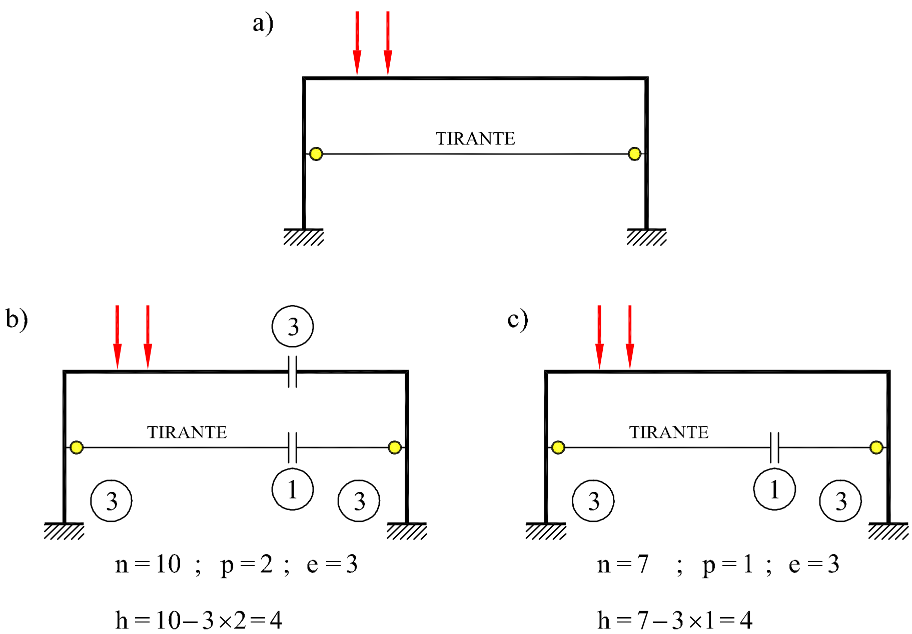


Fig. 2.15: Pórtico atirantado: grado de hiperestatismo

aplicando la Ec. (2.9).

Por último, en la Figura 2.15a se determina el grado de hiperestatismo de la estructura que se muestra, liberando enlaces internos de dos formas alternativas. En el primer caso, $n = 10$ y $p = 2$ (Figura 2.15b), mientras que en el segundo, $n = 7$ y $p = 1$ (Figura 2.15c). En ambos casos el recuento de incógnitas estáticamente indeterminadas reporta un grado de hiperestatismo igual a 4.

En los ejemplos anteriores puede observarse que, en estructuras de plano medio:

1. suprimir un apoyo o enlace simple (apoyo móvil, tirante) equivale a introducir una única incógnita,

2. suprimir un apoyo o enlace doble (articulación externa o interna) equivale a introducir dos incógnitas,

3. suprimir un apoyo o enlace triple (empotramiento, cortar una viga) equivale a introducir tres incógnitas.

2.5 Indeterminación cinemática. Grado de traslacionalidad

2.5.1 Concepto de indeterminación cinemática

De forma general, se define el *grado de indeterminación cinemática* de una estructura como el número mínimo de movimientos (desplazamientos o giros) que es necesario conocer para determinar completamente su estado deformacional. La deformación que sufre la estructura debe respetar las condiciones de compatibilidad. Suponiendo que los movimientos en las piezas individuales son continuos, el grado de indeterminación cinemática k se puede calcular como la diferencia:

$$\mathrm{k} = gl \cdot nn - ca \tag{2.10}$$

donde gl es el número de grados de libertad que se deben considerar por nudo, nn es el número de nudos de la estructura y ca es el número de grados de libertad prescritos por las condiciones de apoyo. El número de grados de libertad por nudo viene determinado por el tipo de estructura del que se trate y por las condiciones de compatibilidad entre barras concurrentes. En estructuras articuladas espaciales, el número de grados de libertad es 3 (tres traslaciones), ya que los giros relativos entre barras concurrentes son libres; en estructuras reticuladas espaciales, el número de grados de libertad por nudo es 6 (tres traslaciones y tres giros), ya que los giros relativos entre barras concurrentes están impedidos. En estructuras articuladas planas, $gl = 2$, ya que el movimiento fuera

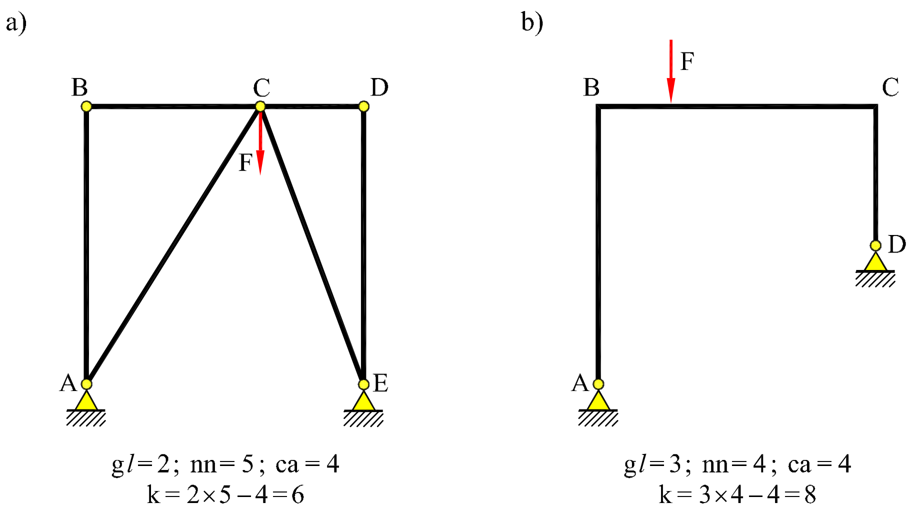


Fig. 2.16: Grado de indeterminación cinemática: (a) estructura articulada (b) estructura reticulada

del plano de la estructura es nulo. En estructuras reticuladas de plano medio, $gl = 3$, dos traslaciones en el plano de la estructura y un giro perpendicular a éste. Por su parte, en los emparrillados planos, $gl = 3$, dos giros en el plano de la estructura y una traslación perpendicular a éste.

Así, en la estructura articulada plana de la Figura 2.16a, el grado de indeterminación cinemática es k$= 2 \times 5 - 4 = 6$, y la deformación de la estructura (alargamientos de las barras) queda determinada, por ejemplo, por los movimientos horizontales y verticales de los nudos B, C y D. Los giros de las barras se pueden determinar *a posteriori*, en función de los desplazamientos de los nudos. En la estructura reticulada plana de la Figura 2.16b, el grado de indeterminación cinemática es k$= 3 \times 4 - 4 = 8$, y la deformación de la estructura queda determinada, por ejemplo, por los movimientos horizontales y verticales de B y C (2×2) y los giros de los nudos (4).

2.5.2 Estructuras reticuladas. Grado de traslacionalidad

Como ya se ha explicado, las piezas que forman las estructuras reticuladas trabajan fundamentalmente a flexión compuesta y a torsión. Por tanto, las rebanadas diferenciales de las piezas están sometidas a la acción combinada de esfuerzos axiles y cortantes, y momentos flectores y torsores y cada uno de los distintos esfuerzos produce una cierta forma de deformación de la rebanada. Así, el esfuerzo axil produce un alargamiento

uniforme de las fibras, el momento flector produce un giro diferencial entre las secciones extremas, el esfuerzo cortante produce una distorsión media y alabeo diferencial y el momento torsor produce un giro de torsión. Una vez calculadas las leyes de esfuerzos sobre una estructura, es posible cuantificar el valor de estos efectos sobre las diferentes rebanadas de una pieza y calcular los movimientos (relativos) que se producen entre unos puntos y otros de la pieza.

En rigor, todos estos efectos deben ser considerados al determinar la geometría deformada de la estructura y, además, es posible hacerlo. Sin embargo, se observa en la práctica que la importancia relativa de los diferentes efectos es muy distinta según la forma de trabajar de las diferentes piezas. Existen, por ejemplo, piezas que trabajan fundamentalmente a esfuerzo axil; tal es el caso, de los cables (que carecen prácticamente de rigidez a flexión y torsión y, además, sólo pueden trabajar a tracción) o de las barras articuladas en sus dos extremos (que trabajan fundamentalmente a axil de tracción o compresión). Es habitual reducir el análisis de movimientos en estas piezas al cálculo de sus alargamientos o acortamientos.

En las estructuras reticuladas se observa que, salvo en casos particulares, las deformaciones y movimientos debidos a la acción de los esfuerzos axiles y cortantes es mucho menos importante, en términos relativos, que la debida a los momentos flectores y torsores. Esto hace que, en general, cuando se aborda el análisis de movimientos de una estructura reticulada sea habitual despreciar los efectos de deformación de los primeros frente a los de los últimos. Así pues, en las estructuras de plano medio se considera solamente la deformación por flexión y en emparrillados planos y estructuras reticuladas espaciales la deformación por flexión y torsión. Merece una mención especial el caso de los arcos, ya que, dado que a menudo se diseñan para que sean la estructura antifunicular de las cargas permanentes, trabajan fundamentalmente a esfuerzo axil, y la deformación debida a éste no puede ser despreciada en el comportamiento deformacional de la estructura.

El hecho de despreciar la deformación debida a los esfuerzos axiles y cortantes permite una notable simplificación del análisis deformacional de las estructuras de barras rectas y nudos rígidos, ya que entonces (bajo la hipótesis de pequeños giros) las barras mantienen su longitud inicial y sus ángulos relativos. Este hecho introduce condiciones de compatibilidad adicionales entre los movimientos de los nudos extremos de las barras que reducen el grado de indeterminación cinemática del problema. El grado de indeterminación cinemática se puede expresar como:

$$\mathrm{k} = gl \cdot nn - ca - ni \tag{2.11}$$

donde gl, nn y ca tienen el mismo significado que en la Ec. (2.10) y ni es el número de barras consideradas como indeformables a axil y cortante que introducen restricciones

distintas (dos o más barras pueden introducir la misma restricción).

Así, por ejemplo, en la estructura de la Figura 2.17a, si se supone que las barras AB y CD son inextensibles, los movimientos verticales de los nudos B y C deben ser nulos; si la barra BC es también inextensible, los movimientos horizontales de los nudos B y C deben ser iguales. Se observa que la barra AB sufre una rotación con centro en el punto A, la barra CD sufre una rotación con centro en el punto D y la barra BC sufre una traslación horizontal y no gira. Los puntos A y D son los centros instantáneos de rotación (CIRs) de las barras AB y CD, respectivamente. Nótese también que los nudos B y C son rígidos y se mantienen rectos en la deformación. El grado de indeterminación cinemática se reduce a k= $3 \times 4 - 4 - 3 = 5$, y la deformación de la estructura queda determinada, por ejemplo, por la traslación horizontal de la barra BC (1) y los giros de los nudos (4). El valor del movimiento horizontal de los nudos B y C se puede relacionar con las rotaciones ϕ_{AB} y ϕ_{CD} de las barras AB y CD, respectivamente, mediante las igualdades:

$$u = \phi_{AB} \cdot h_1 = \phi_{CD} \cdot h_2 \tag{2.12}$$

En la Figura 2.17b se muestra la deformada de una estructura similar. En este caso, la simetría de la geometría y de la carga, respecto a un eje vertical central, unida a la condición de inextensibilidad de las barras, obliga a los nudos B y C a permanecer en sus posiciones iniciales. Así, la deformación de la estructura queda determinada por los

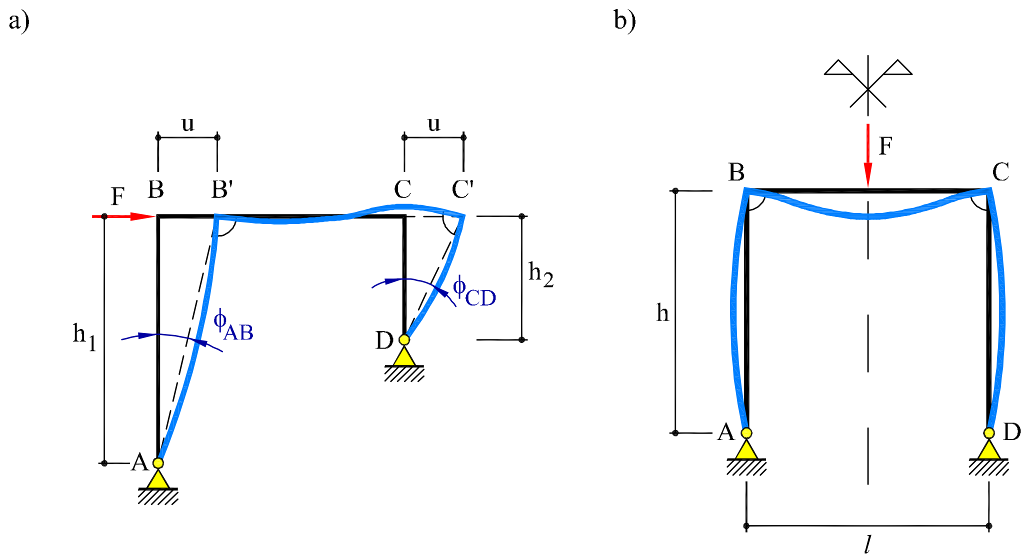


Fig. 2.17: (a) Estructura traslacional, (b) estructura intraslacional

giros de los nudos (4) que, además, deben ser simétricos dos a dos. Por tanto, el grado de indeterminación cinemática se reduce a k= 2.

Análogamente, en la estructura de la Figura 2.18, si se supone que las barras AB y CD son inextensibles, los movimientos de los nudos B y C deben producirse sobre las rectas perpendiculares a las barras AB y CD, respectivamente; si la barra BC es también inextensible, los movimientos de los nudos B y C deben ser tales que su longitud se mantenga invariable. Por tanto, la barra AB sufre una rotación con centro en el punto A, la barra CD sufre una rotación con centro en el punto D y la barra BC sufre una rotación con centro en el punto O. Los puntos A, D y O son los centros instantáneos de rotación (CIRs) de las barras AB, CD y BC, respectivamente. Nótese también que los nudos B y C son rígidos, y que mantienen su ángulo constante en la deformación. El grado de indeterminación cinemática es k= $3 \times 4 - 4 - 3 = 5$, y la deformación de la estructura queda determinada, por ejemplo, por el giro de la barra BC (1) y los giros de los nudos (4). El valor de los movimientos laterales de los nudos B y C, δ_1 y δ_2, respectivamente, se puede relacionar con las rotaciones ϕ_{AB}, ϕ_{BC} y ϕ_{CD} de las barras AB, BC y CD, respectivamente, mediante las igualdades:

$$\delta_1 = \phi_{AB} \cdot l_1 = \phi_{BC} \cdot l_3 \tag{2.13a}$$

$$\delta_2 = \phi_{CD} \cdot l_2 = \phi_{BC} \cdot l_4 \tag{2.13b}$$

Queda patente en los ejemplos anteriores que, si se desprecia la deformación debida a los esfuerzos axiles y cortantes, la deformación de una barra cualquiera se puede descomponer en la suma de:

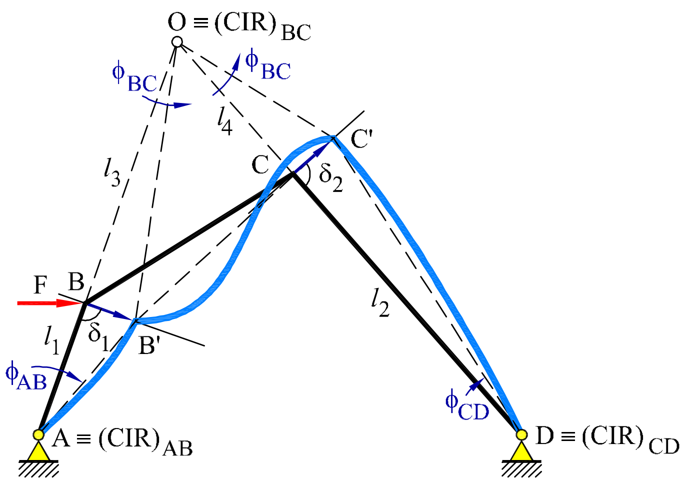


Fig. 2.18: Centros instantáneos de rotación en una estructura traslacional

- *un movimiento de sólido rígido*, de traslación pura o rotación alrededor de su centro instantáneo de rotación, y
- *la deformación de flexión* debida a los esfuerzos flectores que soporta la barra.

El movimiento de sólido rígido se traduce en un movimiento de los nudos extremos de la barra respecto a sus posiciones iniciales. Los movimientos de sólido rígido de las distintas barras que concurren en un nudo no son independientes entre sí, sino que sólo pueden producirse de forma que se satisfagan las condiciones de compatibilidad de desplazamientos en los nudos. Por su parte, la deformación por flexión mantiene inalterada la longitud de la directriz, esto es, la posición de los nudos extremos, pero modifica los giros de éstos, de forma que se cumpla la condición de compatibilidad de giros en los extremos de las barras concurrentes en un nudo rígido.

En relación a esto, es necesario distinguir entre los giros de sólido rígido que sufren las barras y los giros de sus nudos extremos. Así, por ejemplo, el giro de la barra AB en la estructura de la Figura 2.17a, ϕ_{AB}, es distinto de los giros de los nudos A y B, ϕ_A y ϕ_B. La diferencia entre uno y otros se debe, precisamente, a la deformación por flexión de la barra AB.

En estas condiciones, el grado de indeterminación cinemática viene dado la expresión:

$$\mathrm{k} = gt + ng \tag{2.14}$$

donde gt es el número de movimientos *independientes* de sólido rígido de las barras (traslaciones o giros alrededor de sus CIRs) y ng es el número de giros de nudo desconocidos.

Al número gt se le denomina *grado de traslacionalidad* de la estructura. Si:

- $gt = 0$, la estructura se llama *intraslacional* y, en ella, los nudos son fijos, esto es, sus desplazamientos son nulos y sólo pueden girar. Las únicas incógnitas cinemáticas del problema son los giros de los nudos (ng).
- $gt > 0$, la estructura se llama *traslacional* y, en ella, los nudos pueden desplazarse (respetando las condiciones de compatibilidad) y girar. Las incógnitas cinemáticas del problema son los giros de los nudos (ng) y los movimientos *independientes* de sólido rígido de las barras (gt).

La estructura de la Figura 2.17b es intraslacional, mientras que las estructuras de las Figuras 2.17a y 2.18 son ambas traslacionales de grado $gt = 1$.

Una forma sencilla de calcular el grado de traslacionalidad de una estructura reticulada consiste en prescindir de la deformación por flexión y considerar únicamente

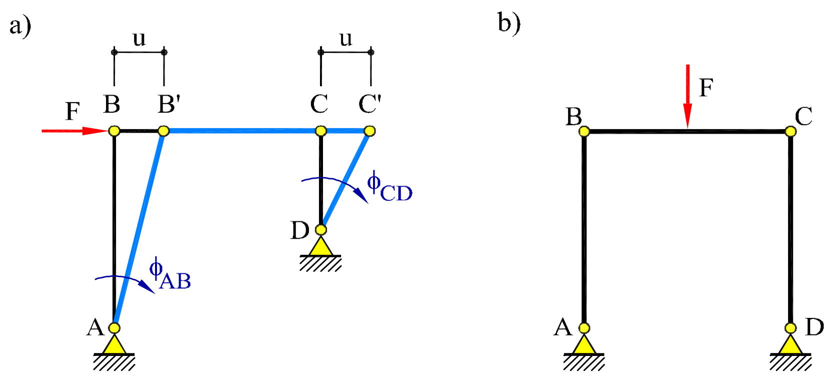


Fig. 2.19: Estructuras articuladas: (a) mecanismo de grado 1, (b) estable

los movimientos de sólido rígido de las barras. Para ello, basta con convertir todos los enlaces rígidos (apoyos de empotramiento y nudos rígidos) en articulados. Se tiene entonces una estructura articulada que será en, general, un mecanismo. Es fácil comprobar que el grado de traslacionalidad de la estructura reticulada original coincide con el número de mecanismos de la estructura articulada resultante. En la Figura 2.19 se muestra este procedimiento para las dos estructuras reticuladas de la Figura 2.17. Se verifica que la estructura articulada de la Figura 2.19a es un mecanismo de grado 1, mientras que la de la Figura 2.19b es estable para cargas simétricas. En la Figura 2.19a se verifican, de forma evidente, las relaciones (2.12).

Se deduce de este procedimiento que las estructuras traslacionales deben su estabilidad a la rigidez de sus nudos. Se deduce también que las estructuras intraslacionales con cargas aplicadas en los nudos trabajan exclusivamente a esfuerzo axil, ya que dicha solución, que satisface las condiciones de equilibrio y compatibilidad, existe y es única.

2.6 Equilibrio y compatibilidad en estructuras simétricas

Se dice que una estructura plana (o espacial) es simétrica respecto a un eje (o a un plano) cuando presenta, respecto a éste, simetría de forma y de características mecánicas (rigidez a flexión, axil, cortante y torsión). En la Figura 2.20 se muestran dos estructuras articuladas simétricas (Figuras 2.20a y 2.20b) y otras dos no lo son (Figuras 2.20c y 2.20d). Asímismo, en la Figura 2.21 se presentan algunas estructuras reticuladas simétricas (Figuras 2.21a-2.21d) y otras que no lo son (Figuras 2.21e-2.21f).

Se estudiarán, en esta Sección, las estructuras articuladas y reticuladas planas simétricas respecto a un eje, pero los razonamientos expuestos y las conclusiones extraídas son extensibles a otras situaciones.

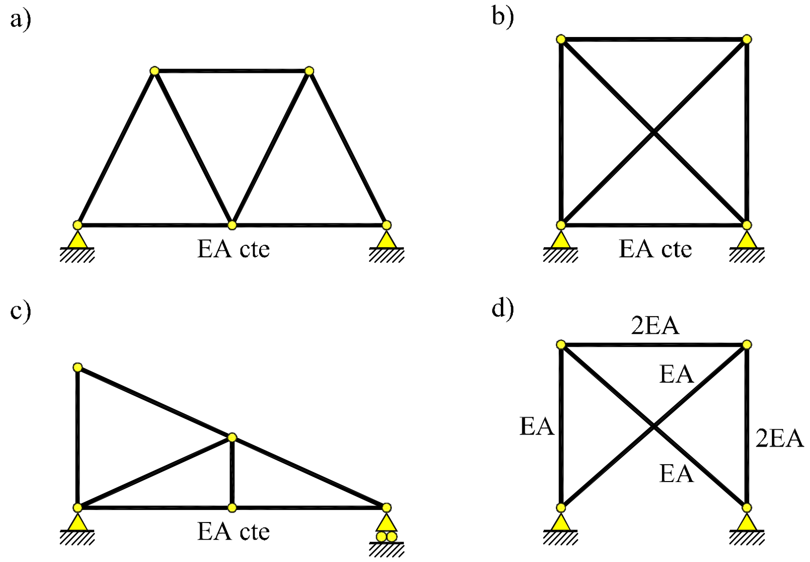


Fig. 2.20: Estructuras articuladas: (a)-(b) simétricas (c)-(d) no simétricas

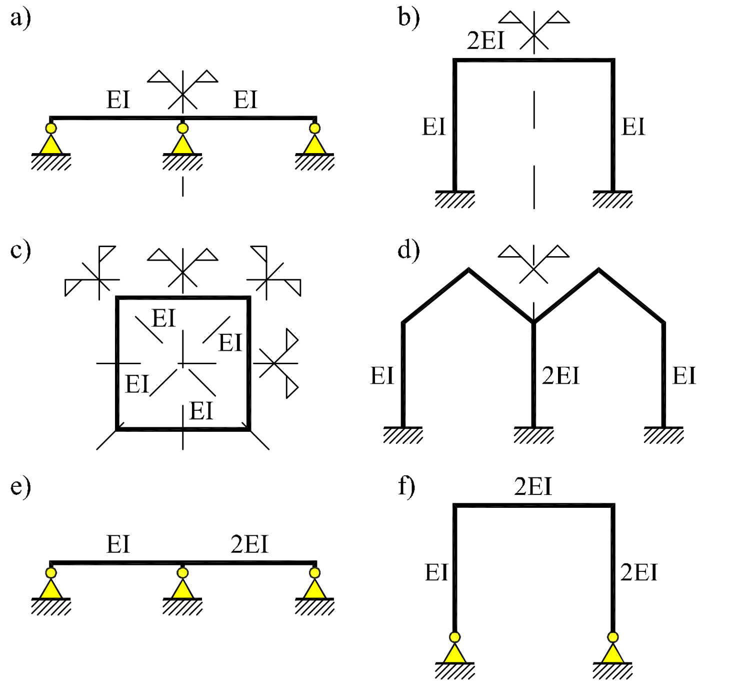


Fig. 2.21: Estructuras reticuladas: (a)-(d) simétricas (e)-(f) no simétricas

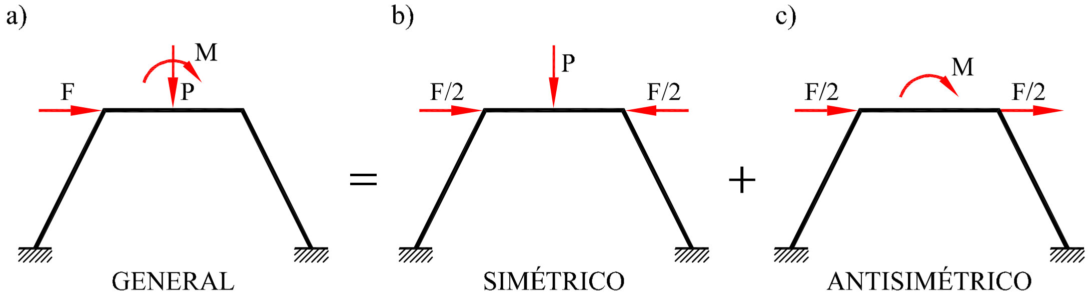


Fig. 2.22: Descomposición de un caso general de carga

En una estructura simétrica es *siempre* posible descomponer un caso de carga general en suma de dos estados de carga, uno *simétrico* y otro *antisimétrico*. En ambos casos, las condiciones de equilibrio y compatibilidad que debe satisfacer la solución del problema estructural tienen que respetar las condiciones de simetría (o antisimetría) del problema. Veremos en esta Sección que esto reduce, *grosso modo*, a la mitad el grado de indeterminación estática y cinemática del problema, hecho muy favorable de cara a su resolución. Aplicando el principio de superposición, la solución del problema original puede obtenerse resolviendo, primero, los problemas parciales y, después, superponiendo (es decir, sumando adecuadamente) los esfuerzos y los movimientos correspondientes a dichos problemas parciales. Este procedimiento permite aprovechar la información adicional que proporcionan las condiciones de simetría y antisimetría.

En la Figura 2.22a se muestra una estructura simétrica bajo un estado de carga general y la descomposición del estado de carga en uno simétrico Figura 2.22b y otro antisimétrico Figura 2.22c. El procedimiento es análogo para una estructura articulada.

Obviamente, una estructura puede ser simétrica respecto a varios ejes (o planos), en cuyo caso la reducción del grado de indeterminación debido a las condiciones de simetría es mayor (Figura 2.21c). También puede ocurrir que las mitades de una estructura simétrica presenten, a su vez, simetría respecto a otros ejes (Figura 2.21d), y entonces las condiciones de simetría pueden considerarse de forma sucesiva.

2.6.1 Estructuras articuladas

Estudiaremos separadamente el comportamiento de una estructura articulada bajo cargas simétricas y antisimétricas. En ambos casos, las condiciones de equilibrio y compatibilidad que debe satisfacer la solución estructural tienen que respetar las condiciones de simetría (o antisimetría) del problema.

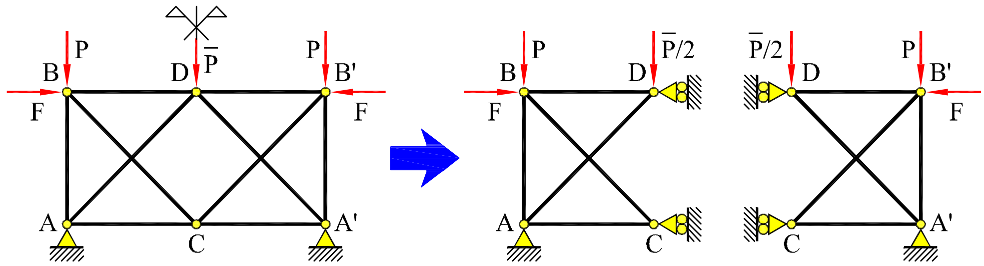


Fig. 2.23: Estructura articulada simétrica con carga simétrica.

Carga simétrica

Consideremos la estructura articulada simétrica de la Figura 2.23 sometida a carga simétrica respecto al eje vertical. Tanto las reacciones como los esfuerzos axiles deben ser simétricos respecto al eje de simetría; esto reduce, obviamente, el grado de hiperestatismo del problema (de 2 a 1). Asimismo, los movimientos de los nudos y la deformada de la estructura deben ser simétricos; esto reduce el grado de indeterminación cinemática (de 8 a 4). Por simetría, los nudos C y D situados sobre el eje de simetría tienen movimiento horizontal nulo. Para resolver la estructura basta con resolver cualquiera de las *mitades* en que queda dividida.

Carga antisimétrica

Consideremos ahora la estructura de la Figura 2.24 sometida a carga antisimétrica respecto al eje vertical. En este caso, tanto las reacciones como los esfuerzos axiles deben ser antisimétricos respecto al de simetría; esto reduce el grado de hiperestatismo de 2 a 1. Por otra parte, los movimientos de los nudos A y B, por antisimetría son iguales a los de los nudos A' y B'. Además, el movimiento vertical de los nudos C y D es

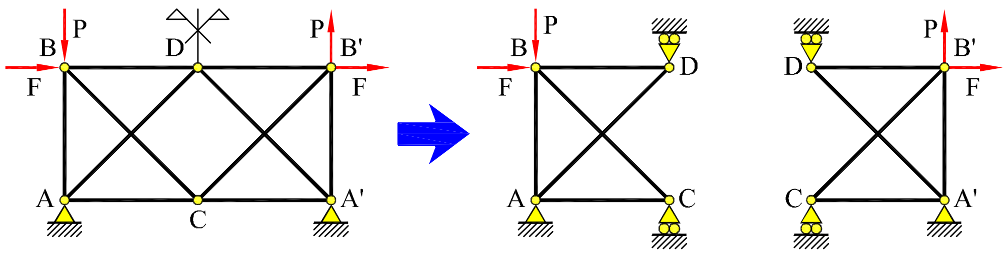


Fig. 2.24: Estructura articulada simétrica con carga antisimétrica

nulo, quedando libre el movimiento horizontal de ambos nudos. Por tanto, el grado de indeterminación cinemática se reduce de 8 a 4 por antisimetría.

2.6.2 Estructuras reticuladas

De forma análoga a lo hecho en estructuras articuladas, analizaremos sucesivamente el comportamiento de una estructura reticulada bajo cargas simétricas y antisimétricas. En ambos casos, las condiciones de equilibrio y compatibilidad que debe satisfacer la solución estructural tienen que respetar las condiciones de simetría (o antisimetría) del problema.

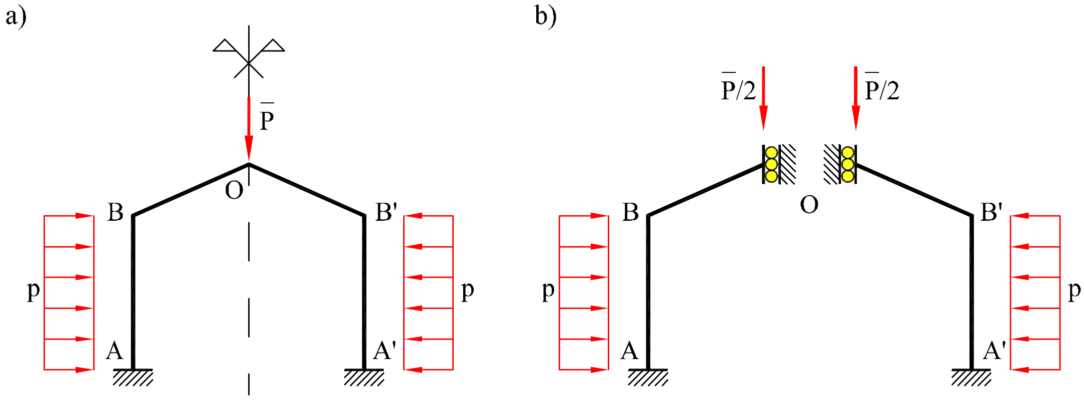


Fig. 2.25: Estructura reticulada simétrica con carga simétrica

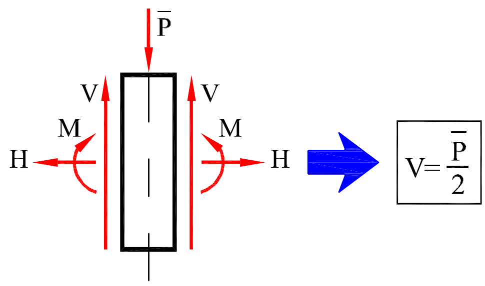


Fig. 2.26: Equilibrio de la rebanada central de la Figura 2.25

Carga simétrica

En la estructura de la Figura 2.25a sometida a carga simétrica, tanto las reacciones como las leyes de esfuerzos deben ser simétricas respecto al eje de simetría, esto reduce el grado de hiperestatismo.

Consideremos primero el equilibrio de la rebanada central, en el punto O, tal como se muestra en la Figura 2.26. La fuerza horizontal H y el momento M sobre dicha rebanada permanecen indeterminados, pero la fuerza vertical $V = \overline{F}/2$, queda determinada por equilibrio. En el caso de que sobre el punto O no actúe ninguna fuerza aplicada según el eje de simetría, será $V = 0$.

Por otra parte, las condiciones de simetría exigen que los movimientos de los nudos A y B sean simétricos de los de los nudos A' y B'; por su parte, tanto el movimiento horizontal como el giro del nudo O son nulos, quedando libre su movimiento vertical.

Todas estas consideraciones de simetría permiten simplificar el problema original, de tal forma que es posible resolver cualquiera de las medias estructuras de la Figura 2.25b. Obsérvese que en ellas el apoyo deslizante con giro impedido del nudo O es compatible con las condiciones de equilibrio y compatibilidad del nudo O de la estructura original. Desde el punto de vista estático, se ha reducido el grado de hiperestatismo de la estructura de 3 a 2; desde el punto de vista cinemático, la estructura sigue siendo 1 vez traslacional, pero se han reducido los giros incógnita de 3 a 1.

Carga antisimétrica

Consideremos ahora la misma estructura simétrica sometida a carga antisimétrica respecto al eje vertical. Tanto las reacciones como las leyes de esfuerzos deben ser antisimétricas respecto al eje de simetría; esto reduce, obviamente, el grado de hiperestatismo del problema (Figura 2.27a) . Asimismo, los movimientos de los nudos y la deformada de la estructura deben ser antisimétricos; esto reduce el grado de indeterminación cinemática.

Consideremos el equilibrio de la rebanada central, en el punto O, tal como se muestra en la Figura 2.28. La fuerza vertical V sobre dicha rebanada permanece indeterminada, pero la fuerza horizontal $H = \overline{F}/2$ y el momento $M = \overline{M}/2$ quedan determinados por equilibrio. En el caso de que sobre el punto O no actúe ninguna fuerza según el eje de simetría o momento exterior aplicados, será $H = 0$ y $M = 0$, respectivamente.

Por otra parte, las condiciones de antisimetría exigen que los movimientos de los nudos A y B sean iguales a los de los nudos A' y B'; por su parte, el movimiento vertical del nudo O es nulo, quedando libres tanto su movimiento horizontal como el giro.

Estas consideraciones de antisimetría permiten simplificar el problema original, de tal forma que es posible resolver cualquiera de las medias estructuras de la Figura 2.27b.

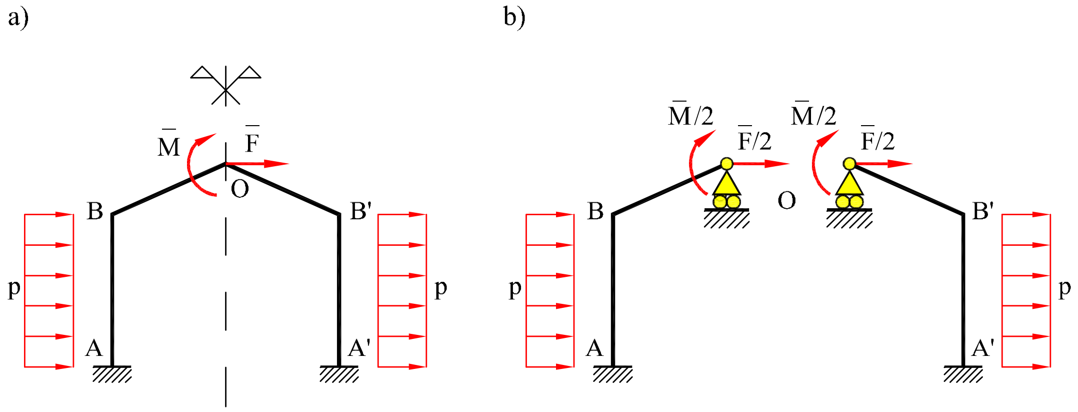


Fig. 2.27: Estructura reticulada simétrica con carga antisimétrica

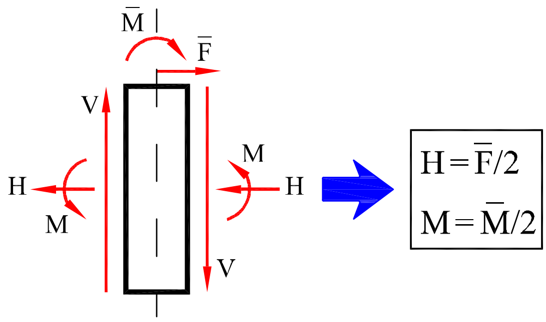


Fig. 2.28: Equilibrio en la rebanada central de la estructura de la Figura 2.27

Obsérvese que en ellas el apoyo deslizante con giro libre del nudo O es compatible con las condiciones de equilibrio y compatibilidad del nudo O de la estructura original. Desde el punto de vista estático, se ha reducido el grado de hiperestatismo de la estructura de 3 a 1; desde el punto de vista cinemático, la estructura sigue siendo 1 vez traslacional, pero se han reducido los giros incógnita de 3 a 2.

2.7 Movimientos y deformaciones impuestos

Con frecuencia, las estructuras se ven sometidas a acciones que no consisten en sistemas de fuerzas y momentos aplicados. Se pueden presentar, por ejemplo, dos tipos de situaciones de interés:

- *movimientos impuestos*, tales como desplazamientos y giros de apoyos, y
- *deformaciones impuestas*, que, a su vez, pueden ser debidas a:
  - *causas externas*, tales como variaciones térmicas ambientales, o
  - *causas internas*, tales como fuentes térmicas internas, variaciones de humedad y otros fenómenos físicos o químicos, pretensado, defectos de montaje, etc.

El comportamiento de las estructuras frente a este tipo de acciones depende fundamentalmente de si las estructuras son estáticamente determinadas o indeterminadas.

En las estructuras isostáticas las reacciones y leyes de esfuerzos pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio. Si no actúan sobre ellas sistemas de cargas aplicadas, las condiciones de equilibrio determinan que las recciones en los apoyos sean nulas. En consecuencia, las leyes de esfuerzos también son nulas. Se deduce de esto que las estructuras isostáticas pueden deformarse libremente bajo la acción de movimientos y deformaciones impuestos (que sean compatibles con sus condiciones de apoyo isostáticas), y que este proceso de deformación no produce reacciones exteriores ni esfuerzos interiores y, por lo tanto, no genera tensiones.

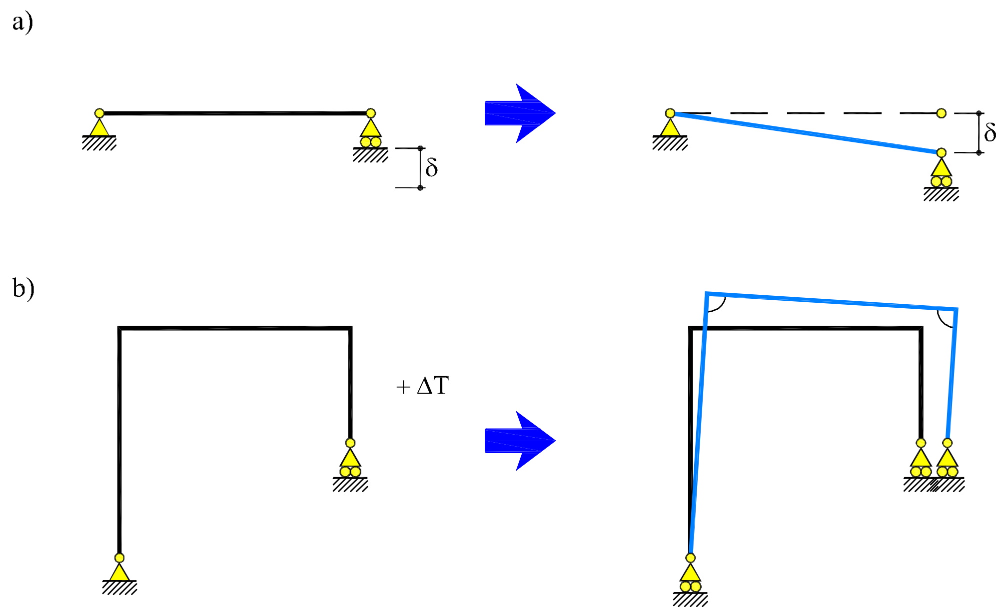


Fig. 2.29: Estructuras isostáticas con movimientos y deformaciones impuestos

Así, en la Figura 2.29 se muestran dos ejemplos de estructuras isostáticas sometidas a movimientos y deformaciones impuestos. En el primer caso, la viga biapoyada sufre un descenso del apoyo derecho. Como puede observarse, las articulaciones de sus extremos le permiten un movimiento de sólido rígido compatible con el descenso impuesto; este movimiento no genera reacciones ni esfuerzos en la pieza. En el segundo caso de la Figura 2.29 un pórtico isostático asimétrico sufre un incremento de temperatura uniforme. Aunque las longitudes de las piezas se alargan por efecto de la dilatación térmica, la sustentación isostática permite que la estructura sufra una homotecia y un giro de sólido rígido sin que se generen reacciones ni esfuerzos en la estructura.

Consideremos ahora el caso de las estructuras hiperestáticas. En ellas, el grado de indeterminación estática permite que existan sistemas de reacciones *autoequilibradas*, esto es, que satisfacen las ecuaciones de equilibrio, aun cuando no existan fuerzas ni momentos externos. Por otro lado, su grado de indeterminación cinemática exige que la deformación de la estructura cumpla determinadas condiciones de compatibilidad en los apoyos; en general, es necesario que aparezcan reacciones y esfuerzos para que la deformación por flexión satisfaga estas condiciones adicionales. En consecuencia, los movimientos y deformaciones impuestas generan tensiones en las estructuras hiperestáticas, pudiendo llegar a causar su colapso total o parcial.

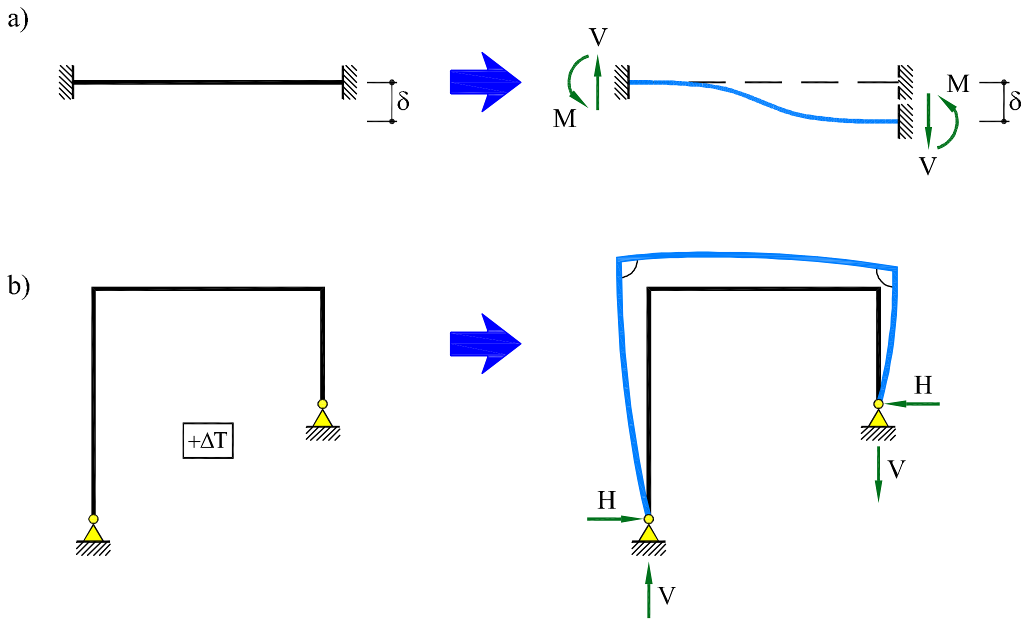


Fig. 2.30: Estructuras hiperestáticas con movimientos y deformaciones impuestos

Así, en la Figura 2.30 se muestran dos ejemplos de estructuras hiperestáticas sometidas a movimientos y deformaciones impuestos. En el primer caso, la viga biempotrada sufre un descenso del apoyo derecho. Como puede observarse, aparecen unos momentos en los extremos de la pieza que hacen posible que se cumpla la condición de giro nulo en los empotramientos; aparecen también unas reacciones verticales para que el sistema de reacciones hiperestáticas sea autoequilibrado. La viga queda sometida a una ley de flectores lineal y un esfuerzo cortante constante a lo largo de la pieza. Las tensiones normales y tangenciales debidas a estos esfuerzos pueden provocar la rotura de la pieza. En el segundo caso de la Figura 2.30, un pórtico hiperestático asimétrico sufre un incremento de temperatura uniforme. Es necesaria la aparición de las reacciones horizontales en los apoyos para evitar el movimiento horizontal de éstos; las reacciones verticales aparecen por equilibrio. Las tres barras de la estructura están sometidas a flexión simple, lo cual genera en ellas las correspondientes tensiones normales y tangenciales.

Los métodos de resolución de estructuras hiperestáticas deben permitir resolver satisfactoriamente los casos de movimientos y deformaciones impuestos, dado que este tipo de acciones es habitual en todo tipo de estructuras.

2.8 Métodos de análisis de estructuras

Los cursos de Resistencia de Materiales y Mecánica de Estructuras comienzan, invariablemente, instruyendo al alumno en la resolución de estructuras isostáticas y, en particular, demostrando cómo se calculan las reacciones exteriores y las leyes de esfuerzos. Se muestra, a continuación, cómo a partir de los esfuerzos se pueden calcular las distribuciones de tensiones que actúan sobre las secciones de las diferentes piezas de la estructura. Se muestra, también, cómo los esfuerzos causan la deformación de las rebanadas y esto da lugar a la deformación de las piezas y, por ende, a los movimientos de la estructura.

Este procedimiento de resolución se muestra en el esquema de la Figura 2.31. Se observa que el proceso secuencial consiste en, a partir de la geometría de la estructura y de la definición de las acciones:

1. cálculo de reacciones, estableciendo las condiciones de equilibrio de la estructura,
2. cálculo de esfuerzos, a partir de condiciones de equilibrio de las piezas,
3. cálculo de la deformación de las piezas, a partir de condiciones de compatibilidad en las barras y
4. cálculo de movimientos en la estructura, a partir de condiciones de compatibilidad en apoyos y enlaces.

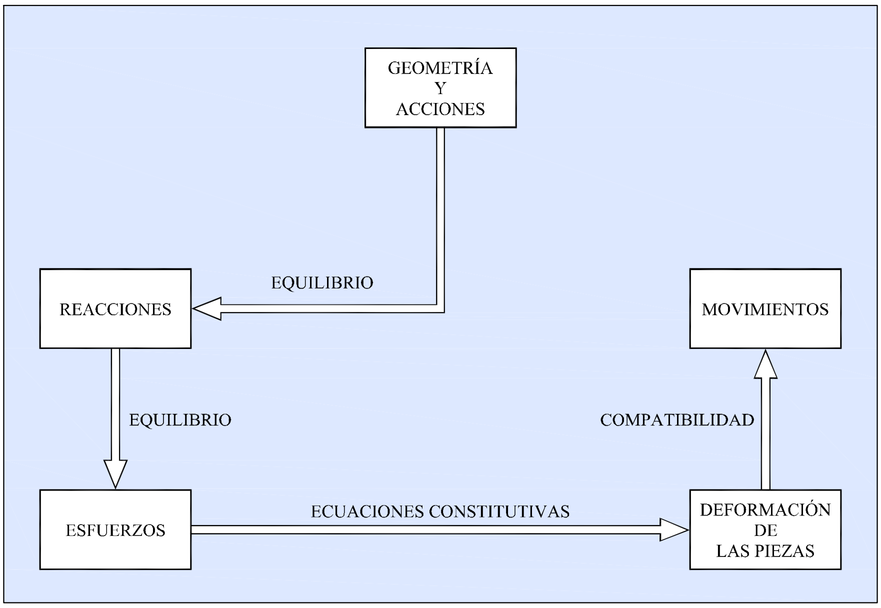


Fig. 2.31: Esquema de resolución de estructuras isostáticas

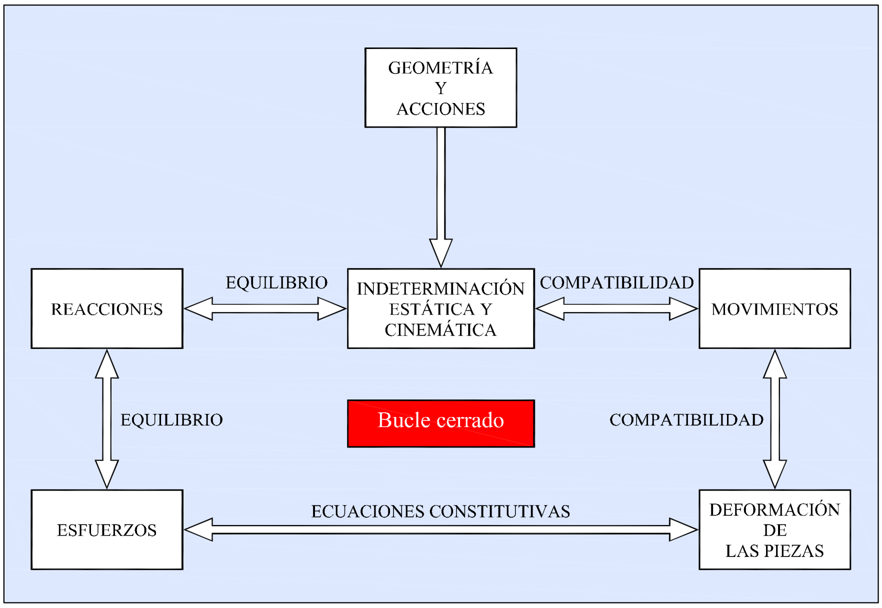


Fig. 2.32: Esquema de resolución de estructuras hiperestáticas

No es posible aplicar directamente este proceso a la resolución de estructuras hiperestáticas, en las que es necesario considerar *conjuntamente* las condiciones de equilibrio y compatibilidad, dado el grado de indeterminación estática y cinemática que tienen estas estructuras. En el esquema de la Figura 2.32 se muestra cómo la imposibilidad de resolver *a priori* la indeterminación estática, o bien la cinemática, produce un "bucle" cerrado en el cual es imposible proceder de forma secuencial. Esta dificultad se resuelve de dos maneras alternativas, dando lugar al *método de flexibilidad* y al *método de rigidez*, que se describen a continuación.

2.8.1 El Método de Flexibilidad

El método de flexibilidad se basa en un planteamiento intuitivo y fácil de entender. Básicamente, consiste en transformar la estructura hiperestática en otra isostática a base de suprimir los apoyos (o enlaces) redundantes y sustituirlos por fuerzas (o esfuerzos) incógnita. El número de incógnitas del problema es, pues, igual al grado de hiperestatismo del problema.

Es obvio que el hecho de suprimir estos apoyos (o enlaces) implica liberar, en principio, ciertas condiciones de compatibilidad que debe satisfacer la deformación de la estructura original. A la estructura resultado de este proceso se le llama *isostática base*; sobre ella se pueden satisfacer las necesarias condiciones de equilibrio *a priori* y, por lo tanto, puede ser resuelta siguiendo el esquema de la Figura 2.32. En particular, se podrán expresar los movimientos de la estructura en función de las incógnitas hiperestáticas. Por tanto, se pueden imponer *a posteriori* las condiciones de compatibilidad, anteriormente liberadas. Esto proporciona el número de ecuaciones necesarias para resolver las incógnitas hiperestáticas. Una vez obtenidas éstas, se tiene resuelta la estructura.

Este procedimiento de resolución se muestra en el esquema de la Figura 2.33. Se observa que el proceso secuencial consiste en, a partir de la geometría de la estructura y de la definición de las acciones:

1. definir la estructura isostática base, seleccionando las incógnitas hiperestáticas y liberando las correspondientes condiciones de compatibilidad,

2. resolver la estructura isostática base, en función de las incógnitas hiperestáticas, y satisfaciendo las condiciones de equilibrio,

3. determinar las incógnitas hiperestáticas, imponiendo las necesarias condiciones de compatibilidad,

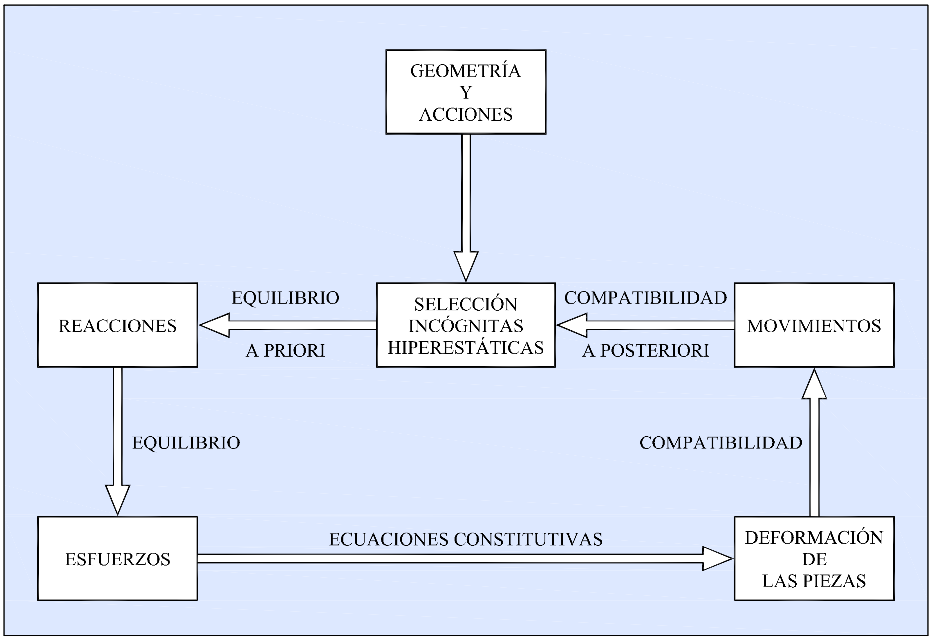


Fig. 2.33: Resolución de estructuras hiperestáticas por el método de flexibilidad

4. determinar las reacciones, esfuerzos y movimientos en la estructura hiperestática original.

Se puede decir que el método de flexibilidad resuelve el "bucle" de la Figura 2.32 a base de recorrerlo, en el sentido antihorario, en dos iteraciones, una antes de determinar las incógnitas hiperestáticas y otra después de haberlo hecho.

El método de flexibilidad fue propuesto y utilizado por primera vez por Louis Navier en 1826. Fue utilizado intensamente durante el siglo XIX, la época de expansión del ferrocarril, en el análisis de arcos, vigas continuas y estructuras articuladas hiperestáticas. Recibe este nombre porque los coeficientes que aparecen al plantearlo son de flexibilidad. También se le llama de *método de compatibilidad*, porque las ecuaciones que se plantean para resolver el problema son ecuaciones de compatilibilidad, y *método de las fuerzas*, dado que las incógnitas hiperestáticas seleccionadas para resolver el problema son fuerzas (o momentos) hiperestáticos.

Dado que hay que plantear y resolver tantas ecuaciones de compatibilidad como incógnitas hiperestáticas hay en el problema, este método es adecuado para estructuras con bajo grado de hiperestatismo. Su principal desventaja consiste en que la forma de seleccionar las incógnitas hiperestáticas de un problema dado no es única y esto

dificulta un planteamiento sistemático del método. Esto lo hace poco adecuado para el cálculo de estructuras por ordenador.

Ejemplo 2.8.1.1

La estructura de la Figura 2.34, está formada por tres muelles lineales de idéntica rigidez k que soportan una placa rígida. Utilizando el método de flexibilidad se pretende determinar la fuerza que soporta cada muelle si sobre la placa actúa una fuerza P excéntrica.

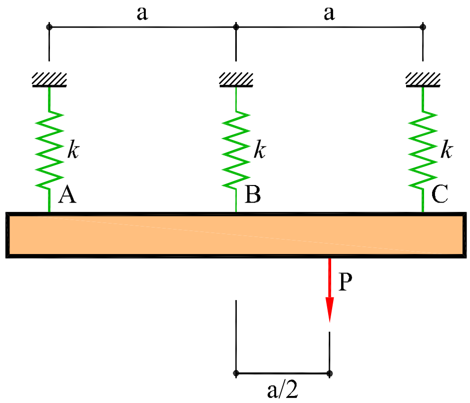


Fig. 2.34: Estructura del Ejemplo 2.8.1.1

Llamando F_1, F_2 y F_3 a las fuerzas que soporta cada uno de los muelles, las dos ecuaciones de equilibrio estático aplicables son:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= F_1 + F_2 + F_3 - P &= 0 \\ \sum M_A &= aF_2 + 2aF_3 - \frac{3}{2}aP &= 0 \end{aligned}$$

Se tienen tres incógnitas y sólo dos ecuaciones de equilibrio; el problema es una vez hiperestático. Se elige como fuerza redundante a F_2 (Figura 2.35a). Las ecuaciones de equilibrio en función de P y F_2 pueden reescribirse:

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 &= P - F_2 \\ 2F_3 &= \frac{3}{2}P - F_2 \end{aligned}$$

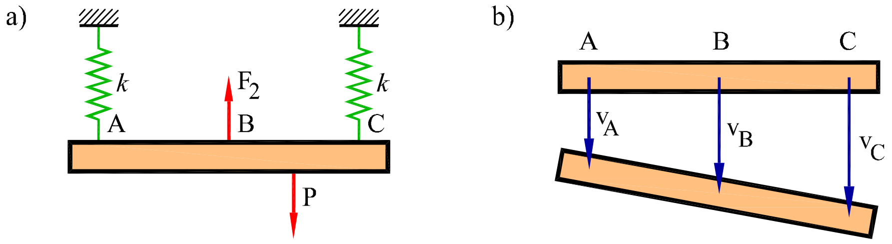


Fig. 2.35: Estructura isostática base y desplazamientos del Ejemplo 2.8.1.1

Por otra parte, usando las relaciones fuerza-desplazamiento en los muelles 1 y 3, es posible calcular sus alargamientos y los desplazamientos verticales en A y C:

$$
\begin{aligned}
v_A &= \frac{F_1}{k} = \frac{P}{4k} - \frac{F_2}{2k} \\
v_C &= \frac{F_3}{k} = \frac{3P}{4k} - \frac{F_2}{2k}
\end{aligned}
$$

La ecuación adicional necesaria para determinar F_2 y resolver el problema se obtiene considerando los movimientos de la estructura y como el desplazamiento de B es único (Figura 2.36), se tiene:

$$v_B^{placa} = v_B^{muelle} \tag{2.15}$$

Como la placa es rígida:

$$v_B^{placa} = \frac{v_A + v_C}{2} = \frac{P}{2k} - \frac{F_2}{2k}$$

Por otro lado, el desplazamiento vertical de B es igual al alargamiento del muelle

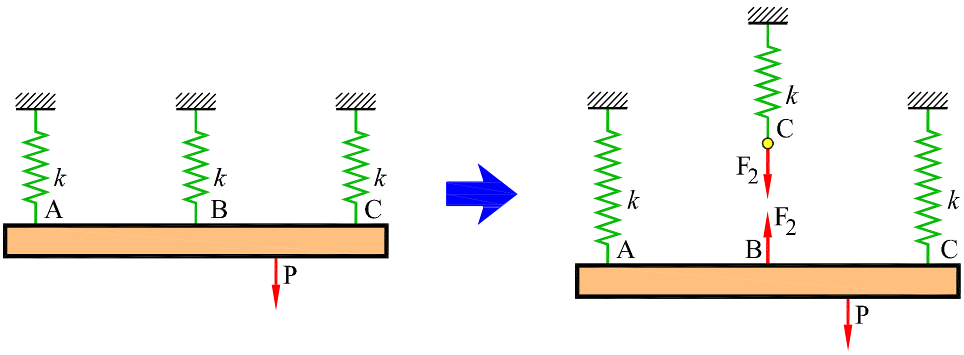


Fig. 2.36: Condición de compatibilidad del Ejemplo 2.8.1.1

central:

$$v_B^{muelle} = \frac{F_2}{k}$$

La condición (2.15) puede escribirse:

$$\frac{P}{2k} - \frac{F_2}{2k} = \frac{F_2}{k} \qquad \Rightarrow \qquad F_2 = \frac{P}{3}$$

Nótese que los coeficientes $1/k$ son de *flexibilidad*, lo que motiva el nombre del método. Por otra parte, la Ec. (2.15) es de *compatibilidad* y la incógnita F_2 es una *fuerza*.

Una vez conocida la incógnita hiperestática, las fuerzas en los otros muelles son:

$$F_1 = \frac{P}{12} \qquad\qquad F_3 = \frac{7P}{12}$$

La elección de F_2 como redundante es arbitraria. El problema puede resolverse de manera análoga tomando cualquiera de las otras dos fuerzas como incógnita hiperestática.

2.8.2 El Método de Rigidez

El método de rigidez es un método general de análisis de estructuras, ya que puede aplicarse también para resolver estructuras isostáticas. Básicamente, el método consiste en identificar el número de movimientos incógnita que determinan la deformación de la estructura, satisfaciendo *a priori* las condiciones de compatibilidad de movimientos en los nudos de la estructura. El número de incógnitas del problema es, pues, igual al grado de indeterminación cinemática del problema. De forma general, éstas son los giros y desplazamientos de los nudos, aunque consideraciones adicionales de compatibilidad pueden reducir el número de incógnitas.

Es obvio que el hecho de elegir estas incógnitas implica liberar, en principio, ciertas condiciones de equilibrio que deben satisfacerse en los nudos de la estructura original. Imponiendo ahora las condiciones de compatibilidad en las piezas individuales, éstas están cinemáticamente determinadas; por tanto, se pueden calcular, en función de las incógnitas cinemáticas, los esfuerzos que actúan sobre las barras y, en particular, los valores de éstos en los extremos de las piezas. Entonces, se pueden imponer *a posteriori* las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos en los nudos en que concurren diferentes barras y en los apoyos. Esto proporciona el número de ecuaciones necesarias para resolver las incógnitas cinemáticas. Una vez obtenidas éstas, se tiene resuelta la estructura.

Este procedimiento de resolución se muestra en el esquema de la Figura 2.37. Como se observa, el proceso secuencial consiste en, a partir de la geometría de la estructura y de la definición de las acciones:

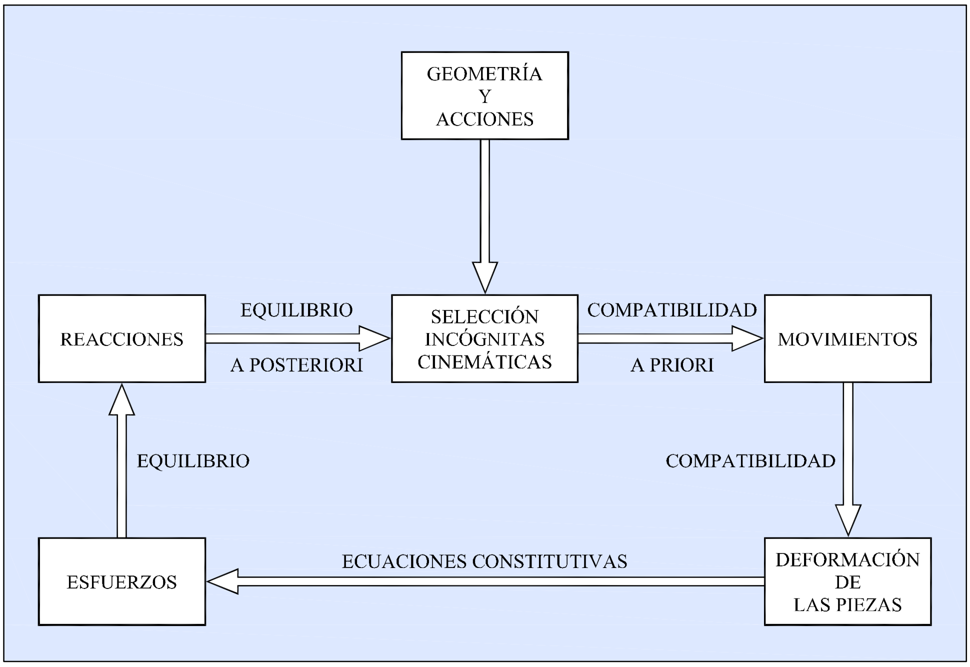


Fig. 2.37: Resolución de estructuras hiperestáticas por el método de rigidez

1. identificar el número *mínimo* de movimientos incógnita que determinan la deformación de la estructura, a base de considerar las correspondientes condiciones de compatibilidad en los nudos,
2. resolver las piezas individuales, en función de las incógnitas cinemáticas, a base de satisfacer las condiciones de compatibilidad en las piezas,
3. determinar las incógnitas cinemáticas, a base de imponer las necesarias condiciones de equilibrio en los nudos,
4. determinar los movimientos, esfuerzos y reacciones en la estructura.

Se puede decir que el método de rigidez resuelve el "bucle" de la Figura 2.32 a base de recorrerlo, en el sentido horario, en dos iteraciones, una antes de determinar las incógnitas cinemáticas y otra después de haberlo hecho.

El método de rigidez fue propuesto y utilizado por primera vez por Axel Bendisen en 1914. Recibe este nombre porque los coeficientes que aparecen en las ecuaciones que se plantean son de rigidez. Se le conoce también con los nombres de *método de los movimientos*, dado que las incógnitas seleccionadas para resolver el problema son los

movimientos de los nudos, y *método de equilibrio* ya que las ecuaciones que se plantean para resolver el problema son ecuaciones de equilibrio.

Dado que hay que plantear y resolver tantas ecuaciones de equilibrio como incógnitas cinemáticas hay en el problema, este método es adecuado para estructuras con bajo grado de traslacionalidad. De hecho, existen diferentes versiones simplificadas para resolver estructuras intraslacionales. Su principal ventaja consiste en que la forma de seleccionar las incógnitas cinemáticas de un problema dado es única y esto permite un planteamiento sistemático del método. Esto lo hace idóneo para el cálculo de estructuras por ordenador.

Ejemplo 2.8.2.1

La estructura de la Figura 2.38a, está formada por tres muelles lineales de idéntica rigidez k que soportan una placa rígida. Utilizando el método de rigidez se pretende determinar la fuerza que soporta cada muelle si sobre la placa actúa una fuerza P excéntrica.

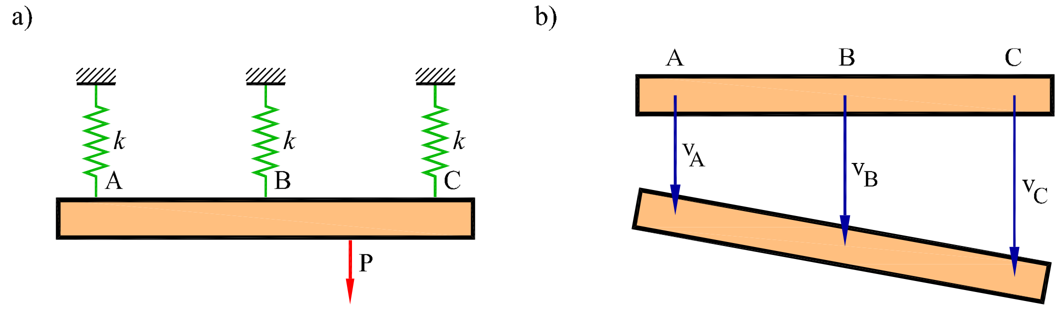


Fig. 2.38: (a) Estructura del Ejemplo 2.8.2.1 (b) desplazamientos

Los movimientos de la estructura son v_A, v_B y v_C (Figura 2.38b). Sólo dos de ellos son independientes ya que la placa es rígida. Para que se cumpla la condición de compatibilidad, es decir, deformación de placa rígida, debe ser:

$$v_B - v_A = v_C - v_B \qquad \Rightarrow \qquad v_B = \frac{v_A + v_C}{2}$$

Por otra parte, las relaciones fuerza-desplazamiento para los tres muelles son:

$$F_1 = kv_A \qquad F_2 = kv_B \qquad F_3 = kv_C$$

Las ecuaciones de equilibrio del problema son:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= F_1 + F_2 + F_3 &&= P \\ \sum M_A &= aF_2 + 2aF_3 &&= \frac{3}{2}aP \end{aligned} \tag{2.16}$$

Si se expresan las fuerzas en función de los desplazamientos, y se elimina v_B, se tiene:

$$\begin{aligned} kv_A + k\left(\frac{v_A + v_C}{2}\right) + kv_C &= P \\ k\left(\frac{v_A + v_C}{2}\right) + kv_C &= \frac{3}{2}P \end{aligned}$$

Nótese que los coeficientes k son de *rigidez,* lo que motiva el nombre del método. Por otra parte, las Ecs. (2.16) son de *equilibrio* y las incógnitas v_A y v_C son *movimientos.* Operando se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} v_A \quad + v_C \quad &= \frac{2P}{3k} \\ v_A \quad + 5v_C \quad &= \frac{3P}{k} \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$v_A = \frac{P}{12k} \qquad v_C = \frac{7P}{12k}$$

Por tanto:

$$v_B = \left(\frac{v_A + v_C}{2}\right) = \frac{4P}{12k}$$

Las fuerzas en los muelles en función de los desplazamientos, son:

$$F_1 = kv_A = \frac{P}{12} \qquad F_2 = kv_B = \frac{4P}{12} \qquad F_3 = kv_C = \frac{7P}{12}$$

El problema se ha resuelto mediante la imposición de dos ecuaciones de equilibrio, ya que la estructura tiene dos desplazamientos independientes.

Los resultados obtenidos son idénticos a los del Ejemplo 2.8.1.1, donde se ha resuelto la estructura aplicando el método de flexibilidad, ya que la solución del problema es única.

Puede comprobarse en este ejemplo ilustrativo que los dos métodos alternativos pueden considerarse como métodos duales o recíprocos, tal como se había indicado en los esquemas de las Figuras 2.33 y 2.37.

Los métodos de flexibilidad y de rigidez aplicados a la resolución de estructuras de barras se abordarán en detalle en los Capítulos 6 y 7 de este Libro.

3 Esfuerzos y Movimientos

3.1 Introducción

La Resistencia de Materiales trata fundamentalmente del estudio de la distribución de tensiones que aparece en una pieza de directriz recta (o de pequeña curvatura), cuando sobre ella actúan cargas que dan lugar a la aparición de los distintos esfuerzos posibles sobre las secciones rectas de la pieza. Determinar el estado tensional permite establecer las condiciones de *resistencia* de las piezas y estructuras. La satisfacción de estrictas condiciones de seguridad en "estados últimos", bajo la acción de cargas mayoradas, es una exigencia común de las normas de diseño estructural y es la base del llamado *cálculo en rotura.*

Sin embargo, el diseño de las estructuras viene muchas veces determinado por su grado de *rigidez,* más que por su *resistencia.* A menudo, las normas de diseño de elementos estructurales fijan las deformaciones máximas o *deformaciones admisibles* que pueden aceptarse en dichos elementos en "estados de utilización", bajo la acción de cargas de servicio. Ésta es la base del llamado *cálculo en servicio,* ya que los motivos para establecer estas limitaciones en los desplazamientos y giros de las estructuras son variados y dependen mucho del tipo de estructura y de su importancia y responsabilidad, pero suelen responder a criterios de *funcionalidad, mantenimiento o estética.*

En cualquier caso, la consideración de "estados límites de utilización" sobre deformaciones admisibles es, en muchas ocasiones, crítica en el diseño, y obliga a proyectar las estructuras para conseguir una rigidez determinada. En tales casos, el cálculo de resistencia, es decir, la consideración de "estados límites últimos", se realiza *a posteriori.*

Además, tal como se explicó en el Capítulo anterior y como se demostrará en los Capítulos siguientes, el cálculo de estructuras hiperestáticas precisa de la consideración expresa de los movimientos y deformaciones de la estructura, ya que éstas no pueden resolverse exclusivamente en base a las consideraciones de equilibrio.

De lo dicho anteriormente se desprende que es necesario disponer de métodos de cálculo para evaluar movimientos (desplazamientos y giros) en estructuras. Se tratará en este Capítulo de las relaciones existentes entre esfuerzos y movimientos en estructuras articuladas y reticuladas de plano medio. Nos centraremos en los llamados *métodos diferenciales* de cálculo de movimientos, basados en las relaciones diferenciales derivadas del estudio de la flexión. En Los Capítulos 4 y 5 se tratarán los llamados *métodos integrales*, basados en los conceptos de trabajo y energía de deformación, respectivamente.

3.2 Movimientos en estructuras articuladas y reticuladas

Dentro de las estructuras de barras, hemos distinguido entre estructuras articuladas y reticuladas, según el tipo de unión de las barras que las componen.

Así, *la estructura articulada* está formada por un ensamblaje de piezas unidas mediante *nudos articulados* (Figura 3.1a). Las barras trabajan fundamentalmente a esfuerzo axil, que, si las fuerzas se aplican en los nudos, es constante en cada barra. El análisis de movimientos para este tipo de estructuras, por tanto, se reduce al efecto de los alargamientos o acortamientos debidos al axil (Figura 3.1b).

La *estructura reticulada* está formada por piezas prismáticas unidas entre sí mediante *nudos rígidos*; trabaja fundamentalmete a flexión y en algunos casos a torsión. Salvo casos particulares, en este tipo de estructura de barras las deformaciones y movimientos debidos a los esfuerzos axiles y cortantes es mucho menos importante, en términos relativos, que la debida a los momentos flectores y torsores. En el cálculo manual es habitual despreciar el efecto de la deformación por axiles y cortantes.

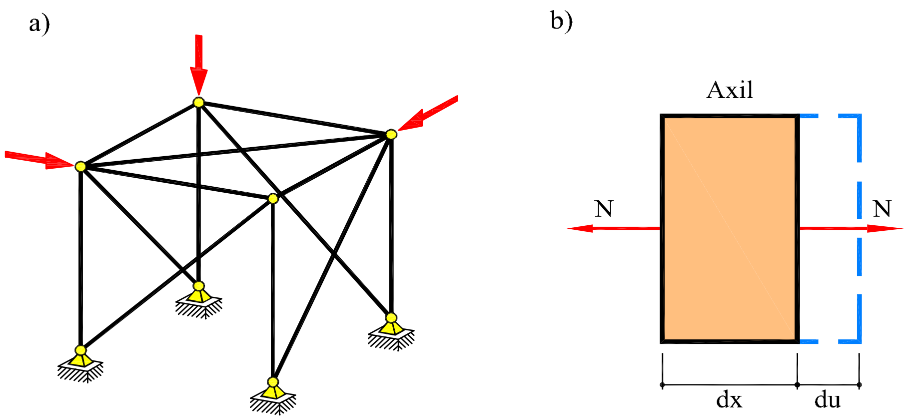


Fig. 3.1: (a) Estructura articulada (b) deformación por axil

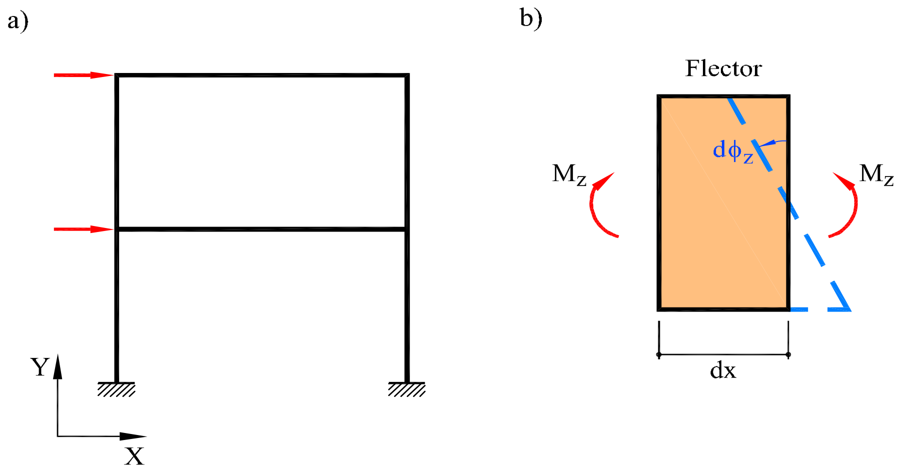


Fig. 3.2: (a) Estructura reticulada de plano medio (b) deformación por flexión

Si la estructura reticulada es de *plano medio* (Figura 3.2a), las piezas trabajan a flexión compuesta recta, por razones de simetría. En este tipo de estructuras, salvo casos particulares, las deformaciones y movimientos se deben fundamentalmente a los momentos flectores (Figura 3.2b), de mayor importancia en términos relativos que los producidos por los esfuerzos axiles y cortantes.

3.3 Movimientos en sistemas globales y locales

Para definir la geometría de una estructura (coordenadas de los nudos) se precisa de un sistema de referencia. También se precisa de sistemas de referencia adecuados para referir a ellos los movimientos de los nudos y las fuerzas actuantes sobre éstos.

3.3.1 Definición de los sistemas globales y locales

El *sistema global de referencia* se usa para referir a él la geometría de la estructura, las fuerzas actuantes y los movimientos incógnita. En general, el sistema global es un sistema en un espacio tridimensional (X, Y, Z). En lo que sigue, denominaremos a este sistema (X, Y) y lo usaremos en estructuras articuladas y reticuladas planas (Figura 3.3).

El *sistema local de referencia* para cada pieza (x, y, z) se usa para referir a él, en determinados casos, los esfuerzos o movimientos vinculados a la pieza. En lo que sigue, y refiriéndonos a estructuras planas, denominaremos a este sistema (x_i, y_i), donde i

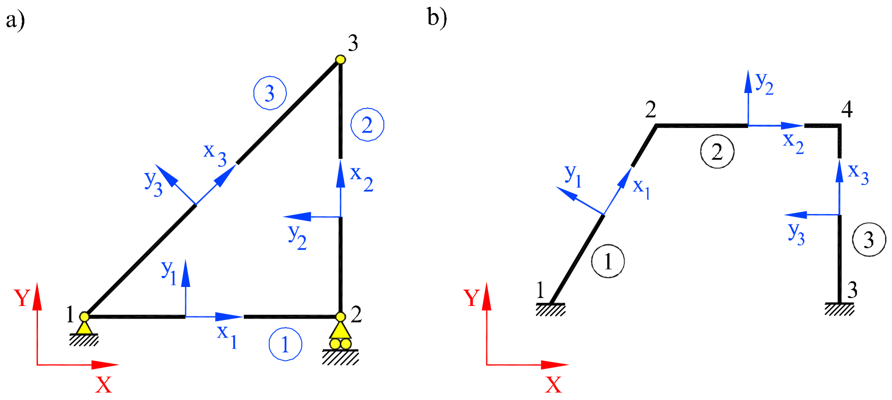


Fig. 3.3: Sistemas de referencia global y locales. (a) articuladas (b) reticuladas

indica la pieza en la que se define el correspondiente sistema local (Figura 3.3). El eje x_i tiene la dirección de la directriz de la pieza; el eje y_i es perpendicular al x_i.

3.3.2 Transformación de sistemas de referencia

A menudo es necesario transformar los vectores que representan las fuerzas o los movimientos del sistema global a los sistemas locales, y viceversa.

Sea $\boldsymbol{U} = (U, V)$ un vector expresado en el sistema global (X, Y) y sea $\boldsymbol{u} = (u, v)$ el mismo vector expresado en un sistema local (x, y). Sea α el ángulo que forman entre sí ambos sistemas de ejes (Figura 3.4).

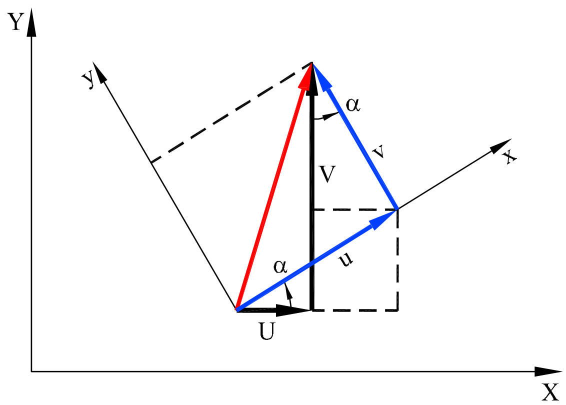


Fig. 3.4: Transformación de sistemas de referencia

Las correspondientes transformaciones son:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

o en forma compacta:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{U}$$

Las matrices de transformación $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{T}^T$ son ortogonales.

3.4 Deformación por axil

En una pieza recta solicitada por esfuerzo axil, una rebanada sufre una deformación tal como indica la Figura 3.1b.

Al mantenerse las secciones planas y paralelas entre sí, todas las fibras se deforman paralelas al eje de la pieza y sufren una deformación longitudinal idéntica, de valor:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = u' = \frac{N(x)}{EA(x)} \tag{3.1}$$

La variación de longitud total de una pieza solicitada a axil, el alargamiento o el acortamiento, se obtiene por integración de las deformaciones longitudinales sobre todas las rebanadas:

$$\delta = \int_l \varepsilon_x(x)dx = \int_l \frac{N(x)}{EA(x)}dx \tag{3.2}$$

Si la sección es constante y la ley de esfuerzos axiles es uniforme (Figuras 3.5a y b), el alargamiento total es:

$$\delta = \frac{Nl}{EA} = \frac{N}{k} \tag{3.3}$$

donde $k = EA/l$ es la rigidez de la pieza a esfuerzo axil.

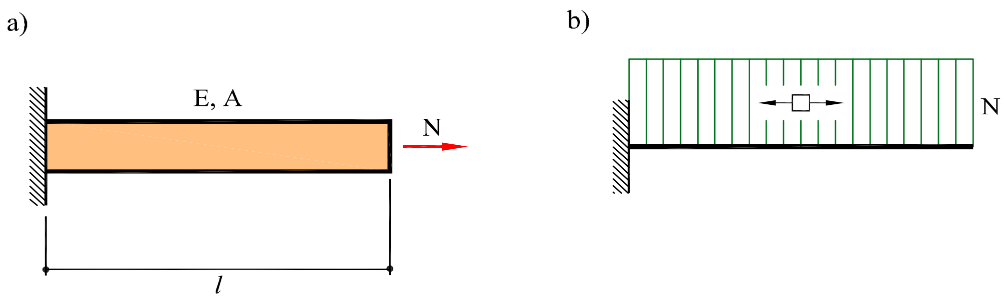


Fig. 3.5: (a) Pieza de sección constante (b) ley de axiles uniforme

Ejemplo 3.4.1

Calcular el alargamiento total de una pieza de sección constante A y longitud l, sometida a la acción de su peso propio Q uniformemente repartido (Figura 3.6a).

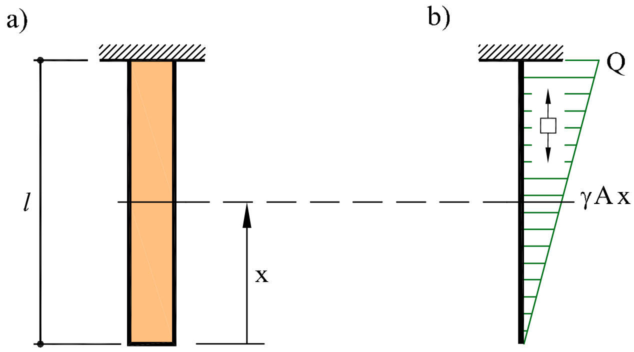


Fig. 3.6: (a) Pieza del Ejemplo 3.4.1 (b) ley de axiles

El esfuerzo axil varía linealmente (Figura 3.6b) desde el extremo inferior (nulo) hasta el empotramiento (valor máximo). Si $\gamma = Q/Al$ es el peso específico del material de la pieza, la ley de variación del esfuerzo axil puede expresarse por:

$$N(x) = \gamma A x$$

De acuerdo a la Ec.(3.2), el alargamiento total de la pieza debido a su peso propio es:

$$\delta = \int_l \frac{N(x)}{EA} dx = \int_l \frac{\gamma x dx}{E} = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Ql}{2EA}$$

Ejemplo 3.4.2

Calcular el alargamiento total de una barra de acero de sección variable, sometida a una carga aplicada en su extremo libre de valor P (Figura 3.7).
Datos: $l_1 = 2\,\text{m}$, $l_2 = 1\,\text{m}$, $A_1 = 3A_2 = 6\,\text{cm}^2$, $P = 30\,\text{kN}$ y $E = 200$ GPa.

La barra está traccionada con un axil de valor $N = P = 30\,\text{kN}$, constante en todas

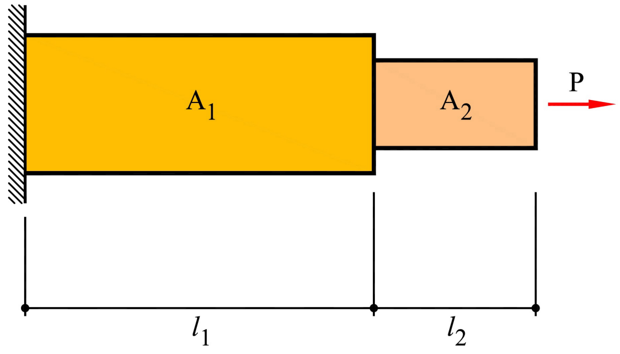


Fig. 3.7: Barra de acero del Ejemplo 3.4.2

las secciones. El alargamiento total de la barra puede calcularse mediante la Ec.(3.2):

$$\begin{aligned}\delta &= \int_l \frac{N(x)}{EA(x)}dx = \int_0^{l_1} \frac{Ndx}{EA_1} + \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{Ndx}{EA_2} \\ &= \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 2}{200 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} + \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1}{200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 1,25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

3.5 Movimientos en estructuras articuladas planas

Conocidos los alargamientos de las barras que forman una estructura articulada, se pueden calcular los movimientos de los nudos considerando que las diferentes piezas pueden deformarse y girar, pero manteniendo la compatibilidad de desplazamientos en los nudos articulados, y respetando las condiciones cinemáticas impuestas por los apoyos.

Ejemplo 3.5.1

La estructura ACB está formada por dos barras del mismo material y secciones transversales de áreas A_1 y A_2. Para una carga P actuando según se indica (Figura 3.8a), determinar los axiles en las barras y el desplazamiento del nudo C.
Datos: $L = 3\,\mathrm{m}$, $\alpha = 30\,°$, $A_1 = 5\,\mathrm{cm}^2$, $A_2 = 10\,\mathrm{cm}^2$, $P = 40\,\mathrm{kN}$ y $E = 200$ GPa.

La estructura es isostática y los axiles en las barras 1 y 2 pueden calcularse por equilibrio

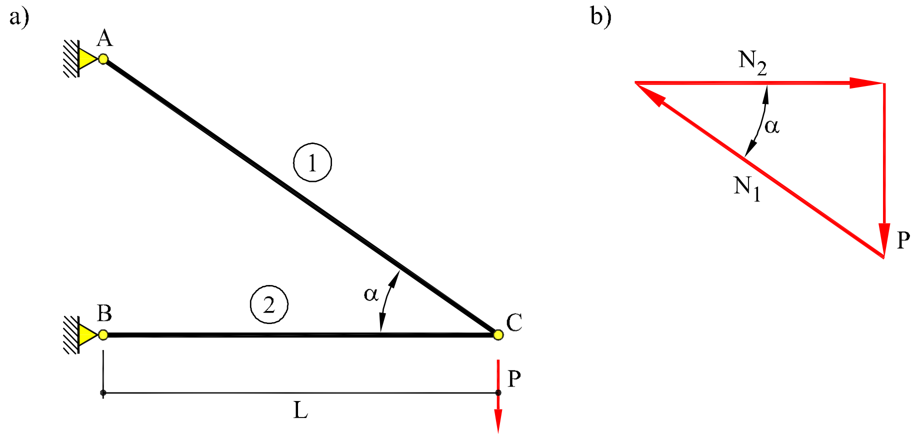


Fig. 3.8: (a) Estructura del Ejemplo 3.5.1 (b) axiles en las barras

de fuerzas en C (Figura 3.8b):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{P}{\sin\alpha} &&= 80\,\text{kN} && \text{(tracción)} \\ N_2 &= -\frac{P}{\tan\alpha} &&= -69,3\,\text{kN} && \text{(compresión)} \end{aligned}$$

El alargamiento correspondiente a cada barra es:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{N_1 L_1}{EA_1} &&= \frac{PL}{\sin\alpha\cos\alpha EA_1} &&= 0,277\cdot 10^{-2}\,\text{m} && \text{(alargamiento)} \\ \delta_2 &= \frac{|N_2|\,L_2}{EA_2} &&= \frac{PL}{\tan\alpha EA_2} &&= 0,104\cdot 10^{-2}\,\text{m} && \text{(acortamiento)} \end{aligned}$$

donde L_i es la longitud de la barra i. Conocidos los alargamientos que sufren las barras, puede construirse el correspondiente diagrama de desplazamientos (Figura 3.9a). A esta construcción gráfica se le llama diagrama de Williot (1877) y, en diferentes versiones, fue una herramienta fundamental del cálculo de estructuras durante más de 100 años.

La barra 1 se alarga hasta C''' y gira alrededor del nudo A, la barra 2 se acorta hasta C'' y gira alrededor del nudo B. Los desplazamientos de C se determinan resolviendo el polígono cerrado de Williot (Figura 3.9b).

El desplazamiento horizontal de C es, directamente:

$$u_C = \delta_2 = 0,104\cdot 10^{-2}\,\text{m}$$

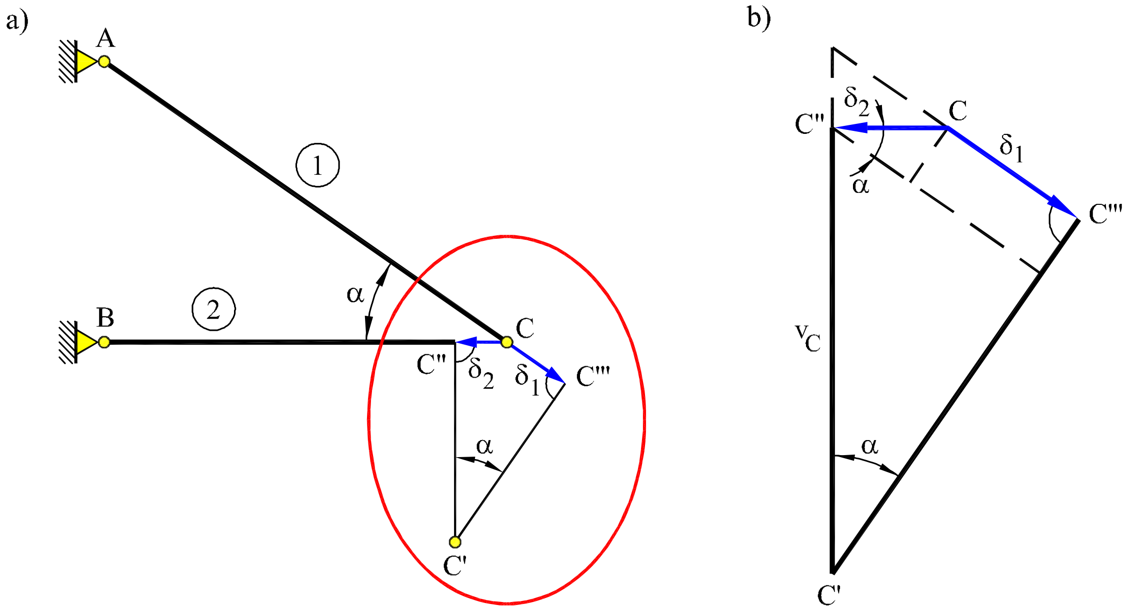


Fig. 3.9: (a) Desplazamiento del nudo C (b) detalle del diagrama de Williot

El desplazamiento vertical de C, $v_C = \overline{C''C'}$ se obtiene proyectando dicho desplazamiento sobre la línea paralela a $\overline{CC'''}$ que pasa por C'' (Figura 3.9b), resultando:

$$v_C = \frac{\delta_1 + \delta_2 \cos\alpha}{\sin\alpha} = 0,734 \cdot 10^{-2}\,\text{m} \quad (\downarrow)$$

Ejemplo 3.5.2

La estructura articulada de la Figura 3.10a está formada por cinco barras del mismo material y secciones transversales iguales de área A. Para una fuerza horizontal F actuando según se muestra, determinar los axiles en las barras y el desplazamiento del nudo B.
Datos: $a = 4\,\text{m}$, $A = 5\,\text{cm}^2$, $F = 10\,\text{kN}$ y $E = 200$ GPa.

Por equilibrio, las reacciones en los apoyos son (Figura 3.10b):

$$H_C = F \qquad V_C = F \qquad V_D = F$$

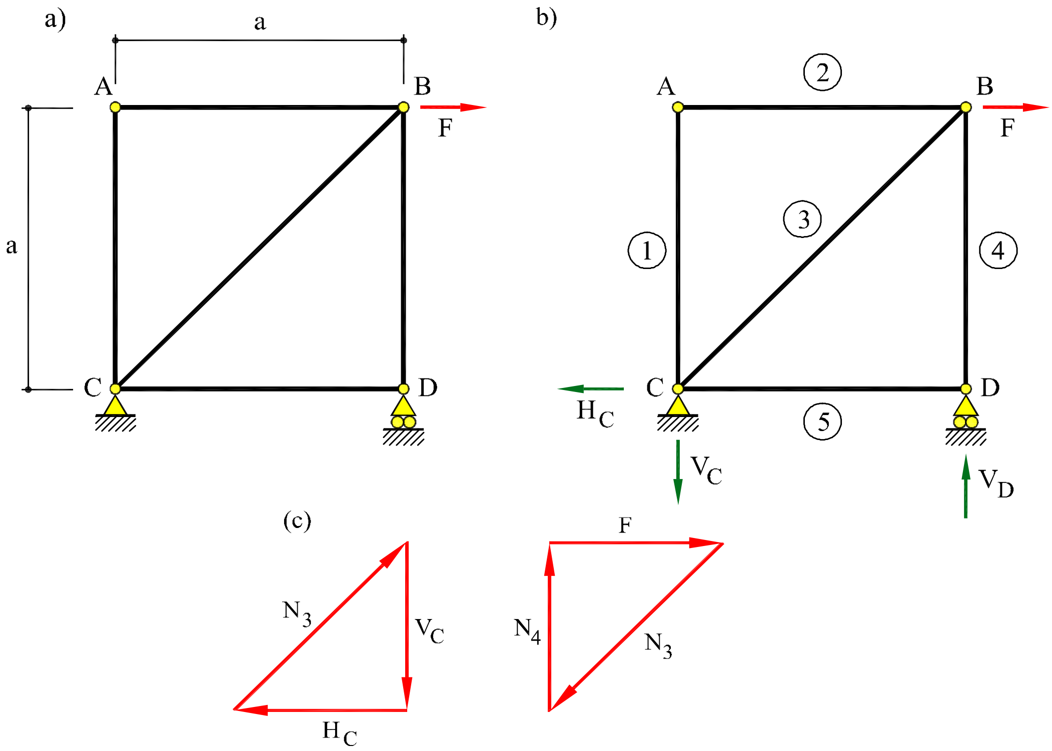


Fig. 3.10: (a) Estructura del Ejemplo 3.5.2 (b) reacciones (c) axiles

Los axiles pueden calcularse considerando el equilibrio de fuerzas en los nudos:

$$
\begin{array}{llll}
\text{nudo } D & \Rightarrow & N_4 = -F & N_5 = 0 \\
\text{nudo } C & \Rightarrow & N_1 = 0 & N_3 = \sqrt{2}F \\
\text{nudo } A & \Rightarrow & N_2 = 0 &
\end{array}
$$

Los signos positivo y negativo, corresponden a esfuerzos axiles de tracción y compresión, respectivamente (Figura 3.10c).

Las únicas barras que sufren variación de longitud son las barras 3 y 4, las restantes no modifican su longitud porque sus axiles son nulos. Los alargamientos correspondientes son:

$$
\begin{array}{lllll}
\delta_3 & = \dfrac{N_3 L_3}{EA} & = \dfrac{\sqrt{2}F\sqrt{2}a}{EA} & = 0,8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} & \text{(alargamiento)} \\
\delta_4 & = \dfrac{|N_4|\, L_4}{EA} & = \dfrac{Fa}{EA} & = 0,4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} & \text{(acortamiento)}
\end{array}
$$

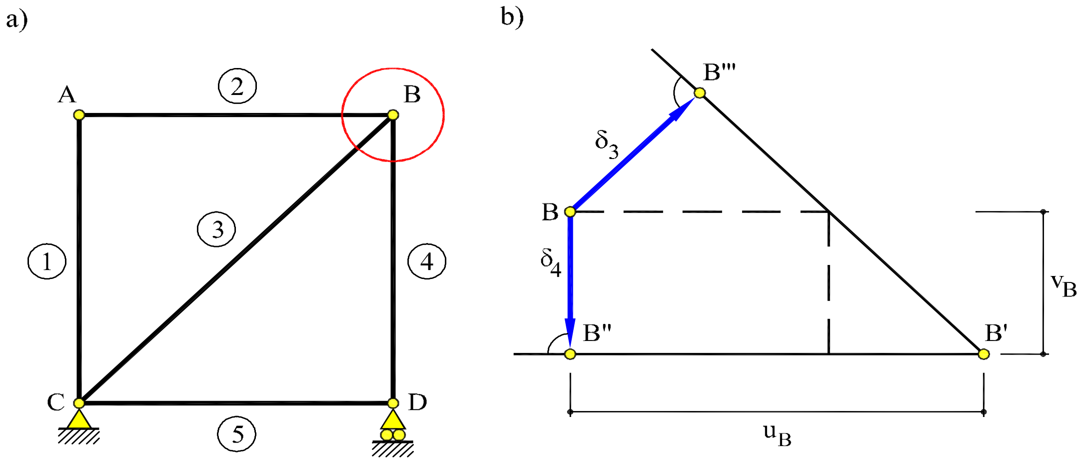


Fig. 3.11: (a) Desplazamiento del nudo B (c) detalle de los movimientos

donde L_i es la longitud de la barra i. Una vez conocidos los alargamientos de las barras puede calcularse el desplazamiento del nudo B (Figura 3.11a). Puede verse que la barra 3 se alarga hasta B''' y gira alrededor de C. La barra 4 se acorta hasta B'' y gira alrededor de D (Figura 3.11b). Al no trabajar la barra 5 el nudo D es un nudo fijo. La intersección de las normales a las barras 3 y 4 en B''' y B'', respectivamente, determina el punto B' que es la posición final del nudo B.

Las componentes del desplazamiento de B son:

$$\begin{aligned} v_B &= \delta_4 = 0,4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \qquad (\downarrow) \\ u_B &= \sqrt{2}\delta_3 + \delta_4 = 1,531 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \qquad (\rightarrow) \end{aligned}$$

y el desplazamiento del nudo B es:

$$\overline{BB'} = \sqrt{u_B^2 + v_B^2} = \sqrt{(0,4)^2 + (1,531)^2} = 2,50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

Ejemplo 3.5.3

La estructura articulada de la Figura 3.12a está formada por tres barras del mismo material y secciones transversales iguales de área A. Para la fuerza horizontal F que se indica, determinar los axiles en las barras y el desplazamiento del nudo C.
Datos: $a = 5\,\mathrm{m}$, $A = 5\,\mathrm{cm}^2$, $F = 20\,\mathrm{kN}$ y $E = 200$ GPa.

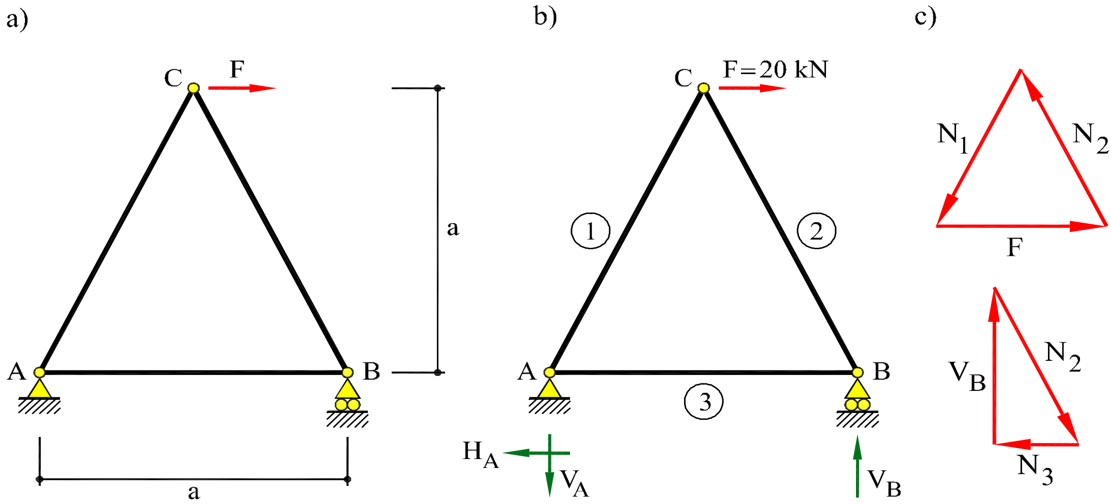


Fig. 3.12: (a) Estructura del Ejemplo 3.5.3 (b) reacciones (c) axiles

La estructura es isostática. Por equilibrio, las reacciones en los apoyos (Figura 3.12b), son:

$$H_A = F \qquad V_A = F \qquad V_B = F$$

Considerando el equilibrio de fuerzas en los nudos (Figura 3.12c), los axiles son:

$$\text{nudo } C \quad \Rightarrow \quad N_1 = \ \ 22,4\,\text{kN} \qquad N_2 = -22,4\,\text{kN}$$

$$\text{nudo } B \quad \Rightarrow \quad N_2 = -22,4\,\text{kN} \qquad N_3 = \ \ 10\,\text{kN}$$

Se toman positivos los axiles de tracción.

Los alargamientos de las barras son:

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} = \frac{22,4 \cdot 10^3 \cdot 5,59}{EA} = 1,25 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad \text{(alargamiento)}$$

$$\delta_2 = \frac{|N_2|\, L_2}{EA} = \frac{22,4 \cdot 10^3 \cdot 5,59}{EA} = 1,25 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad \text{(acortamiento)}$$

$$\delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA} = \frac{10,0 \cdot 10^3 \cdot 5,00}{EA} = 0,50 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad \text{(alargamiento)}$$

Teniendo en cuenta las variaciones de longitud de las barras y las condiciones de contorno de la estructura, puede determinarse el movimiento del nudo C (Figura 3.13a). La barra 1 se alarga hasta C''' y gira alrededor del nudo A. La barra 3 se alarga hasta B'. La barra 2 se traslada, se acorta hasta C'' y gira alrededor de B'. La intersección

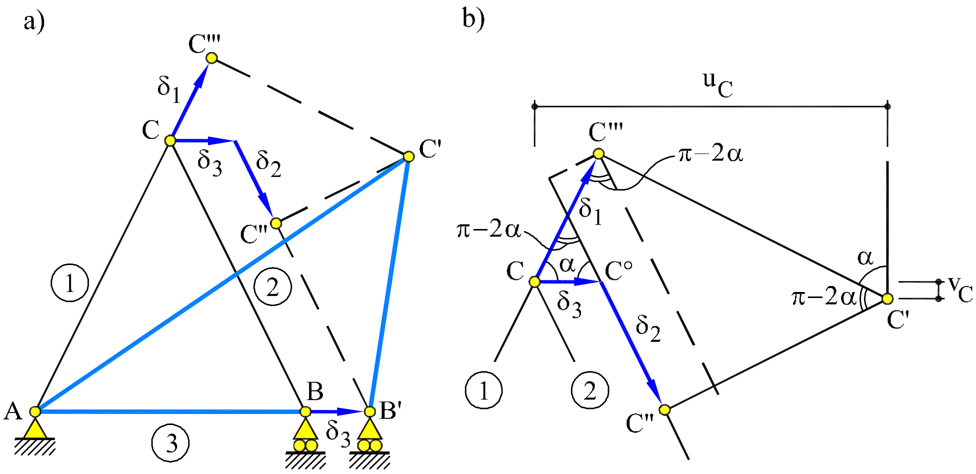


Fig. 3.13: (a) Movimientos de la estructura (b) detalle del nudo C

de las normales a las barras 1 y 2 en C''' y C'', respectivamente, determina el punto C' que es la posición final del nudo C.

Las componentes horizontal y vertical del movimiento del nudo C (Figura 3.13b), pueden expresarse por:

$$u_C = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \cos\alpha}{2\cos\alpha} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad (\rightarrow)$$

$$v_C = \frac{\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 \cos\alpha}{2\sin\alpha} = -0,125 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad (\downarrow)$$

y el desplazamiento del nudo C es:

$$\overline{CC'} = \sqrt{u_C^2 + v_C^2} = 3,003 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

3.6 Ecuaciones elásticas en estructuras articuladas planas

Consideremos la estructura articulada de la Figura 3.14a y una barra cualquiera aislada sometida a los esfuerzos que el resto de la estructura le transmite a través de sus extremos Figura 3.14b. Al tratarse de una estructura articulada los únicos esfuerzos que se transmiten en los extremos de la barra son los axiles F_A y F_B. Los movimientos que dichos esfuerzos producen en los extremos de la barra son los desplazamientos u_A y u_B, medidos en la dirección de la barra, eje x en la figura.

Por equilibrio de fuerzas en la barra AB, puede escribirse:

$$F_A + F_B = 0 \qquad (3.4)$$

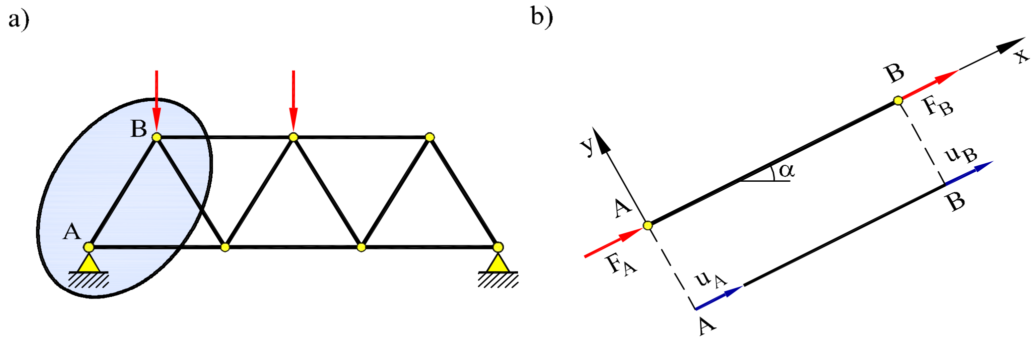


Fig. 3.14: (a) Estructura articulada (b) barra aislada

Por otra parte, el alargamiento que sufre la barra en función de los desplazamientos de los extremos es:

$$\delta = u_B - u_A = \frac{F_B l}{EA}$$

Se llaman *ecuaciones elásticas* a las relaciones que permiten calcular los esfuerzos que actúan en los extremos de la barra en función de los movimientos de sus extremos. En este caso, las ecuaciones elásticas de una barra que trabaja sólo a axil son:

$$\begin{aligned} F_A &= -\frac{EA}{l}\,\delta &= \frac{EA}{l}\,(u_A - u_B) \\ F_B &= \frac{EA}{l}\,\delta &= -\frac{EA}{l}\,(u_A - u_B) \end{aligned}$$

que expresadas en forma matricial resultan:

$$\begin{bmatrix} F_A \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

y en forma compacta:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \tag{3.6}$$

donde **K** es la matriz de rigidez a axil de la barra.

Ejemplo 3.6.1

La estructura de la Figura 3.15a está formada por seis barras articuladas del mismo material e idéntica sección. Debido a un error de fabricación, la barra AA' es más corta

de su longitud nominal a en un valor $2\delta = 1,5\,\text{cm}$. Al montar la estructura se miden los alargamientos y acortamientos que sufren las barras en el montaje; estos son:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_2 = \delta_{2'} = \delta_4 = 0,155\,\text{cm} \\ \delta_3 &= \delta_{3'} = -0,310\,\text{cm} \end{aligned}$$

Calcular los axiles en las barras a partir de dichos alargamientos.
Datos: $a = 10\,\text{m}$, $A = 10\,\text{cm}^2$, y $E = 200$ GPa.

Al no actuar cargas exteriores y ser la estructura externamente isostática, las reacciones son nulas. Debido a la simetría respecto del eje vertical, los axiles en AB y $A'B'$, y AB' y $A'B$ serán $N_2 = N_{2'}$ y $N_3 = N_{3'}$.

Conocidos los alargamientos que sufren las barras, debido al defecto de fabricación de la barra AA', se puede dibujar la deformada de la estructura, que se muestra en la Figura 3.15b. Asimismo, se pueden calcular los axiles que corresponden mediante las ecuaciones elásticas de cada una de ellas:

$$N_i = \left(\frac{EA}{l}\right)_i \delta_i$$

Si se llama rigidez a axil de referencia, k, a la relación:

$$k = \frac{EA}{a} = \frac{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{10} = 200 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

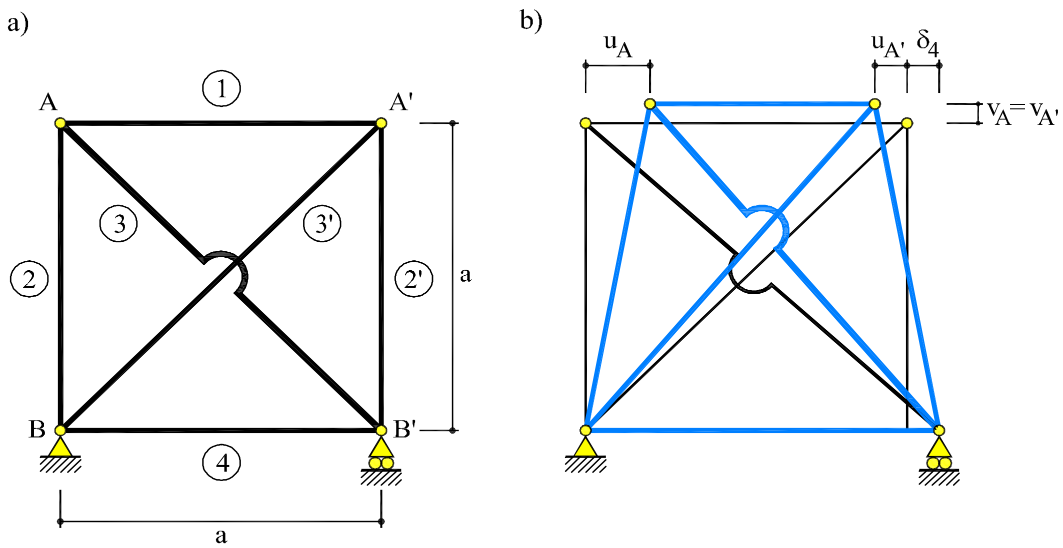


Fig. 3.15: (a) Estructura del Ejemplo 3.6.1 (b) deformada

las ecuaciones elásticas de las barras 1 y 3 son:

$$\begin{aligned} N_1 &= k\delta_1 &&= 200\cdot 10^5 \cdot 0,155\cdot 10^{-2} &&= 31,0\,\mathrm{kN} \\ N_3 &= \frac{k}{\sqrt{2}}\delta_3 &&= \frac{200\cdot 10^5}{\sqrt{2}}\cdot\left(-0,31\cdot 10^{-2}\right) &&= -\,43,84\,\mathrm{kN} \end{aligned}$$

Los axiles de las barras restantes se determinan teniendo en cuenta que las barras 2, $2'$y 4 tienen la misma longitud y el mismo alargamiento que la barra 1, por tanto, sus axiles coinciden con N_1. Además, las barras 3 y $3'$, por simetría, tienen el mismo axil. Resumiendo:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2 = N_{2'} = N_4 = 31\,\mathrm{kN} && \text{(tracción)} \\ N_3 &= N_{3'} = -43,84\,\mathrm{kN} && \text{(compresión)} \end{aligned}$$

3.7 Deformación por flexión

La directiz de una viga recta de sección uniforme, sometida a flexión pura recta, se deforma según un arco de circunferencia cuya curvatura χ y radio de curvatura ρ vienen dados por la expresión:

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{3.7}$$

donde M es el momento flector, E es el módulo de Young e I es el momento de inercia de la sección respecto al eje principal correspondiente (Figura 3.16). La Ec.(3.7) se

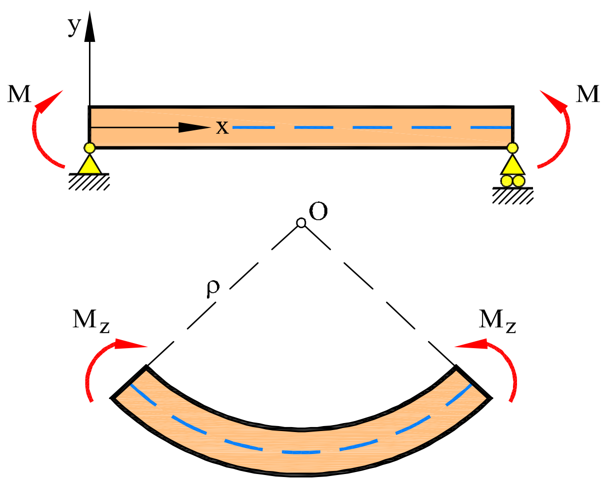


Fig. 3.16: Deformación por flexión de una viga recta

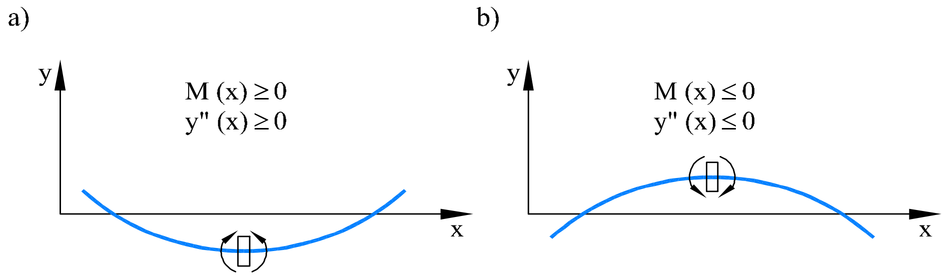


Fig. 3.17: Convenio de signos para momentos flectores y curvaturas

puede aplicar con gran aproximación en flexión simple (para momento flector variable, $M = M(x)$), e incluso si la sección no es uniforme (esto es, para piezas de inercia variable, $I = I(x)$).

Por otra parte, el radio de curvatura de una curva que se expresa en coordenadas cartesianas como $y = y(x)$ puede calcularse como una función $\rho = \rho(x)$, solución de la ecuación diferencial:

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{3.8}$$

donde $y' = (dy/dx)$, $y'' = \left(d^2y/dx^2\right)$ representan la primera y la segunda derivada, respectivamente, de la función $y = y(x)$.

En la hipótesis, habitual en Resistencia de Materiales, de considerar sólo pequeños desplazamientos y giros, el término $(y')^2$ es despreciable frente a la unidad, y la curvatura se puede aproximar como:

$$\chi = \frac{1}{\rho} = y'' \tag{3.9}$$

En estas circunstancias, se puede escribir la siguiente ecuación diferencial de la deformada de la directriz de una viga recta:

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} \tag{3.10}$$

expresión en la que va implícito el convenio de signos de la Figura 3.17 para momentos y curvaturas.

La expresión anterior, también llamada *ecuación diferencial de la línea elástica*, o simplemente *ecuación de la elástica*, era ya conocida por Euler (1744) e integrada por él mismo para el caso de un voladizo con carga en el extremo. Navier hizo uso extensivo de esta expresión para obtener las líneas elásticas de vigas con carga lateral arbitraria.

En el caso de que, además del momento flector, actúen sobre la viga deformaciones impuestas que produzcan una ley de curvatura $\chi_o = \chi_o(x)$, la ecuación anterior se modifica en la forma

$$y''(x) = \chi_o(x) + \frac{M(x)}{EI(x)} \tag{3.11}$$

3.8 Movimientos en estructuras reticuladas de plano medio

Los movimientos en estructuras reticuladas de plano medio pueden calcularse integrando la ecuación diferencial de la elástica para cada pieza, imponiendo compatibilidad de movimientos (desplazamientos y giros) en los nudos rígidos, y respetando las condiciones cinemáticas impuestas por los apoyos.

Ejemplo 3.8.1

Calcular la ecuación de la deformada, los giros en los extremos y la flecha máxima de una viga recta biapoyada sometida a carga uniforme (Figura 3.18a).

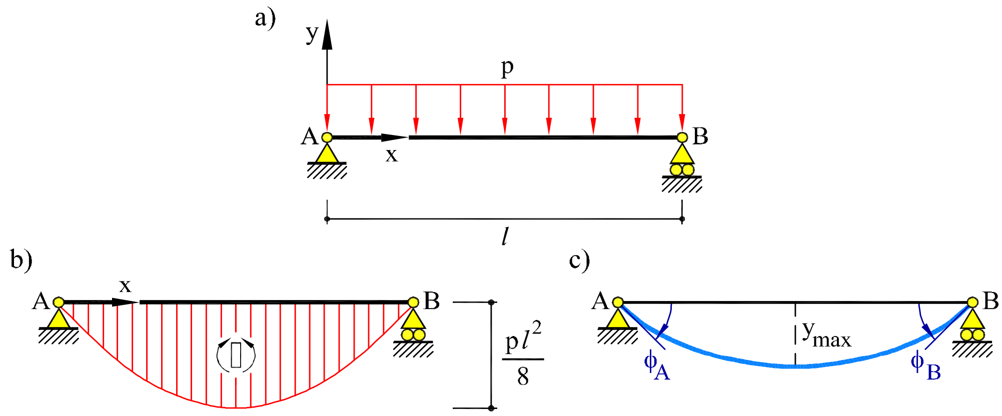


Fig. 3.18: Viga biapoyada con carga uniforme

La ley de momentos flectores en la viga es (Figura 3.18b):

$$M(x) = \frac{p}{2}(lx - x^2)$$

luego la ecuación diferencial a resolver es:

$$y''(x) = \frac{p}{2EI}(lx - x^2)$$

Integrando dos veces se tiene:

$$y(x) = \frac{p}{2EI}\left(l\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2\right)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración que se determinan imponiendo las condiciones de apoyo:

$$\begin{aligned} y(x=0) &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C_2 = 0 \\ y(x=l) &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = -\frac{l^3}{12} \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de la deformada es (Figura 3.18c):

$$y(x) = \frac{p}{24EI}\left(-x^4 + 2lx^3 - l^3 x\right)$$

Derivando esta expresión, se obtiene la ley de giros:

$$\phi(x) = y'(x) = \frac{p}{24EI}\left(-4x^3 + 6lx^2 - l^3\right)$$

Los giros en los extremos de la viga son (positivos en el sentido antihorario):

$$\phi_A = \phi(x=0) = -\frac{pl^3}{24EI} \qquad ; \qquad \phi_B = \phi(x=l) = \frac{pl^3}{24EI}$$

La flecha máxima se da donde la derivada primera (y, por tanto, el giro) se anula:

$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad y_{\max} = y(x = \frac{l}{2}) = -\frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI}$$

Ejemplo 3.8.2

Obtener la ecuación de la deformada, los giros en los extremos y la flecha máxima de una viga biapoyada con un momento $\mathcal{M}$ en un extremo (Figura 3.19a).

La ley de momentos flectores en la viga es (Figura 3.19b):

$$M(x) = \mathcal{M}\frac{x}{l}$$

y la ecuación diferencial a resolver es:

$$y''(x) = \frac{\mathcal{M}}{EI}\frac{x}{l}$$

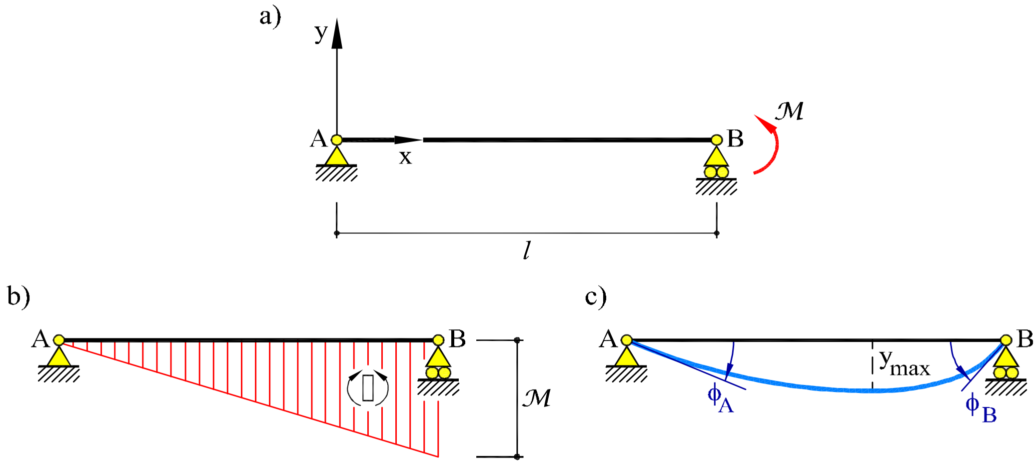


Fig. 3.19: Viga biapoyada con momento en el extremo

Integrando dos veces e imponiendo las condiciones de apoyo $y(x=0)=0,\ y(x=l)=0$, se obtiene (Figura 3.19c):

$$y(x) = -\frac{\mathcal{M}\,l}{6EI}\,x\left[1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

Derivando, se obtiene la ley de giros:

$$\phi(x) = -\frac{\mathcal{M}l}{6EI}\left[1-3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

Los giros en los extremos son:

$$\phi_A = \phi(x=0) = -\frac{\mathcal{M}l}{6EI} \qquad ; \qquad \phi_B = \phi(x=l) = \frac{\mathcal{M}l}{3EI}$$

La flecha máxima se da donde la ley de giros se anula:

$$y'(x)=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{l}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad y_{\max} = y(x=\frac{l}{\sqrt{3}}) = -\frac{\mathcal{M}l^2}{9\sqrt{3}EI}$$

Ejemplo 3.8.3

Obtener la ecuación de la deformada, los giros en los extremos y la flecha en el punto central de una viga biapoyada con momentos $\mathcal{M}_A$ y $\mathcal{M}_B$ en sus extremos (Figura 3.20a).

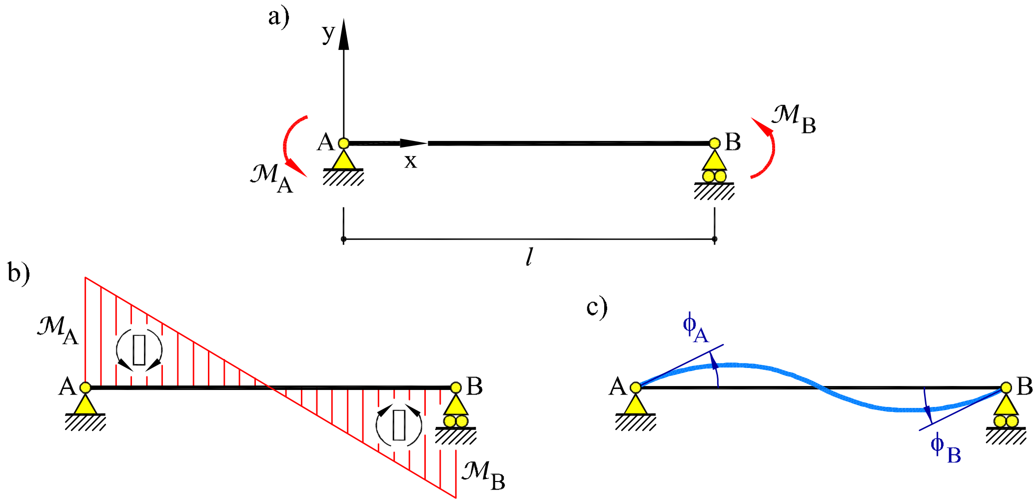


Fig. 3.20: Viga biapoyada con momentos en los extremos

La ley de momentos flectores en la viga es (Figura 3.20b):

$$M(x) = -\mathcal{M}_A + (\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)\,\frac{x}{l}$$

y la ecuación diferencial a resolver es:

$$y''(x) = \frac{1}{EI}\left[-\mathcal{M}_A + (\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)\,\frac{x}{l}\right]$$

Integrando dos veces e imponiendo en A y B las condiciones de apoyo $y(x=0)=0$, $y(x=l)=0$, se obtiene (Figura 3.20c):

$$y(x) = \frac{l^2}{6EI}\left(\frac{x}{l}\right)\left[3\mathcal{M}_A\left[1-\left(\frac{x}{l}\right)\right] + (\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)\left[1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]\right]$$

Derivando, se obtiene la ley de giros:

$$\phi(x) = \frac{l}{6EI}\left[3\mathcal{M}_A\left[1-2\left(\frac{x}{l}\right)\right] + (\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)\left[1-3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]\right]$$

Los giros en los extremos son:

$$\begin{aligned}
\phi_A &= \phi(x=0) = +\frac{\mathcal{M}_A l}{3EI} - \frac{\mathcal{M}_B l}{6EI} \\
\phi_B &= \phi(x=l) = -\frac{\mathcal{M}_A l}{6EI} + \frac{\mathcal{M}_B l}{3EI}
\end{aligned}$$

La flecha en el punto medio es:

$$y(x=\frac{l}{2}) = -\frac{l^2}{16EI}\,(\mathcal{M}_B - \mathcal{M}_A)$$

Ejemplo 3.8.4

Obtener la ecuación de la deformada, los giros en los extremos y la flecha en el punto central de una viga biapoyada de sección rectangular (Figura 3.21a), cuando el intradós y el trasdós sufren variaciones de temperatura $-\Delta t_1$ y Δt_2, respectivamente, con una variación lineal de temperatura a través del canto h de la pieza (Figura 3.21b).

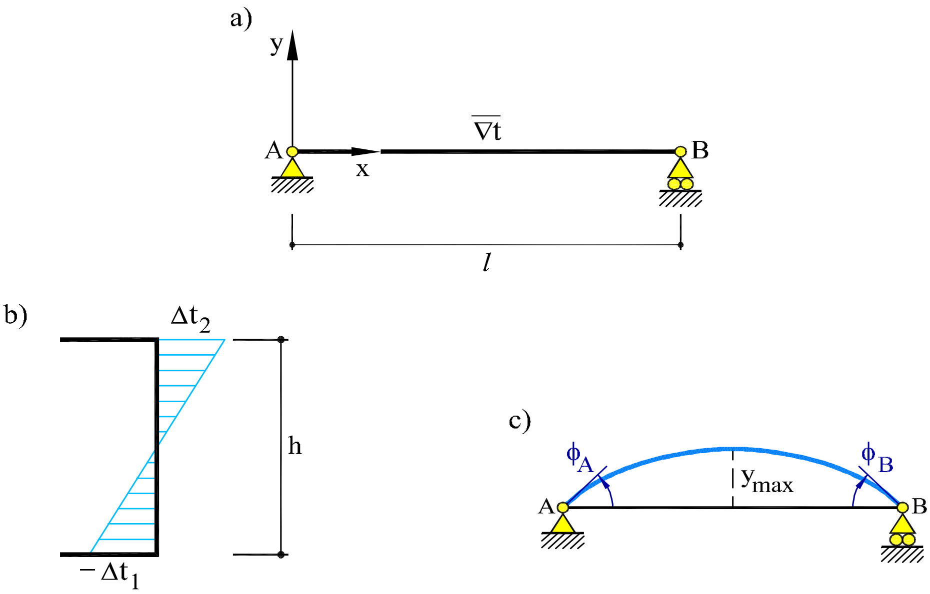


Fig. 3.21: Viga biapoyada sometida a gradiente térmico

En este caso, la curvatura debida a los efectos térmicos es

$$\chi_t = -\frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{h}\,\alpha = -\overline{\nabla t}\,\alpha$$

siendo α el coeficiente de dilatación térmica del material. Por tanto, la ecuación diferencial que se debe resolver es:

$$y''(x) = \chi_t = -\overline{\nabla t}\,\alpha$$

Integrando dos veces e imponiendo en A y B las condiciones de apoyo, $y(x = 0) = 0$, $y(x = l) = 0$, se obtiene (Figura 3.21c):

$$y(x) = -\frac{1}{2}\,\chi_t\, x(l - x) = \frac{1}{2}\overline{\nabla t}\,\alpha\, x(l - x)$$

Derivando, se obtiene la ley de giros:

$$\phi(x) = \chi_t \,(x - \frac{l}{2}) = -\overline{\nabla t}\,\alpha\,(x - \frac{l}{2})$$

Los giros en los extremos son:

$$\begin{aligned}
\phi_A &= \phi(x=0) &= -\frac{1}{2}\chi_t\, l &= +\frac{1}{2}\overline{\nabla t}\,\alpha\, l \\
\phi_B &= \phi(x=l) &= +\frac{1}{2}\chi_t\, l &= -\frac{1}{2}\overline{\nabla t}\,\alpha\, l
\end{aligned}$$

La flecha máxima se da en el centro de la luz:

$$y_{\max} = y(x = \frac{l}{2}) = -\frac{1}{8}\chi_t\, l^2 = \frac{1}{8}\overline{\nabla t}\,\alpha\, l^2$$

Ejemplo 3.8.5

Para la estructura de la Figura 3.22a, calcular: (a) el desplazamiento horizontal del nudo B para una fuerza vertical unitaria $F = 1$ actuando en C y (b) el desplazamiento vertical del nudo C para una fuerza horizontal unitaria $H = 1$ actuando en B.

La estructura es isostática. Está formada por dos barras con sus respectivas leyes de momentos. Por tanto, en cada barra debe integrarse la ecuación diferencial de la deformada correspondiente. Se definen los sistemas de referencia locales (x_1, y_1) y (x_2, y_2), correspondientes a cada barra, y el sistema global (u, v) al que referiremos los movimientos de los nudos (Figuras 3.22a y c).

(a) Para el estado de carga de la Figura 3.22a, las leyes de momentos flectores, referidas a los ejes locales de cada barra, son:

$$\begin{aligned}
M\,(x_1) &= -Fa & &\text{barra } (AB) \\
M\,(x_2) &= -F\,(a - x_2) & &\text{barra } (BC)
\end{aligned}$$

En la barra AB, la correspondiente ecuación diferencial de la elástica es:

$$y_1''(x_1) = -\frac{Fa}{EI}$$

que se integra dos veces con las condiciones de empotramiento, $y_1'(x_1 = 0) = 0$ y $y_1(x_1 = 0) = 0$, para dar:

$$y_1(x_1) = -\frac{Fa}{2EI}y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y_1(x_1 = a) = -\frac{Fa^3}{2EI} \quad (\rightarrow)$$

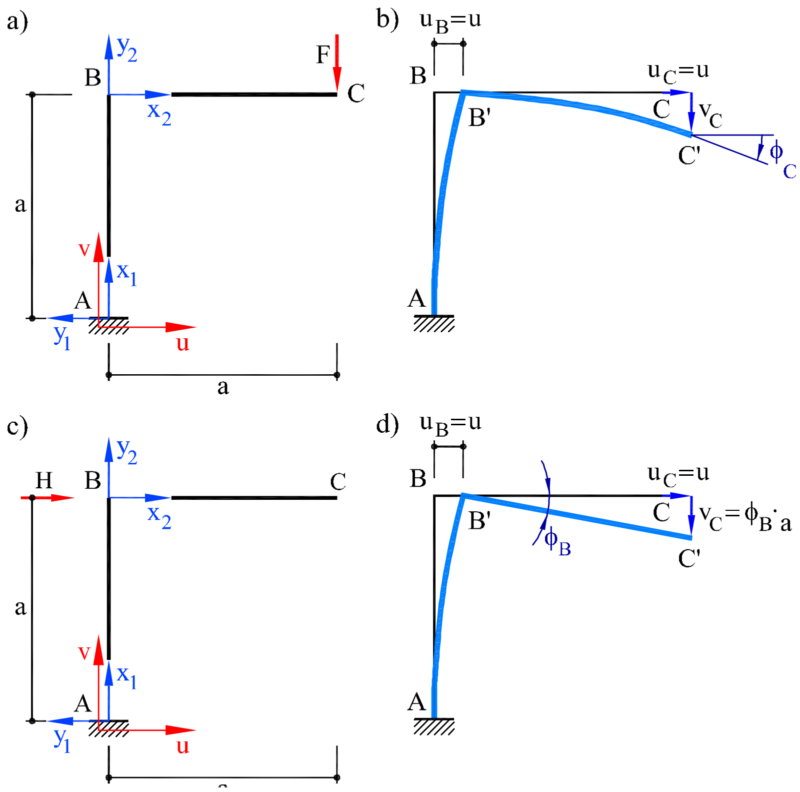


Fig. 3.22: Estructura del Ejemplo 3.8.5

Por tanto, el desplazamiento horizontal del nudo B, referido a los ejes globales u, v, es (Figura 3.22b):

$$u_B^F = \frac{Fa^3}{2EI} \qquad (\rightarrow)$$

(b) Para el estado de carga de la Figura 3.22c, las leyes de momentos flectores son:

$$\begin{aligned} M\,(x_1) &= -H\,(a - x_1) \qquad && \text{barra (1)} \\ M\,(x_2) &= 0 && \text{barra (2)} \end{aligned}$$

Integrando la correspondiente ecuación diferencial de la elástica, la ley de desplazamientos normales a la barra AB es:

$$y_1(x_1) = -\frac{Ha}{6EI}\,(3a - x_1)\,x_1^2$$

y la ley de giros es:

$$\phi(x_1) = -\frac{Ha}{2EI}(2a - x_1)\,x_1 \qquad\qquad \phi_B = \phi(x_1 = a) = -\frac{Ha^2}{2EI} \qquad (\circlearrowright)$$

Al ser nula la ley de momentos flectores en la barra BC, dicha barra sólo tiene movimientos de sólido rígido compatibles con el giro del nudo B. El desplazamiento vertical en C, por tanto, es (Figura 3.22d):

$$v_C^H = \phi_B \cdot a = -\frac{Ha^3}{2EI} \qquad (\downarrow)$$

En todo el desarrollo se ha despreciado la deformación por axil y por cortante. Nótese que las expresiones obtenidas para u_B^F y v_C^H son iguales.

3.9 Ecuaciones elásticas en estructuras reticuladas de plano medio

Consideremos una estructura reticulada de plano medio como la de la Figura 3.23a, *en la que se desprecia la deformación por axil y cortante.* Una barra cualquiera de la estructura, tal como la AB, puede considerarse aisladamente, añadiendo a las cargas que inciden directamente sobre ella los momentos en los extremos, M_{AB} y M_{BA}, y las fuerzas que el resto de la estructura ejerce sobre ella a través de los nudos (Figura 3.23b). Es evidente que, conocidos estos momentos de extremidad, se pueden calcular las leyes de esfuerzos sobre la barra y el problema estructural queda resuelto.

En lo que sigue, se consideran positivos los giros y momentos de sentido antihorario, y negativos los de sentido contrario.

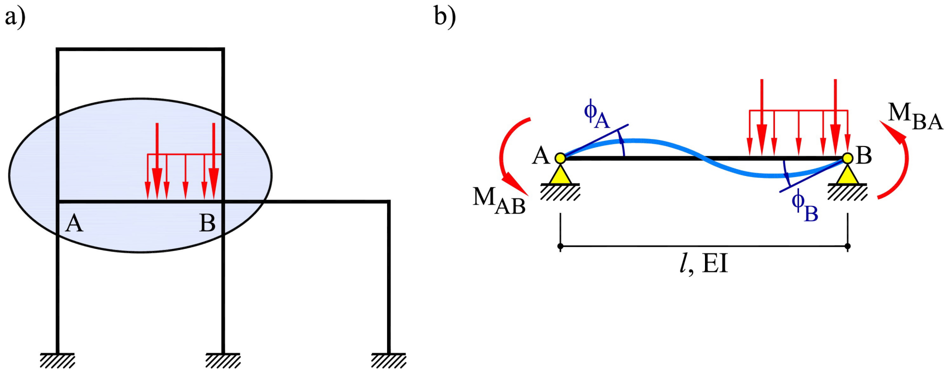


Fig. 3.23: (a) Estructura reticulada (b) barra aislada

3.9.1 Ecuaciones elásticas de una pieza recta sin desplazamiento transversal entre sus extremos

Los giros en los extremos A y B de una pieza de longitud l y rigidez a flexión EI, que forma parte de una estructura reticulada de plano medio, se pueden obtener por superposición de los debidos a los momentos de extremo y los debidos a las cargas transversales que actúan sobre la pieza (si no hay movimiento transversal relativo entre los nudos A y B), tal como se muestra en la Figura 3.24:

$$\phi_A = \phi_A(M_{AB}) + \phi_A(M_{BA}) + \phi_A^o \qquad (3.12a)$$

$$\phi_B = \phi_B(M_{AB}) + \phi_B(M_{BA}) + \phi_B^o \qquad (3.12b)$$

donde $\phi_A(M_{AB})$ representa el giro en el extremo A de la pieza biapoyada debido al momento de extremidad M_{AB}, y análogamente para los demás términos; ϕ_A^o y ϕ_B^o representan los giros en los extremos A y B de la viga biapoyada debidos a las cargas que gravitan directamente sobre la pieza.

En la Figura 3.25 se proporcionan los valores de los giros ϕ_A^o y ϕ_B^o en vigas biapoyadas, para diversos tipos de carga.

Según los resultados obtenidos en el Ejemplo 3.6.3 de la Sección 3.6 se tiene:

$$\phi_A = +\frac{M_{AB}l}{3EI} - \frac{M_{BA}l}{6EI} + \phi_A^o \qquad (3.13a)$$

$$\phi_B = -\frac{M_{AB}l}{6EI} + \frac{M_{BA}l}{3EI} + \phi_B^o \qquad (3.13b)$$

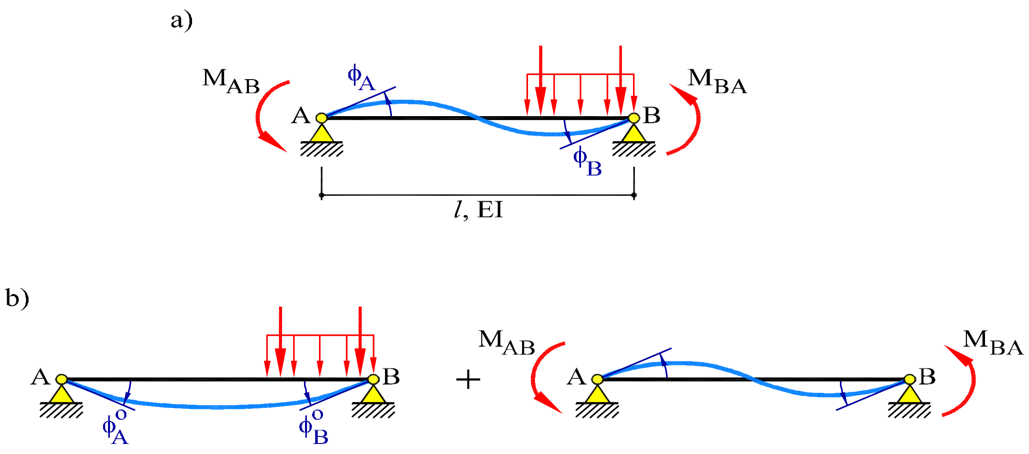
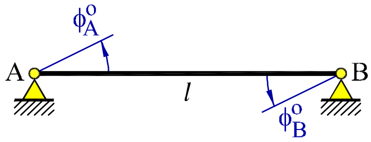


Fig. 3.24: Viga biapoyada con momentos de extremo



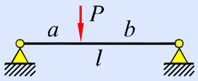
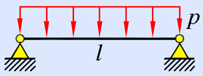
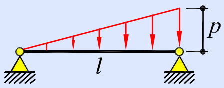
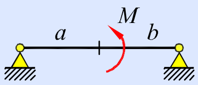
CARGA	ϕ^o_A	ϕ^o_B
	$-\frac{Pab}{6EIl}(l+b)$	$+\frac{Pab}{6EIl}(l+a)$
	$-\frac{pl^3}{24EI}$	$+\frac{pl^3}{24EI}$
	$-\frac{7}{360}\frac{pl^3}{EI}$	$+\frac{1}{45}\frac{pl^3}{EI}$
	$+\frac{Ml}{6EI}(3\frac{b^2}{l^2}-1)$	$+\frac{Ml}{6EI}(3\frac{a^2}{l^2}-1)$

Fig. 3.25: Giros de extremo en vigas biapoyadas

y en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{l}{3EI} & -\dfrac{l}{6EI} \\ -\dfrac{l}{6EI} & \dfrac{l}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi^0_A \\ \phi^0_B \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

o bien, en forma compacta:

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{\phi}^0 \tag{3.15}$$

donde $\boldsymbol{B}$ se llama *matriz de flexibilidad* de la barra.

Estas ecuaciones se pueden invertir para despejar los momentos extremos en función de los giros extremos:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}^{-1}\left[\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^0\right] = \boldsymbol{K}\left[\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^0\right] \tag{3.16}$$

donde $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}^{-1}$ es la *matriz de rigidez* de la barra. De forma explícita:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{l} & \dfrac{2EI}{l} \\ \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^0_{AB} \\ M^0_{BA} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

con $\boldsymbol{M}^o = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^0$, y:

$$M^o_{AB} = -\frac{2EI}{l}(2\phi^o_A + \phi^o_B) \quad ; \quad M^o_{BA} = -\frac{2EI}{l}(2\phi^o_B + \phi^o_A) \tag{3.18}$$

Estas son las *ecuaciones elásticas de la pieza* con enlaces rígidos y fijos (sin desplazamiento transversal).

Las ecuaciones anteriores merecen algunos comentarios:

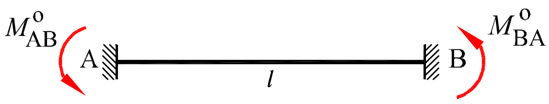
- Si se considera el caso $M^o_{AB} = M^o_{BA} = 0$, es decir, sin cargas aplicadas directamente sobre la pieza, se tiene:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\phi_A + \phi_B) \quad ; \quad M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\phi_B + \phi_A) \tag{3.19}$$

  Por tanto, estos son los momentos de extremo en una pieza en la que se imponen los giros ϕ_A y ϕ_B en los extremos.

- Si se considera el caso $\phi_A = \phi_B = 0$, es decir, la viga biempotrada, se tiene:

$$M_{AB} = M^o_{AB} \quad ; \quad M_{BA} = M^o_{BA} \tag{3.20}$$



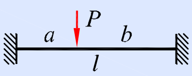
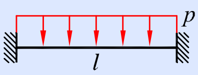
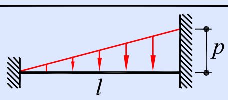
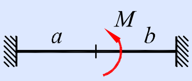
CARGA	M^o_{AB}	M^o_{BA}
	$+\frac{Pab^2}{l^2}\Big\rvert_{a=b} = +\frac{Pl}{8}$	$-\frac{Pa^2b}{l^2}\Big\rvert_{a=b} = -\frac{Pl}{8}$
	$+\frac{pl^2}{12}$	$-\frac{pl^2}{12}$
	$+\frac{pl^2}{30}$	$-\frac{pl^2}{20}$
	$+b(2a-b)\frac{M}{l^2}\Big\rvert_{a=b} = +\frac{M}{4}$	$+a(2b-a)\frac{M}{l^2}\Big\rvert_{a=b} = +\frac{M}{4}$

Fig. 3.26: Momentos de extremo en vigas biempotradas

Por tanto, los términos M^o_{AB} y M^o_{BA} son los momentos que producirían *exclusivamente* las cargas aplicadas sobre la pieza si ésta estuviese perfectamente *biempotrada* (giro nulo en los extremos). Por ello, se llama a estos términos *momentos de empotramiento perfecto* de las cargas aplicadas.

En la Figura 3.26 se proporcionan los valores de los momentos M^o_{AB} y M^o_{BA} en vigas biempotradas, para diversos tipos de carga.

3.9.2 Ecuaciones elásticas de una pieza recta con desplazamiento transversal relativo entre sus extremos

Consideremos ahora los términos adicionales que deben añadirse cuando los extremos A y B de la pieza sufren un desplazamiento transversal relativo. Para ello, consideraremos esta acción por separado, es decir, estudiaremos una barra con giros nulos en los extremos (biempotrada), sin cargas directamente aplicadas, y con un desplazamiento transversal relativo de magnitud δ (Figura 3.27).

La imposición de un desplazamiento transversal relativo δ en una pieza *biempotrada* equivale a unos giros debidos a la solicitación de valor

$$\phi^o_A = \phi^o_B = \overline{\phi}_{AB} = \frac{\delta}{l} \tag{3.21}$$

en la correspondiente pieza biapoyada, y a unos momentos en extremos tal que se cumpla la condición de empotramiento $\phi_A = \phi_B = 0$. Dichos momentos pueden

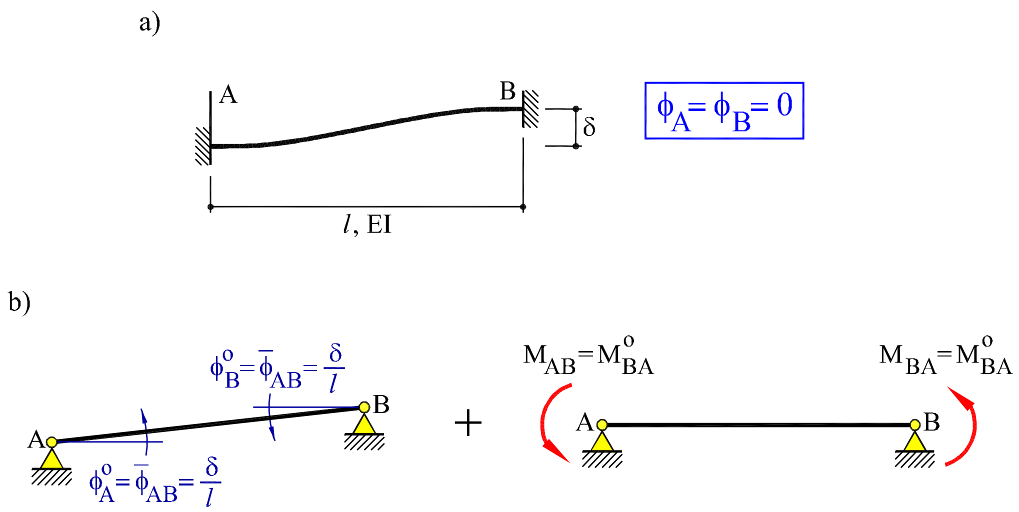


Fig. 3.27: Viga biempotrada con desplazamiento transversal

obtenerse directamente de las expresiones (3.18) anteriores para ϕ_A^o, ϕ_B^o arbitrarios, por sustitución directa de los valores apropiados:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^0 = \begin{bmatrix} -\dfrac{2EI}{l}(2\phi_A^o + \phi_B^o) \\ -\dfrac{2EI}{l}(2\phi_B^o + \phi_A^o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{6EI}{l}\overline{\phi}_{AB} \\ -\dfrac{6EI}{l}\overline{\phi}_{AB} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Nótese que $\overline{\phi}_{AB} = \delta/l$ es un giro, y por tanto, tiene signo según el convenio anteriormente adoptado (positivo si es antihorario).

Si sumamos los términos debidos al desplazamiento transversal a los obtenidos anteriormente, tenemos las *ecuaciones elásticas de la pieza recta* con enlaces rígidos completas:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{l} & \dfrac{2EI}{l} \\ \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{6EI}{l} \\ -\dfrac{6EI}{l} \end{bmatrix} \overline{\phi}_{AB} + \begin{bmatrix} M_{AB}^0 \\ M_{BA}^0 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

3.9.3 Ecuaciones elásticas de una pieza recta articulada en uno de sus extremos

Si la pieza considerada tiene uno de sus extremos articulados (Figura 3.28), las ecuaciones elásticas correspondientes deben ser modificadas. Consideremos, por ejemplo, que el extremo articulado es el nudo B.

Por existir una articulación en el extremo B, debe ser nulo el momento de extremo en dicho nudo, es decir $M_{BA} = 0$. Sustituyendo en las expresiones deducidas anteriormente:

$$M_{BA} = 0 = \frac{2EI}{l}(2\phi_B + \phi_A) - \frac{6EI}{l}\overline{\phi}_{AB} + M_{BA}^o \tag{3.24}$$

De esta ecuación se puede despejar el giro ϕ_B como:

$$\phi_B = -\frac{1}{2}\phi_A + \frac{3}{2}\overline{\phi}_{AB} - \frac{l}{4EI}M_{BA}^o \tag{3.25}$$

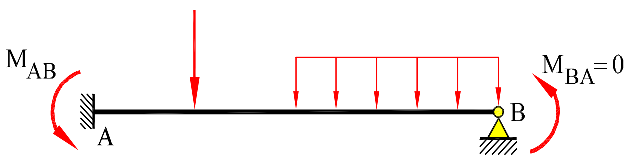
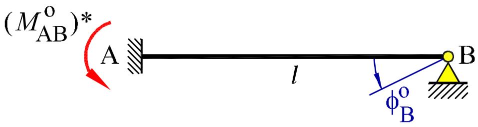


Fig. 3.28: Viga empotrado-apoyada



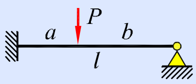
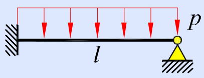
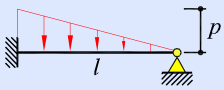
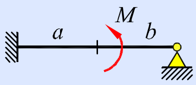
CARGA	$(M^o_{AB})^*$	ϕ^o_B
	$+\frac{Pb}{2l^2}(l^2-b^2)\Big\vert_{a=b} = +\frac{3Pl}{16}$	$+\frac{Pa^2b}{4EIl}\Big\vert_{a=b} = +\frac{Pl^2}{32EI}$
	$+\frac{pl^2}{8}$	$+\frac{pl^3}{48EI}$
	$+\frac{pl^2}{15}$	$+\frac{pl^3}{120EI}$
	$+\frac{M}{2l^2}(l^2-3b^2)\Big\vert_{a=b} = +\frac{M}{8}$	$+\frac{M}{4EIl}(l^2-4lb+3b^2)\Big\vert_{a=b} = -\frac{Ml}{16EI}$

Fig. 3.29: Momentos y giros de extremo en vigas empotrado-apoyadas

y sustituyendo en la ecuación correspondiente a M_{AB} se tiene:

$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}\phi_A - \frac{3EI}{l}\overline{\phi}_{AB} + M^o_{AB} - \frac{1}{2}M^o_{BA} \tag{3.26a}$$

$$= \frac{3EI}{l}\phi_A - \frac{3EI}{l}\overline{\phi}_{AB} + (M^o_{AB})^* \tag{3.26b}$$

Nótese que para la barra con un extremo articulado hay una sóla ecuación elástica en la que interviene el giro del nudo no articulado. El término $(M^o_{AB})^*$ es el momento de empotramiento debido a las cargas que actúan sobre la pieza, *considerada ésta empotrado-articulada*.

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3EI}{l} \\ 0 \end{bmatrix} \overline{\phi}_{AB} + \begin{bmatrix} (M^0_{AB})^* \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

En la Figura 3.29 se proporcionan los valores de los momentos $(M^o_{AB})^*$ y los giros ϕ^o_B en vigas empotrado-apoyadas, para diversos tipos de carga.

Ejemplo 3.9.1

Calcular los momentos de extremidad de una viga biempotrada y de una viga empotrado-apoyada sometidas a carga uniformemente repartida (Figura 3.30).

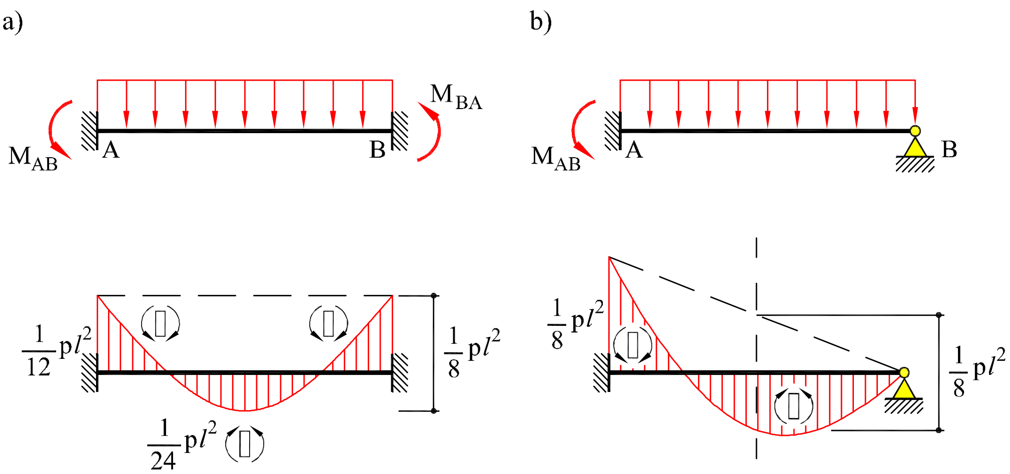


Fig. 3.30: Vigas biempotrada y empotrado-apoyada sometidas a carga uniforme

Según los resultados del Ejemplo 3.8.1 de la Sección 3.8, los giros en los extremos de una viga biapoyada sometida a carga uniforme son:

$$\phi_A^o = -\frac{pl^3}{24EI} \qquad ; \qquad \phi_B^o = +\frac{pl^3}{24EI}$$

Por tanto, aplicando las ecuaciones (3.18), se tiene que los momentos de empotramiento en una viga biempotrada sometida a carga uniforme (Figura 3.30a) son:

$$\begin{aligned} M_{AB}^o &= -\frac{2EI}{l}\left(2\phi_A^o + \phi_B^o\right) &= +\frac{1}{12}pl^2 \\ M_{BA}^o &= -\frac{2EI}{l}\left(2\phi_B^o + \phi_A^o\right) &= -\frac{1}{12}pl^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando ahora la Ec. (3.26a), se tiene que el momento de empotramiento en una viga empotrado-apoyada (Figura 3.30b) sometida a carga uniforme es:

$$(M_{AB}^o)^* = M_{AB}^o - \frac{1}{2}M_{BA}^o = +\frac{1}{8}pl^2$$

y el giro en el extremo apoyado es, según la Ec. (3.25), con $\phi_A = 0$:

$$\phi_B^o = -\frac{l}{4EI}\,M_{BA}^o = +\frac{pl^3}{48EI}$$

Ejemplo 3.9.2

Calcular los momentos de extremidad de una viga biempotrada (Figura 3.31a) y de una viga empotrado-apoyada (Figura 3.31b) de sección rectangular, cuando el intradós y el trasdós sufren variaciones de temperatura $-\Delta t_1$ y Δt_2 (Figura 3.31c), respectivamente, con una variación lineal de temperatura a través del canto h de la pieza.

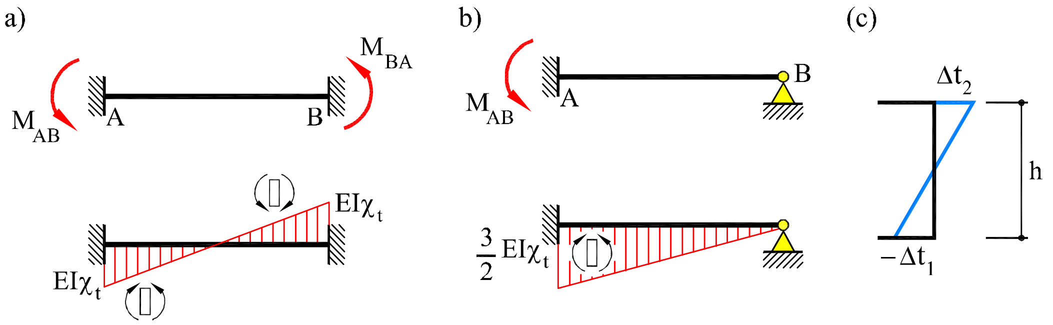


Fig. 3.31: Vigas biempotrada y empotrado-apoyada sometidas a gradiente térmico

En este caso, la curvatura debida a los efectos térmicos es:

$$\chi_t = -\frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{h}\,\alpha = -\overline{\nabla t}\,\alpha$$

siendo α el coeficiente de dilatación térmica del material y $\overline{\nabla t}$ el gradiente térmico uniforme que actúa sobre la pieza. Según los resultados del Ejemplo 3.8.4, los giros en los extremos de una viga biapoyada sometida a gradiente térmico uniforme son:

$$\phi_A^o = -\frac{1}{2}\,\chi_t\,l = +\frac{1}{2}\overline{\nabla t}\,\alpha\,l \qquad ; \qquad \phi_B^o = +\frac{1}{2}\,\chi_t\,l = -\frac{1}{2}\overline{\nabla t}\,\alpha\,l$$

Por tanto, aplicando las ecuaciones (3.18), se tiene que los momentos de empotramiento en una viga biempotrada sometida a gradiente térmico uniforme son:

$$\begin{aligned} M_{AB}^o &= -\frac{2EI}{l}\,(2\phi_A^o + \phi_B^o) &= +EI\,\chi_t &= -EI\,\overline{\nabla t}\,\alpha \\ M_{BA}^o &= -\frac{2EI}{l}\,(2\phi_B^o + \phi_A^o) &= -EI\,\chi_t &= +EI\,\overline{\nabla t}\,\alpha \end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando ahora la Ec. (3.26a), se tiene que el momento de empotramiento en una viga empotrado-apoyada sometida a gradiente térmico uniforme es:

$$(M^o_{AB})^* = M^o_{AB} - \frac{1}{2} M^o_{BA} = -\frac{3}{2} EI\, \overline{\nabla t}\, \alpha$$

y el giro en el extremo apoyado es, según la Ec. (3.25) con $\phi_A = 0$:

$$\phi^o_B = -\frac{l}{4EI}\, M^o_{BA} = +\frac{1}{4}\, \chi_t\, l = -\frac{1}{4} \overline{\nabla t}\, \alpha\, l$$

4 Trabajo y Trabajo Virtual

4.1 Introducción

La utilización del concepto de *trabajo* para resolver problemas de Mecánica es previa al establecimiento de las leyes de Newton. Parece ser que Aristóteles y Arquímedes ya lo usaron para resolver problemas elementales de palancas en los siglos IV y III A.C; ciertamente, Leonardo da Vinci lo utilizó en sus estudios sobre palancas y poleas, casi 200 años antes de que Isaac Newton publicara los "*Principia Mathematica philosophiae naturalis*" en 1687. A principios del siglo XVIII, Jean Bernoulli formuló, por primera vez en forma general, el "*principio de los desplazamientos virtuales*".

De hecho, los métodos de análisis utilizados en Mecánica se pueden clasificar en dos grupos, según sea el formato de las ecuaciones de gobierno a partir de las cuales se plantea el método:

- los *métodos diferenciales*, que arrancan de las ecuaciones diferenciales de equilibrio y compatibilidad, definidas sobre un volumen diferencial arbitrario, y

- los *métodos integrales*, que arrancan de ecuaciones integrales que expresan conservación, definidas sobre un volumen finito y discreto.

A partir de un determinado método diferencial siempre es posible plantear el correspondiente método integral; para ello, es necesario integrar las ecuaciones diferenciales de gobierno sobre el volumen finito del dominio de interés. La proposición recíproca es también cierta, dadas ciertas condiciones de regularidad.

En la Mecánica de Estructuras también puede distinguirse entre ambos tipos de métodos. Así, la Teoría de la Elasticidad plantea las ecuaciones diferenciales de equilibrio y compatibilidad, a nivel de entorno diferencial de un punto, en función de tensiones y deformaciones. La Resistencia de Materiales plantea ecuaciones análogas, a nivel de rebanada diferencial, en función de los esfuerzos y movimientos de las secciones

rectas. Pero es también posible plantear y resolver los mismos problemas a partir de las correspondientes ecuaciones de conservación y principios variacionales, aplicados a las piezas individuales o a la estructura completa, en función de magnitudes como el trabajo y la energía.

Los métodos diferenciales e integrales no son mutuamente excluyentes. En el Capítulo 3 se han tratado los primeros; en este Capítulo y en el siguiente trataremos los segundos. Como veremos, tanto el método de equilibrio como el de compatibilidad, expuestos en el Capítulo 2, pueden plantearse a partir de principios integrales.

Por último, hay que mencionar que tanto los métodos diferenciales como los integrales permiten la *aproximación numérica* de los correspondientes problemas, mediante técnicas de discretización. Así, la discretización de las ecuaciones diferenciales de gobierno da lugar a métodos tales como los de las *diferencias finitas*, mientras que la de las ecuaciones de conservación son la base de métodos como el de los *elementos finitos*. Estas técnicas son, gracias a los ordenadores digitales, de plena vigencia en la resolución práctica de los problemas de Mecánica de Estructuras.

4.2 Trabajo y energía

En todo tipo de sistemas físicos existen fuerzas a las que se puede asociar una capacidad de desplazarse y, al hacerlo, una capacidad de producir *trabajo*.

El trabajo realizado por una fuerza $\boldsymbol{F}$, que se mueve desde una posición inicial A a una posición final B, siguiendo una trayectoria s es, por definición (Figura 4.1):

$$W_A^B = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_A^B F_s \, ds \tag{4.1}$$

donde el signo $(\cdot)$ denota el producto escalar y, por tanto, F_s es la proyección de la

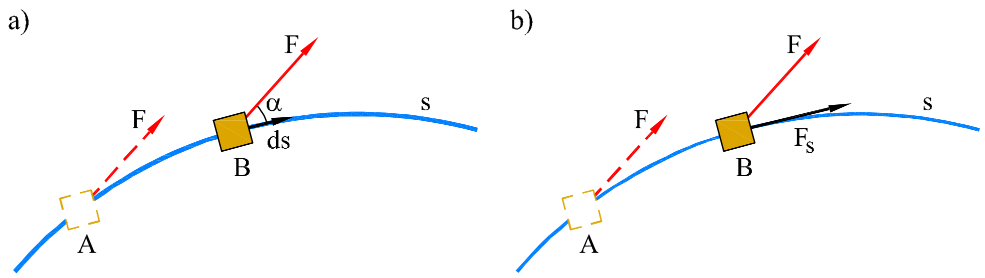


Fig. 4.1: (a) Definición de trabajo (b) Proyección de la fuerza $\boldsymbol{F}$ *sobre la trayectoria* s

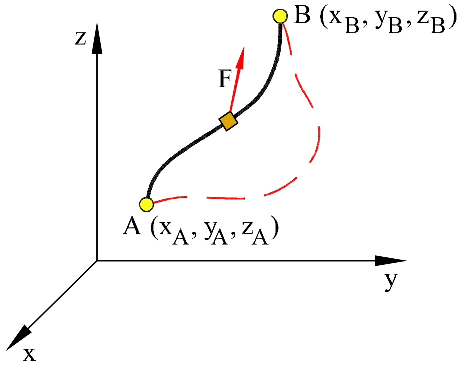


Fig. 4.2: Sistema físico conservativo

fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre la trayectoria s.

Si el sistema considerado es *conservativo* (es decir, en ausencia de fuerzas disipativas) el trabajo realizado es independiente de la trayectoria seguida para llevar al sistema de la configuración A a la B (Figura 4.2). Esto implica que la cantidad $F_s\, ds$ es un *diferencial exacto* de una cierta función Π. Por tanto, para sistemas conservativos:

$$W_A^B = \int_A^B F_s ds = \int_A^B d\Pi = \Pi_B - \Pi_A = -\Delta\Pi \qquad (4.2)$$

donde $-\Delta\Pi$ representa el cambio en Π desde A hasta B. La función Π se llama *función potencial*, o también, *energía potencial* del sistema, y se tratará en detalle en el Capítulo 5. Físicamente, le energía potencial representa la capacidad de un sistema conservativo de realizar trabajo en virtud de su configuración presente, respecto a una configuración de referencia arbitraria. De la Ec. (4.2) se deduce que:

$$\Delta\,(W + \Pi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W + \Pi = cte \qquad (4.3)$$

Los conceptos de trabajo y conservación de energía son aplicables a la Mecánica de Estructuras. Para que un sistema estructural sea conservativo no deben existir fuerzas disipativas de fricción; esto exige que no haya rozamientos externos ni internos. Por tanto, es necesario que:

- el rozamiento en los enlaces externos (apoyos) sea despreciable, es decir, que sean perfectamente rígidos o elásticos, y

- no exista disipación por rozamiento interno entre los elementos del material, es decir, que el material sea elástico.

Además, consideraremos que, en la aplicación de las cargas y en el proceso de deformación, los elementos de la estructura se desplazan de forma infinitamente lenta y adiabática (sin intercambio de calor con el exterior) desde la configuración indeformada a la de equilibrio. Es decir, despreciaremos los pequeños cambios de energía cinética y energía térmica que pueden producirse en la deformación.

Por último, aceptaremos la hipótesis de pequeños desplazamientos, lo cual supone que los desplazamientos no afectan a las fuerzas, y que las ecuaciones de equilibrio estático pueden plantearse sobre la configuración indeformada (linealidad geométrica).

Si el proceso de descarga se produce también de forma cuasi-estática y adiabática, la energía de deformación almacenada se libera produciendo trabajo negativo contra las fuerzas exteriores aplicadas (las deformaciones y los movimientos cambian de sentido en la descarga).

4.3 Trabajo y trabajo complementario

Sea una estructura elástica soportada de tal manera que los movimientos de sólido rígido estén impedidos, tal como la que se muestra en la Figura 4.3. Consideremos que a partir de la configuración indeformada se aplica gradualmente sobre la estructura un sistema de fuerzas cuyos valores finales son $\boldsymbol{F}_i$ $(i = 1, ..., n)$. Sean $\boldsymbol{\Delta}_i$ $(i = 1, ..., n)$ los valores finales de los movimientos de los correspondientes puntos de aplicación A_i $(i = 1, ..., n)$ de las fuerzas.

Se define como *movimiento eficaz* de una fuerza (Figura 4.3) la proyección del movimiento de su punto de aplicación sobre la dirección de ésta, teniendo en cuenta

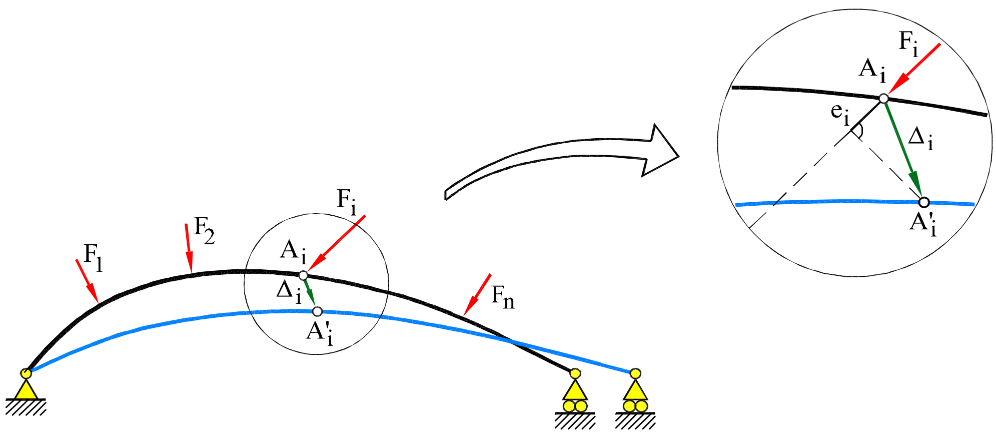


Fig. 4.3: Movimiento y movimiento eficaz de una fuerza

el sentido (positivo cuando coincide con el sentido de la fuerza). Se incluye en esta definición el concepto de *giro eficaz* de un momento, como proyección del vector giro del punto de aplicación del momento sobre la dirección del momento aplicado. Sean e_i $(i = 1, ..., n)$ los valores finales de los movimientos eficaces de las fuerzas $\boldsymbol{F}_i$. Se verifica que:

$$\boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{\Delta}_i = F_i\, e_i \quad \text{para} \quad i = 1, ..., n \tag{4.4}$$

Se define como *trabajo de las fuerzas exteriores almacenado durante el proceso de carga* la expresión:

$$W_e = \sum_{i=1}^{n} \int_{o}^{e_i} F_i\, de_i \tag{4.5}$$

donde la integral se realiza desde la configuración indeformada a la configuración final. Alternativamente, se define como *trabajo complementario de las fuerzas exteriores durante el proceso de carga* la expresión:

$$\overline{W}_e = \sum_{i=1}^{n} \int_{o}^{F_i} e_i\, dF_i \tag{4.6}$$

donde, de nuevo, la integral se realiza desde la configuración indeformada a la configuración final.

Si el sistema es conservativo, los valores del trabajo y del trabajo complementario realizados en el proceso de deformación no dependen de la historia del proceso de carga, sino únicamente de los valores finales de fuerzas y desplazamientos. Esto implica que existen funciones de *energía potencial* Π y *energía potencial complementaria* $\overline{\Pi}$, tales que:

$$W_e = -\Delta\Pi \qquad\qquad \overline{W}_e = -\, \Delta\overline{\Pi}$$

La Figura 4.4 muestra curvas de evolución de la fuerza F_i y de su movimiento eficaz e_i durante el proceso de carga. Es obvio que el valor del trabajo es igual al área sombreada que queda comprendida entre la curva fuerza-movimiento eficaz y el eje de los movimientos; análogamente, el trabajo complementario es igual al área que queda comprendida entre la curva fuerza-movimiento eficaz y el eje de las fuerzas. Dado que

$$F_i\, de_i + e_i\, dF_i = d(F_i\, e_i) \tag{4.7}$$

es claro que

$$W_e + \overline{W}_e = \sum_{i=1}^{n} F_i\, e_i \tag{4.8}$$

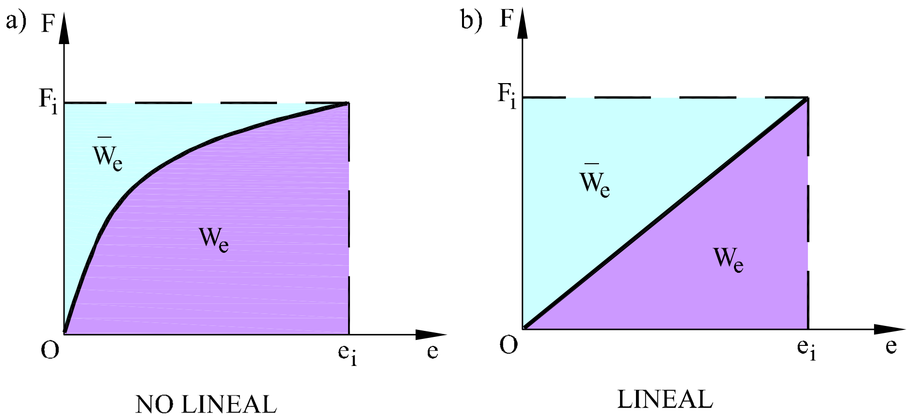


Fig. 4.4: Relaciones fuerza-movimiento eficaz

Si el sistema estructural es *lineal*, tanto a nivel material como geométrico, es obvio (Figura 4.4b) que

$$W_e = \overline{W}_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i\, e_i \tag{4.9}$$

y es indiferente referirse al trabajo o a su complementario. La expresión (4.9) se conoce como *fórmula de Clapeyron* (Benoit Clapeyron, 1833). Si existen momentos exteriores, hay que considerar también el trabajo realizado por éstos y la expresión del trabajo de las fuerzas generalizadas exteriores es igual a:

$$W_e = \overline{W}_e = \frac{1}{2}\sum_{i} F_i\, e_i + \frac{1}{2}\sum_{j} M_j\, \varphi_j \tag{4.10}$$

donde φ_j es el valor final del giro eficaz del momento M_j.

Bajo las hipótesis de linealidad del material (ley de Hooke) y geométrica (pequeños movimientos), los movimientos son funciones lineales de las fuerzas (y viceversa), o sea, que se puede escribir que:

$$e_i = \sum_{j} B_{ij}\, F_j \qquad \text{o} \qquad F_i = \sum_{j} K_{ij}\, e_j \tag{4.11}$$

donde B_{ij} y K_{ij} son los coeficientes (lineales) de proporcionalidad que dependen de la geometría del problema y de las constantes mecánicas del material. Los coeficientes B_{ij} son coeficientes de flexibilidad, mientras que los coeficientes K_{ij} son coeficientes de rigidez (ver Capítulo 6).

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de Clapeyron, se obtienen las expresiones alternativas:

$$W_e = \overline{W}_e = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j B_{ij}\, F_i\, F_j \tag{4.12a}$$

$$W_e = \overline{W}_e = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j K_{ij}\, e_i\, e_j \tag{4.12b}$$

Por tanto, el trabajo de las fuerzas exteriores es una función *cuadrática* y *homogénea* de las fuerzas exteriores o, alternativamente, de los movimientos eficaces de éstas.

4.3.1 Notación matricial

Se define el vector de fuerzas exteriores como:

$$\mathbf{f} = [F_1, ..., F_n]^T \tag{4.13}$$

y el vector de movimientos eficaces de dichas fuerzas como:

$$\boldsymbol{e} = [e_1, ..., e_n]^T \tag{4.14}$$

Si la relación fuerza-movimiento eficaz es lineal, el trabajo almacenado y el trabajo complementario de las fuerzas exteriores son iguales y en forma matricial se pueden expresar por:

$$W_e = \overline{W}_e = \frac{1}{2}\, \mathbf{f}^T \boldsymbol{e} \tag{4.15}$$

Si se cumplen las hipótesis de linealidad del material (ley de Hooke) y la geométrica (pequeños movimientos), los movimientos son funciones lineales de las fuerzas y viceversa, y puede escribirse:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{B}\,\mathbf{f} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{B} = [B_{ij}] \tag{4.16}$$

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{e} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{K} = [K_{ij}] \tag{4.17}$$

donde a $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{K}$ se las denomina *matriz de flexibilidad* y *matriz de rigidez*, respectivamente.

Teniendo en cuenta las Ecs. (4.16) y (4.17), el trabajo almacenado y el trabajo complementario pueden expresarse como:

$$W_e = \overline{W}_e = \frac{1}{2}\, \mathbf{f}^T \boldsymbol{B}\, \mathbf{f} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{e} \tag{4.18}$$

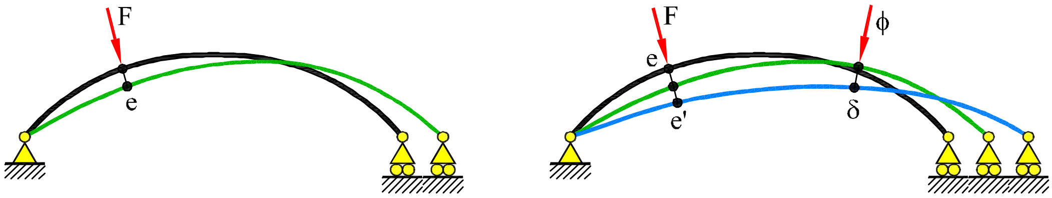


Fig. 4.5: Aplicación sucesiva de dos cargas

4.3.2 Trabajo recíproco

Al ser el trabajo una función cuadrática (de las fuerzas o de los movimientos eficaces) no se le puede aplicar, en general, el *Principio de Superposición*. Por tanto, el trabajo almacenado debido a la aplicación de un sistema de fuerzas exteriores *no es*, en general, igual a la suma de los trabajos que realizan las fuerzas exteriores que forman el sistema actuando por separado. Esto es debido al trabajo adicional (o recíproco) que realiza una fuerza ya aplicada al aplicarse otra fuerza, debido al movimiento del punto de aplicación de la primera fuerza originado por la aplicación de la segunda.

Así, en la Figura 4.5 el trabajo almacenado al aplicar sobre la estructura, primero,

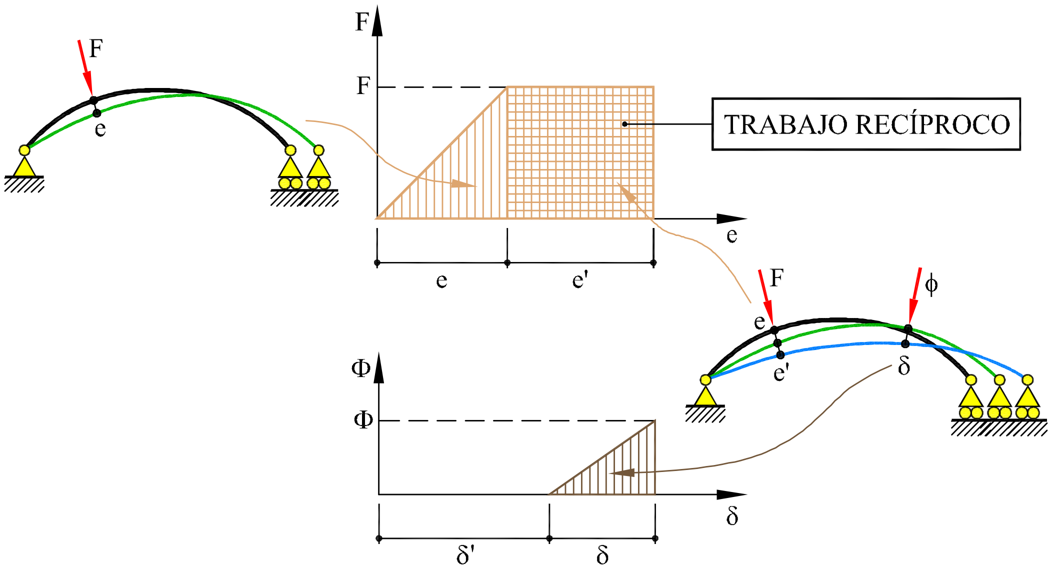


Fig. 4.6: Concepto de trabajo recíproco

la fuerza F y, posteriormente, la fuerza ϕ es:

$$W_e = \frac{1}{2}F\,e + \frac{1}{2}\phi\,\delta + F\,e' \tag{4.19}$$

donde e y δ son los movimientos eficaces de las fuerzas F y ϕ, respectivamente, al aplicarlas solas; e' es el movimiento eficaz de F al aplicar ϕ. El último término de la expresión (4.19) es el *trabajo recíproco* que realiza la fuerza F al aplicar ϕ (Figura 4.6).

El Principio de Superposición sólo puede aplicarse al trabajo en los casos particulares en los que el trabajo recíproco es nulo.

4.4 Trabajos Virtuales

El Principio de los Trabajos Virtuales (PTV en lo sucesivo) puede considerarse como la base de la Mecánica, tanto en un sentido histórico como por su importancia. La primera forma general del PTV, como "Principio de los Desplazamientos Virtuales", fue enunciada por el matemático suizo Jean Bernoulli en una carta a Varignon, a principios del siglo XVIII.

Aplicado a sistemas de partículas y sólidos rígidos, el PTV puede considerarse como la forma integral de las ecuaciones de Newton. De hecho, si se acepta como "principio", es decir, sin demostración, se puede, a partir de él, deducir las tres leyes de Newton. Alternativamente, aceptadas las tres leyes, se puede demostrar el PTV.

Aplicado a sólidos deformables, el PTV es la forma integral de las ecuaciones de equilibrio de Cauchy; aplicado a piezas prismáticas, es la forma débil de las ecuaciones de equilibrio de la rebanada.

Por tanto, las aplicaciones del PTV son innumerables dentro de la Mecánica Racional y de la Mecánica de Estructuras. Hoy en día, el PTV se usa a menudo para formular ecuaciones de equilibrio en procedimientos de aproximación discreta tales como el *método de los elementos finitos* y su aplicación se extiende a la resolución de problemas no lineales.

4.4.1 Principio de los Trabajos Virtuales

Se denomina *movimiento virtual* en una estructura a todo movimiento (desplazamiento o giro) considerado en ella que sea compatible con las restricciones cinemáticas de la estructura. Por ser *compatible* se entiende que: (a) es continuo, es decir, produce deformaciones (elongaciones, distorsiones, curvaturas y giros específicos de torsión) acotadas, (b) satisface las condiciones de apoyo y (c) no modifica el estado real de reacciones y esfuerzos, es decir, los movimientos virtuales son pequeños.

El requisito de continuidad es tanto más fuerte cuanto mayor sea el orden de las derivadas de los movimientos que intervienen en el problema. Por ejemplo, en estructuras articuladas, que sólo trabajan a axil, para que las elongaciones virtuales en las piezas sean acotadas basta con exigir que los desplazamientos virtuales sean continuos en cada pieza. En cambio, en estructuras reticuladas de plano medio, que trabajan a flexión, para que las curvaturas virtuales sean acotadas es necesario que los giros virtuales sean continuos y además, tengan derivada continua (giros virtuales continuos).

En la estructura articulada de la Figura 4.7a se muestra un movimiento virtual compatible, mientras que en las Figuras 4.7b y c se muestran dos movimientos virtuales no compatibles. El movimiento virtual que muestra la Figura 4.7b viola la condición de desplazamiento vertical nulo en el apoyo, y el correspondiente a la Figura 4.7c no cumple la condición de continuidad de desplazamientos.

Para la estructura reticulada de la Figura 4.8 en (a) y (b) se muestran dos movimientos virtuales compatibles, mientras que en (c), (d) y (e) se muestran tres movimientos virtuales no compatibles. El movimiento virtual de la Figura 4.8c viola la condición de giro nulo en el empotramiento, el de la Figura 4.8d viola la condición de nudo rígido, y el de la Figura 4.8e viola la condición de continuidad de los giros.

El *Principio de los Trabajos Virtuales* se puede enunciar: "*en una estructura sometida a un sistema de fuerzas exteriores* ***en equilibrio****, con un campo real de reacciones y esfuerzos, el trabajo externo de las fuerzas reales sobre un campo* ***arbitrario*** *de movimientos virtuales es igual al trabajo interno de los esfuerzos reales sobre el correspondiente campo virtual de deformaciones*".

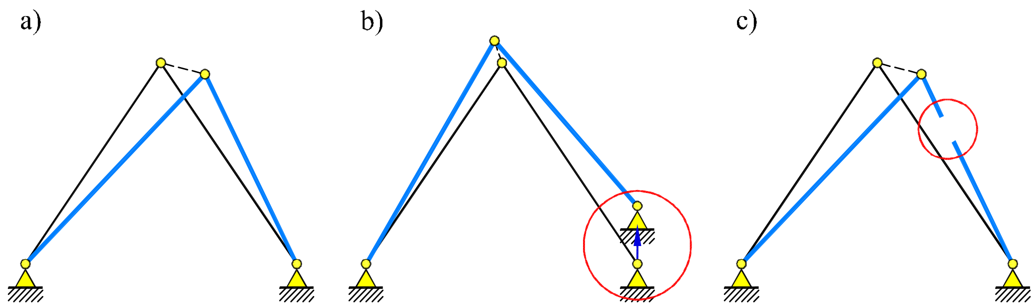


Fig. 4.7: Estructuras articuladas: movimientos virtuales:(a) compatible (b) y (c) no compatibles

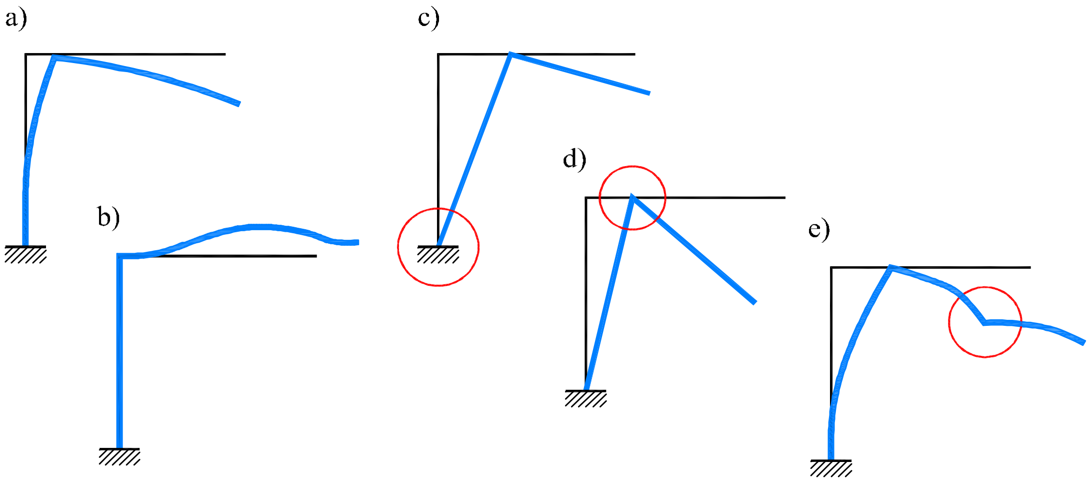


Fig. 4.8: Estructuras reticuladas: movimientos virtuales (a) y (b) compatibles, (c), (d) y (e) no compatibles

Sea una estructura soportada de tal manera que los movimientos de sólido rígido estén impedidos. Consideremos que actúa sobre ella un sistema de fuerzas y reacciones F_i $(i = 1, ..., n)$, y sean $(N,\ M_z,\ M_y,\ T_y,\ T_z,\ M_t)$ los correspondientes esfuerzos que actúan sobre la piezas de la estructura. Por otro lado, sea un campo arbitrario de movimientos virtuales tal que e_i^* $(i = 1, ..., n)$ sean los movimientos eficaces de las fuerzas F_i y sean $\left(\varepsilon_x^*,\ \chi_z^*,\ \chi_y^*,\ \gamma_{xy}^*,\ \gamma_{xz}^*,\ \theta^*\right)$ las correspondientes deformaciones virtuales.

Se define como *trabajo virtual externo* a la expresión:

$$W_e^* = \sum_{i=1}^{n} F_i\, e_i^* \tag{4.20}$$

y como *trabajo virtual interno* a la expresión:

$$W_i^* = \sum_j \int_{L_j} \left(N\ \varepsilon_x^* + M_z\ \chi_z^* + M_y\ \chi_y^* + T_y\ \gamma_{xy}^* + T_z\ \gamma_{xz}^* + M_t\ \theta^*\right) ds \tag{4.21}$$

donde la integral se realiza sobre la pieza j-ésima de la estructura y el sumatorio se extiende sobre todas las piezas.

El PTV implica que:

$$W_e^* = W_i^* \tag{4.22}$$

o sea, que:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\, e_i^* = \sum_j \int_{L_j} \left(N\, \varepsilon_x^* + M_z\, \chi_z^* + M_y\, \chi_y^* + T_y\, \gamma_{xy}^* + T_z\, \gamma_{xz}^* + M_t\, \theta^*\right) ds \qquad (4.23)$$

El PTV puede demostrarse a partir de las ecuaciones diferenciales de equilibrio de la rebanada. Basta para ello integrar éstas, multiplicadas por los correspondientes campos de movimientos virtuales, a lo largo de todas las piezas de la estructura e integrar por partes, con las condiciones de contorno adecuadas.

Al PTV también se le llama Principio de los Movimientos Virtuales, por razones obvias.

Es interesante destacar que su validez no se restringe al caso de que el comportamiento de la estructura sea elástico y lineal. Por tanto, el PTV puede aplicarse en el análisis no lineal de estructuras.

4.4.2 Método del Movimiento Unidad

El método del movimiento unidad es un método integral general para establecer ecuaciones de equilibrio. Es, por tanto, una herramienta válida para resolver estructuras por el método de rigidez.

Estructuras Articuladas

Consideremos una estructura articulada formada por las piezas $k = 1, ..., m$, sobre la que actúa un sistema de fuerzas *reales* F_j $(j = 1, ..., n)$. Por simplicidad, supongamos que las fuerzas actúan en los nudos y que los axiles son constantes en las barras. Sean δ los alargamientos reales de las piezas y $\varepsilon = \delta/l$ los alargamientos unitarios correspondientes. Si el comportamiento es elástico lineal, los axiles son: $N = (EA/l)\,\delta$.

Sea un único movimiento virtual $e_j^* = 1$ aplicado en el mismo punto y en la misma dirección de la fuerza F_j que se quiere calcular (en función de los desplazamientos) y sean δ^* y $\varepsilon^* = \delta^*/l$ los campos de alargamientos y deformaciones virtuales debidos a e_j^*.

Aplicando el PTV, se puede escribir:

$$F_j = \sum_k \int_{l_k} (N\varepsilon^*)\ ds = \sum_k (N\delta^*)_k \qquad (4.24)$$

que para comportamiento es elástico lineal es:

$$F_j = \sum_k \int_{l_k} (EA\varepsilon\varepsilon^*)\ ds = \sum_k (\frac{EA}{l}\delta\delta^*)_k \qquad (4.25)$$

Ejemplo 4.4.2.1

La estructura de la Figura 4.9a está formada por tres barras del mismo material e idéntica sección. Para una carga vertical P como la dibujada, determinar los axiles actuantes sobre cada barra.
Datos: P, h, A y E.

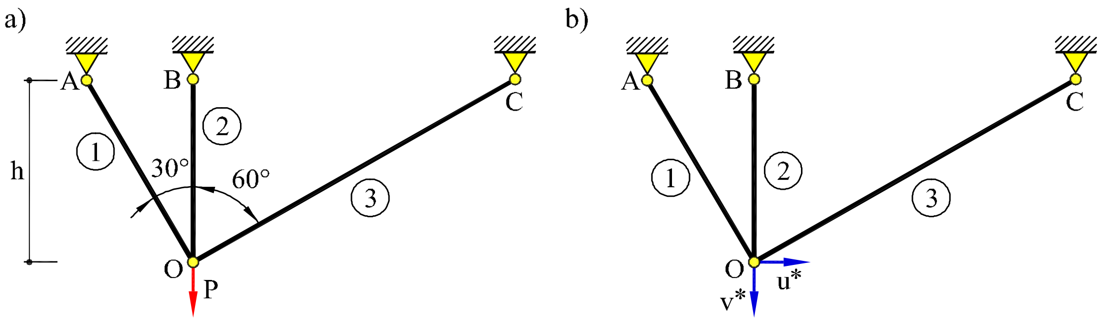


Fig. 4.9: (a) Estructura del Ejemplo 4.4.2.1 (b) movimientos virtuales

Sean u^* y v^* los desplazamientos virtuales horizontal y vertical del punto O (Figura 4.9b). Los alargamientos virtuales de las tres barras pueden expresarse en función de dichos movimientos virtuales (ver Sección 3.3.2):

$$\begin{aligned} \delta_1^* &= v^* \cos 30^\circ + u^* \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v^* + \frac{1}{2} u^* \\ \delta_2^* &= v^* \\ \delta_3^* &= v^* \sin 30^\circ - u^* \cos 30^\circ = \frac{1}{2} v^* - \frac{\sqrt{3}}{2} u^* \end{aligned}$$

El *trabajo virtual externo* es:

$$W_e^* = P\ v^*$$

y el *trabajo virtual interno* es:

$$W_i^* = \sum_{j=1}^{3} N_i\ \delta_i^*$$

Aplicando el PTV, se puede escribir:

$$P\ v_o^* = N_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v^* + \frac{1}{2} u^* \right) + N_2\ v^* + N_3 \left(\frac{1}{2} v^* - \frac{\sqrt{3}}{2} u^* \right)$$

Sustituyendo y agrupando términos:

$$\left(\frac{1}{2}N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}N_3\right)u^* + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}N_1 + N_2 + \frac{1}{2}N_3 - P\right)v^* = 0$$

Haciendo primero, $u^* = 1$ y $v^* = 0$, y después, $u^* = 0$ y $v^* = 1$, se obtienen las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en O, respectivamente:

$$\frac{1}{2}N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}N_3 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}N_1 + N_2 + \frac{1}{2}N_3 - P = 0$$

Estas ecuaciones de equilibrio no bastan para resolver completamente la estructura porque ésta es una vez hiperestática. Por otra parte, las ecuaciones de equilibrio son válidas tanto si las barras son elásticas como si no lo son.

Para resolver el problema completamente expresamos los esfuerzos axiles N_i en función de los desplazamientos *reales* u y v del punto O. Considerando que las barras tienen un comportamiento elástico lineal, y llamando $k = EA/h$, se tiene:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{EA}{l_1}\delta_1 = k\left(\frac{3}{4}v + \frac{\sqrt{3}}{4}u\right) \\ N_2 &= \frac{EA}{l_2}\delta_2 = k\,v \\ N_3 &= \frac{EA}{l_3}\delta_3 = k\left(\frac{1}{4}v - \frac{\sqrt{3}}{4}u\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$$\left.\begin{aligned} \left(3+\sqrt{3}\right)u + \left(3-\sqrt{3}\right)v &= 0 \\ \left(3-\sqrt{3}\right)u + \left(9+3\sqrt{3}\right)v &= \frac{8P}{k} \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo, se obtienen los valores de los desplazamientos reales:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+3}\,\frac{P}{k} \\ v &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3}\,\frac{P}{k} \end{aligned}$$

Conocidos los desplazamientos reales, pueden determinarse los axiles de las barras.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}P \\ N_2 &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3}P \\ N_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}+3}P \end{aligned}$$

Nótese que puede seguirse el mismo procedimiento para resolver estructuras isostáticas; por ejemplo, si se prescinde de una de las tres barras de este ejemplo, la resolución es análoga.

Estructuras Reticuladas

Consideremos una estructura de plano medio, compuesta por las piezas $k = 1, ..., m$, sobre la que actúa un sistema de fuerzas *reales* F_j $(j = 1, ..., n)$. Se desprecia, como es habitual, la deformación por axil y cortante. Sea χ el campo de curvaturas real sobre la estructura y $M = EI\,\chi$ la correspondiente ley de flectores. Obsérvese que al usar la relación $M = EI\,\chi$ se está suponiendo que el comportamiento es elástico lineal.

Se considera un campo de movimientos virtuales particular, consistente en un único movimiento $e_j^* = 1$, de valor unidad y aplicado en el mismo punto y en la misma dirección de la fuerza F_j que se quiere calcular. Sea χ^* el campo de curvaturas virtuales debidas a este movimiento virtual e_j^*.

Aplicando el PTV, se tiene:

$$F_j = \sum_k \int_{L_k} (M\,\chi^*)\,ds = \sum_k \int_{L_k} (EI\,\chi\,\chi^*)\,ds \tag{4.26}$$

que permite calcular la fuerza en la dirección de e_j^*.

Ejemplo 4.4.2.2

Hallar la ley de momentos de la viga empotrado-apoyada de la Figura 4.10a sometida a la acción de un momento $\mathcal{M}$ aplicado en el extremo B.
Datos: $\mathcal{M}$, l, I y E.

Sea $\phi_B^* = 1$ un giro virtual unitario en el apoyo B (Figura 4.10b). Como ley compatible se toma una ley de flechas virtual igual a un polinomio cúbico que se anula

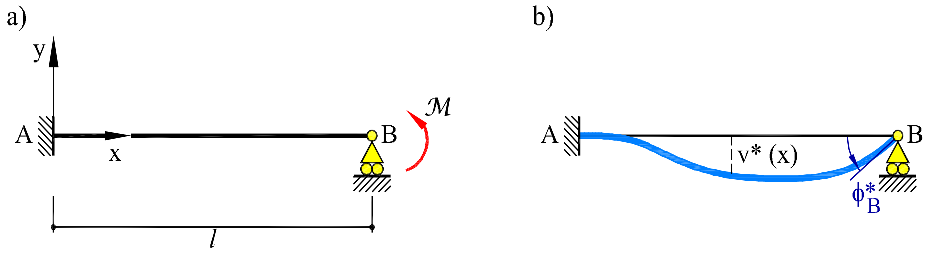


Fig. 4.10: (a) Viga del Ejemplo 4.4.2.2 (b) giro virtual en B

en A y B y con derivada (giro) nula en A. Esto es:

$$v^*(x) = \phi^*_B \; l \left[-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$$

Derivando, se tienen las leyes de giros y curvatura virtuales:

$$\begin{aligned} \phi^*(x) &= \phi^*_B \; \left[-2\left(\frac{x}{l}\right) + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \\ \chi^*(x) &= -\frac{2}{l}\phi^*_B \; \left(1 - 3\frac{x}{l}\right) \end{aligned}$$

El *trabajo virtual externo* es:

$$W^*_e = \mathcal{M} \; \phi^*_B$$

y el *trabajo virtual interno* es:

$$\begin{aligned} W^*_i &= \int_0^l M(x) \; \chi^*(x) \; dx \\ &= -\frac{2}{l}\phi^*_B \; \int_0^l M(x) \left(1 - 3\frac{x}{l}\right) dx \end{aligned}$$

Aplicando el PTV, se puede escribir:

$$\mathcal{M} \; \phi^*_B = -\frac{2}{l}\phi^*_B \; \int_0^l M(x) \left(1 - 3\frac{x}{l}\right) dx$$

y, por tanto, se tiene:

$$\mathcal{M} + \frac{2}{l} \int_0^l M(x) \left(1 - 3\frac{x}{l}\right) dx = 0$$

Esta es una ecuación de equilibrio que no resuelve el problema porque la viga es una vez hiperestática.

Por otro lado, la curvatura real $\chi(x)$ en función del giro real ϕ_B en el apoyo B es:

$$\chi(x) = -\frac{2}{l}\phi_B \left(1 - 3\frac{x}{l}\right)$$

Considerando comportamiento elástico lineal puede escribirse:

$$M(x) = EI\ \chi(x) = -\frac{2EI}{l}\phi_B \left(1 - 3\frac{x}{l}\right)$$

y, sustituyendo en la ecuación de equilibrio se tiene:

$$\mathcal{M} - \frac{4}{l^2}\phi_B\ EI \int_0^l \left(1 - 3\frac{x}{l}\right)^2 dx = 0$$

Resolviendo, se obtiene el valor del giro real en el apoyo B:

$$\phi_B = \frac{\mathcal{M}\ l}{4EI}$$

Una vez calculado el giro real ϕ_B en el extremo B, la ley de momentos flectores de la viga empotrado-apoyada es (Figura 4.11):

$$M(x) = EI\ \chi(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{M} \left(1 - 3\frac{x}{l}\right)$$

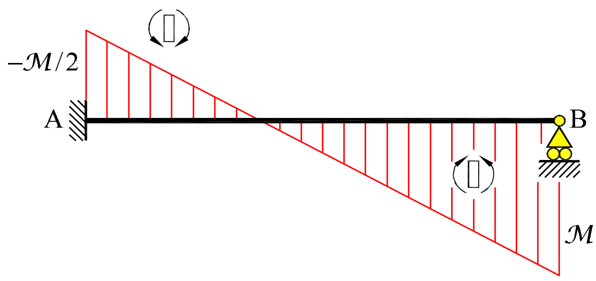


Fig. 4.11: Ley de momentos flectores del Ejemplo 4.4.2.2

Ejemplo 4.4.2.3

Obtener las ecuaciones elásticas de una pieza recta de longitud l y rigidez uniforme EI, utilizando el método del movimiento unidad.

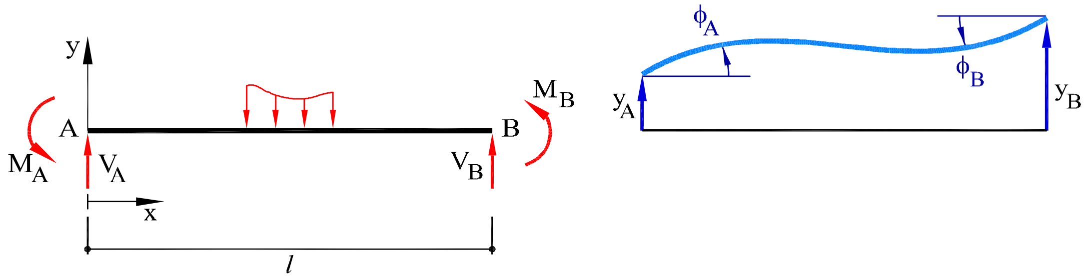


Fig. 4.12: Viga del Ejemplo 4.4.2.3

Consideremos una pieza recta AB, de longitud l y rigidez uniforme EI, tal como la de la Figura 4.12. De forma general, la ley de flechas se puede escribir, en forma paramétrica, como:

$$y(x) = H_A(x)\,\phi_A + H_B(x)\,\phi_B + \overline{H}_A(x)\,y_A + \overline{H}_B(x)\,y_B + y^o(x) \tag{4.27}$$

donde ϕ_A, y_A, ϕ_B e y_B son los giros y las flechas de los extremos A y B, respectivamente, e $y^o(x)$ es la ley de flechas de una pieza *biempotrada* de la misma luz y rigidez cargada de la misma forma.

Las funciones $H_A(x)$, $H_B(x)$, $\overline{H}_A(x)$ y $\overline{H}_B(x)$ son polinomios hermíticos cúbicos de la forma:

$$\begin{aligned}
H_A(x) &= l\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \\
H_B(x) &= l\left[-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \\
\overline{H}_A(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
\overline{H}_B(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3
\end{aligned}$$

que se muestran en la Figura 4.13. $H_A(x)$ es un polinomio que toma valor 0 en A y B, y su derivada tiene valor 1 en A y valor 0 en B. $H_B(x)$ toma valor 0 en A y B, y su derivada tiene valor 0 en A y 1 en B. $\overline{H}_A(x)$ toma valor 1 en A, valor 0 en B y tiene derivada nula en A y B. $\overline{H}_B(x)$ toma valor 0 en A, valor 1 en B y tiene derivada nula en A y B. $y^o(x)$ tiene valor y derivada nula en A y B. De esta forma, se asegura que la ley de flechas en (4.27) es compatible.

Derivando dos veces las expresión (4.27) se tiene la expresión general de la ley de

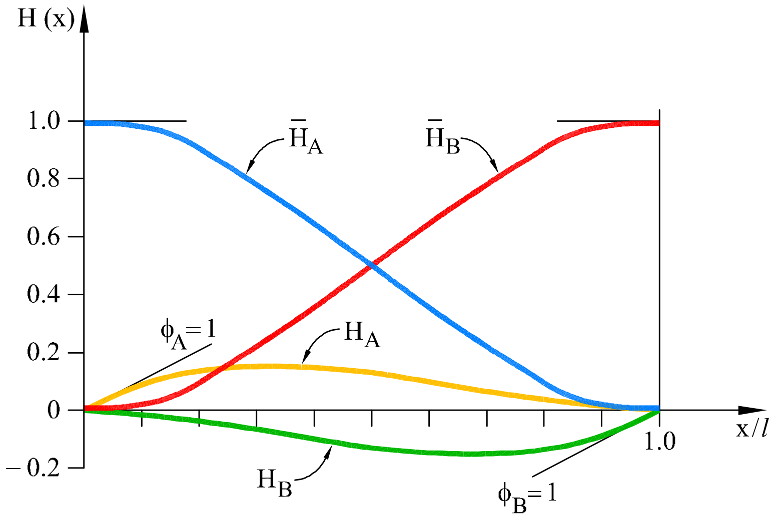


Fig. 4.13: Polinomios hermíticos

curvaturas que es:

$$\begin{aligned}\chi(x) &= H''_A(x)\,\phi_A + H''_B(x)\,\phi_B + \overline{H}''_A(x)\,y_A + \overline{H}''_B(x)\,y_B + \chi^o(x)\\ &= H''_A(x)\,\phi_A + H''_B(x)\,\phi_B + l\left(\overline{H}''_B(x) - \overline{H}''_A(x)\right)\overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x)\end{aligned}$$

donde $H''_A(x)$, $H''_B(x)$, $\overline{H}''_A(x)$ y $\overline{H}''_B(x)$ son las derivadas segundas de los polinomios hermíticos, $\chi^o(x)$ es la curvatura correspondiente a $y^o(x)$ (su derivada segunda) y $\overline{\phi}_{AB} = (y_B - y_A)/l$ es el giro de sólido rígido de la pieza, positivo si es antihorario.

Sean dos movimientos virtuales unitarios: el primero consiste en un giro unitario del nudo A, $\phi^*_A = 1$, y el segundo en un giro unitario del nudo B, $\phi^*_B = 1$. Sus respectivos campos virtuales de curvatura son:

$$\chi^*_A(x) = H''_A(x) \qquad ; \qquad \chi^*_B(x) = H''_B(x)$$

Según el método del movimiento unidad, se tiene:

$$\begin{aligned}M_A &= \int_0^l EI\,\chi(x)\,\chi^*_A(x)\,dx\\ &= \int_0^l EI\,\Big[H''_A(x)\,\phi_A + H''_B(x)\,\phi_B +\\ &\qquad\qquad + l\left(\overline{H}''_B(x) - \overline{H}''_A(x)\right)\overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x)\Big]\,H''_A(x)\,dx\\ &= 4\frac{EI}{l}\phi_A + 2\frac{EI}{l}\phi_B - 6\frac{EI}{l}\overline{\phi}_{AB} + M^o_A\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_B &= \int_0^l EI\,\chi(x)\,\chi_B^*(x)\,dx \\
&= \int_0^l EI\,\Big[H_A''(x)\,\phi_A + H_B''(x)\,\phi_B + \\
&\qquad\qquad + l\,\Big(\overline{H}_B''(x) - \overline{H}_A''(x)\Big)\,\overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x)\Big]\,H_B''(x)\,dx \\
&= 2\frac{EI}{l}\phi_A + 4\frac{EI}{l}\phi_B - 6\frac{EI}{l}\overline{\phi}_{AB} + M_B^o
\end{aligned}
$$

que son las ecuaciones elásticas de la pieza. Obsérvese que los momentos de empotramiento perfecto tienen las expresiones:

$$
\begin{aligned}
M_A^o &= \int_0^l EI\,\chi^o(x)\,H_A''(x)\,dx \\
M_B^o &= \int_0^l EI\,\chi^o(x)\,H_B''(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Considerando otros dos movimientos virtuales unitarios, el primero consistente en un desplazamiento vertical unitario del nudo A, $y_A^* = 1$, y el segundo en un desplazamiento unitario del nudo B, $y_B^* = 1$, se obtienen las expresiones para las fuerzas V_A y V_B. Sus respectivos campos virtuales de curvatura son:

$$
\chi_A^*(x) = \overline{H}_A''(x) \qquad ; \qquad \chi_B^*(x) = \overline{H}_B''(x)
$$

Según el método del movimiento unidad, se tiene:

$$
\begin{aligned}
V_A &= \int_0^l EI\,\chi(x)\,\chi_A^*(x)\,dx \\
&= \int_0^l EI\,\Big[H_A''(x)\,\phi_A + H_B''(x)\,\phi_B + \\
&\qquad\qquad + l\,\Big(\overline{H}_B''(x) - \overline{H}_A''(x)\Big)\,\overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x)\Big]\,\overline{H}_A''(x)\,dx \\
&= \frac{6EI}{l^2}\phi_A + \frac{6EI}{l^2}\phi_B - \frac{12EI}{l^2}\overline{\phi}_{AB} + V_A^o
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_B &= \int_0^l EI\,\chi(x)\,\chi_B^*(x)\,dx \\
&= \int_0^l EI\,\Big[H_A''(x)\,\phi_A + H_B''(x)\,\phi_B + \\
&\qquad\qquad + l\,\Big(\overline{H}_B''(x) - \overline{H}_A''(x)\Big)\,\overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x)\Big]\,\overline{H}_B''(x)\,dx \\
&= -\frac{6EI}{l^2}\phi_A - \frac{6EI}{l^2}\phi_B + \frac{12EI}{l^2}\overline{\phi}_{AB} + V_B^o
\end{aligned}
$$

con las reacciones de empotramiento perfecto:

$$
\begin{aligned}
V_A^o &= \int_0^l EI\,\chi^o(x)\,\overline{H}''_A(x)\,dx \\
V_B^o &= \int_0^l EI\,\chi^o(x)\,\overline{H}''_B(x)\,dx
\end{aligned}
$$

4.5 Trabajos Virtuales Complementarios

4.5.1 Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios

Se denomina *fuerza (o momento) virtual* a un sistema de fuerzas (o momentos) que actúa sobre una estructura y que esté en equilibrio. Por estar "en equilibrio" se entiende que: (a) incluye a las correspondientes reacciones y (b) no modifica el estado real de movimientos y deformaciones, es decir, las fuerzas virtuales son pequeñas.

El *Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios* (PTVC en lo que sigue) se puede enunciar: "*en una estructura con un campo de movimientos y deformaciones* ***compatibles****, el trabajo externo complementario de un campo* ***arbitrario*** *de fuerzas virtuales sobre el campo real de movimientos es igual al trabajo interno complementario de los correspondientes esfuerzos virtuales sobre el campo real de deformaciones*".

Sea una estructura soportada de tal manera que los movimientos de sólido rígido estén impedidos. Consideremos que actúa sobre ella un campo de movimientos reales compatibles, tal que e_i sean los movimientos de ciertos puntos en determinadas direcciones $i = 1, ..., n$, y sean $\left(\varepsilon_x,\, \chi_z,\, \chi_y,\, \gamma_{xy},\, \gamma_{xz},\, \theta\right)$ las correspondientes deformaciones en la estructura. Por otro lado, sea F_i^* un sistema arbitrario de fuerzas virtuales aplicado en los puntos y direcciones $i = 1, ..., n$, y sean $\left(N^*,\, M_z^*,\, M_y^*,\, T_y^*,\, T_z^*,\, M_t^*\right)$ los correspondientes esfuerzos virtuales sobre la piezas de la estructura.

Se define como *trabajo virtual complementario externo* a la expresión:

$$
\overline{W}_e^* = \sum_{i=1}^{n} F_i^*\, e_i \tag{4.28}
$$

y como *trabajo virtual complementario interno* a la expresión:

$$
\overline{W}_i^* = \sum_j \int_{L_j} \left(N^*\,\varepsilon_x + M_z^*\,\chi_z + M_y^*\,\chi_y + T_y^*\,\gamma_{xy} + T_z^*\,\gamma_{xz} + M_t^*\,\theta\right) ds \tag{4.29}
$$

donde la integral se realiza sobre la pieza j-ésima de la estructura y el sumatorio se extiende sobre todas las piezas.

El PTVC implica que:

$$\overline{W}_e^* = \overline{W}_i^* \tag{4.30}$$

o sea, que:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^* \, e_i = \sum_j \int_{L_j} \left(N^* \, \varepsilon_x + M_z^* \, \chi_z \, + M_y^* \, \chi_y + T_y^* \, \gamma_{xy} + T_z^* \, \gamma_{xz} + M_t^* \, \theta \right) ds \tag{4.31}$$

El PTVC puede demostrarse a partir de las ecuaciones diferenciales de equilibrio de la rebanada. Basta para ello integrar éstas, referidas a los campos virtuales de fuerzas y esfuerzos, multiplicadas por los correspondientes campos de movimientos reales, a lo largo de todas las piezas de la estructura e integrar por partes, con las condiciones de contorno adecuadas.

Al PTVC también se le llama Principio de las Fuerzas Virtuales, por razones obvias. Destacaremos que su validez no se restringe al caso de que el comportamiento de la estructura sea elástico y lineal. Por tanto, el PTVC puede aplicarse en el análisis no lineal de estructuras.

Movimientos y deformaciones impuestos

El PTVC puede extenderse fácilmente para tener en cuenta el caso de movimientos y/o deformaciones impuestos sobre la estructura. Basta para ello considerar las contribuciones correspondientes a los campos reales de deformación.

Consideremos, por ejemplo, una estructura de plano medio sometida a un campo impuesto de temperaturas que da lugar a los campos de alargamientos unitarios ε_{x_0} y curvaturas χ_{z_0}. Despreciando la deformación por cortante, las deformaciones generalizadas totales se pueden escribir en la forma:

$$\varepsilon_x^t = \varepsilon_{x_0} + \varepsilon_x \tag{4.32a}$$

$$\chi_z^t = \chi_{z_0} + \chi_z \tag{4.32b}$$

donde (ε_x, χ_z) son los alargamientos y curvaturas debidos a los esfuerzos (N, M_z).

El PTVC se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^* \, e_i = \sum_j \int_{L_j} \left\{ N^* \, \left[\varepsilon_{x_0} + \varepsilon_x \right] + M_z^* \, \left[\chi_{z_0} + \chi_z \right] \right\} ds \tag{4.33}$$

4.5.2 Método de la Fuerza Unidad

El método de la fuerza unidad es un método integral general para calcular movimientos eficaces de fuerzas reales que actúan sobre las estructuras. Asimismo, proporciona una

herramienta válida para resolver estructuras hiperestáticas por el método de flexibilidad.

Estructuras Articuladas

Consideremos una estructura articulada formada por las piezas $k = 1, ..., m$, sobre la que actúa un sistema de fuerzas *reales* F_j $(j = 1, ..., n)$ aplicadas en los nudos. Sean N los correspondientes axiles y sea $\varepsilon_x = \varepsilon_{x_0} + Nl/EA$ el correspondiente campo de alargamientos unitarios real.

Se considera una única fuerza virtual $F_j^* = 1$, de valor unidad aplicada en el mismo punto y en la misma dirección del movimiento e_j que se quiere calcular. Sean N^* los axiles virtuales debidos a esta fuerza virtual F_j^*.

Aplicando ahora el PTVC, se tiene:

$$e_j = \sum_k \int_{L_k} (N^* \varepsilon_x)\, ds = \sum_k \left[N^* \left(\varepsilon_{x_0} + \frac{Nl}{EA} \right) \right]_k \tag{4.34}$$

que permite calcular el movimiento deseado.
Obsérvese que al usar la expresión $\varepsilon_x = (\varepsilon_{x_0} + Nl/EA)$ se está suponiendo comportamiento elástico lineal.

Ejemplo 4.5.2.1

En la estructura de la Figura 4.14a, sometida a una carga horizontal F, calcular los desplazamientos del nudo C, aplicando el método de la fuerza unidad. Las barras son del mismo material y secciones transversales iguales de área A.
Datos: $a = 5\,\text{m}$, $A = 5\,\text{cm}^2$, $F = 20\,\text{kN}$ y $E = 200$ GPa.

Para calcular los movimientos del nudo C comenzamos por determinar el desplazamiento horizontal en dicho nudo. Para ello, se considera que sobre la estructura actúa además del sistema de fuerzas real (Figura 4.14a), una única fuerza virtual horizontal $H_C^* = 1$ aplicada en C (Figura 4.14b).

Las reacciones para ambos sistemas de fuerzas (real y virtual) se muestran en las Figuras 4.14a y b. Los valores de los axiles son:

$$N_1 = \sqrt{2}F \qquad N_1^* = \sqrt{2}\,\text{kN}$$

$$N_2 = -F \qquad N_2^* = -1\,\text{kN}$$

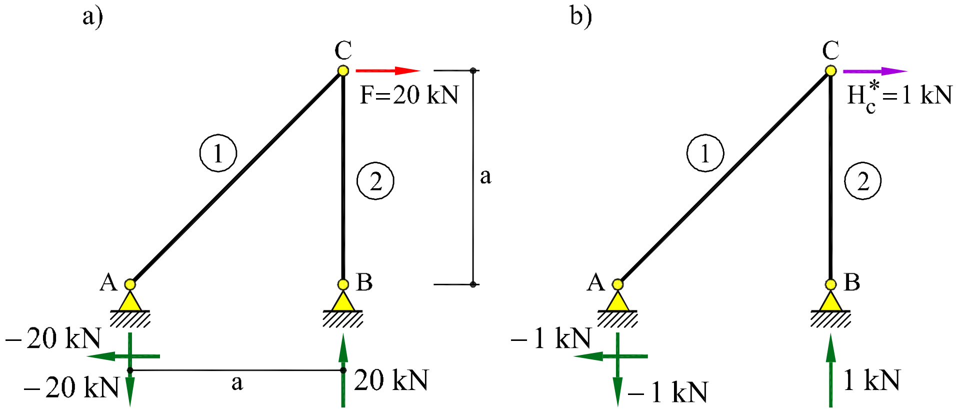


Fig. 4.14: (a) Estructura del Ejemplo 4.5.2.1 (b) fuerza virtual

Aplicando el método de la fuerza unidad puede escribirse:

$$\begin{aligned} u_C &= \sum_k \left(N^* \frac{Nl}{EA} \right)_k = \frac{\left[\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} F \cdot 5\sqrt{2} + (-1)(-F)\,5\right]}{200 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \\ &= \frac{5 \cdot 20 \cdot (2\sqrt{2}+1)}{200 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 3,82 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad (\rightarrow) \end{aligned}$$

El desplazamiento horizontal de C resulta positivo, lo que indica que el sentido del movimiento coincide con el de la fuerza virtual H_C^* supuesta.

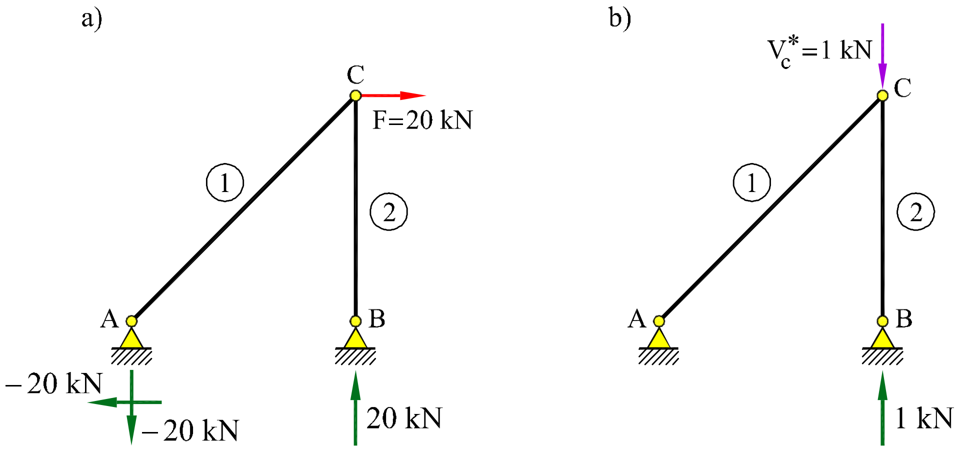


Fig. 4.15: Sistema de fuerzas (a) real y (b) virtual para calcular v_C

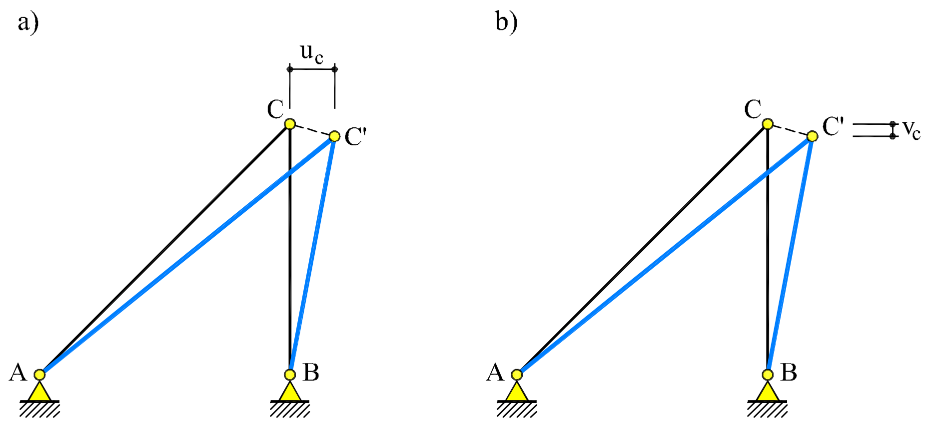


Fig. 4.16: Desplazamiento del nudo C: (a) horizontal (b) vertical

Análogamente, el movimiento vertical v_C del nudo C se calcula suponiendo que sobre la estructura actúa el sistema real de fuerzas y una fuerza *virtual vertical* $V_C^* = 1$ en el nudo C (Figura 4.15b).

En este caso, las reacciones para el sistema de fuerzas real son iguales a las obtenidas anteriormente y las debidas a la fuerza *virtual* son $V_B^* = 1\,\text{kN}$ (Figuras 4.15a y b).

Los axiles en las barras son:

$$N_1 = \sqrt{2}F \qquad N_1^* = 0$$

$$N_2 = -F \qquad N_2^* = -1\,\text{kN}$$

Aplicando el método de la fuerza unidad, puede escribirse:

$$\begin{aligned} v_C &= \sum_k \left(N^* \frac{Nl}{EA} \right)_k = \frac{[(-1)\,(-F)\,5]}{200 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \\ &= \frac{5 \cdot 20}{200 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 1,0 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad (\downarrow) \end{aligned}$$

El desplazamiento vertical resulta positivo lo que indica que el sentido coincide con el de la fuerza virtual supuesta, que es descendente. En las Figuras 4.16a y b se muestran los movimientos del nudo C.

Ejemplo 4.5.2.2

La estructura de la Figura 4.17a está sometida a una carga P según se indica. Aplicando el método de la fuerza unidad, calcular el desplazamiento vertical del nudo D. Las barras son del mismo material y secciones transversales iguales de área A.

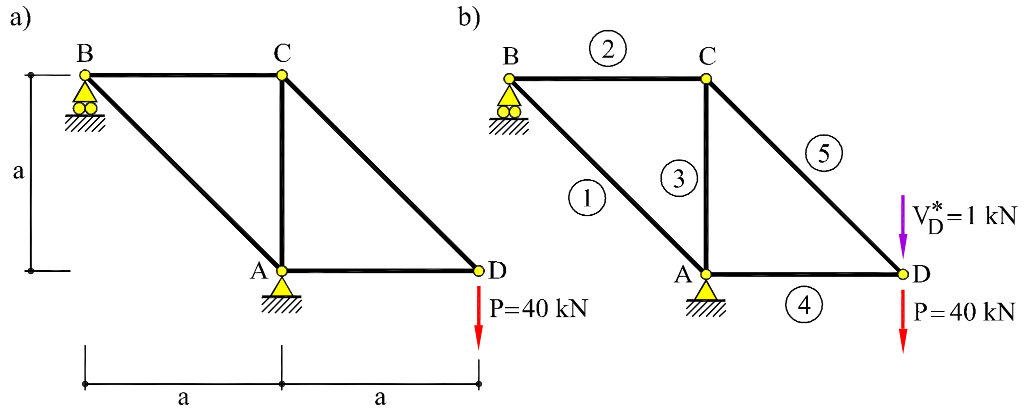


Fig. 4.17: (a) Estructura del Ejemplo 4.5.2.2 (b) fuerza virtual

Datos: $a = 3\,\text{m}$, $A = 10\,\text{cm}^2$, $P = 40\,\text{kN}$ y $E = 200$ GPa.

Para calcular el desplazamiento vertical del nudo D se supone que sobre la estructura actúa el sistema de cargas real (Figura 4.17a) y una única fuerza virtual vertical $V_D^* = 1$ aplicada en el nudo D (Figura 4.17b).

Los axiles en las barras debidos al sistema real de fuerzas ($P = 40\,\text{kN}$) son:

$$N_1 = -\sqrt{2}P \qquad N_2 = P \qquad N_3 = -P$$

$$N_4 = -P \qquad N_5 = \sqrt{2}P$$

y los axiles debidos a la fuerza virtual $V_D^* = 1$, expresados en kN, son:

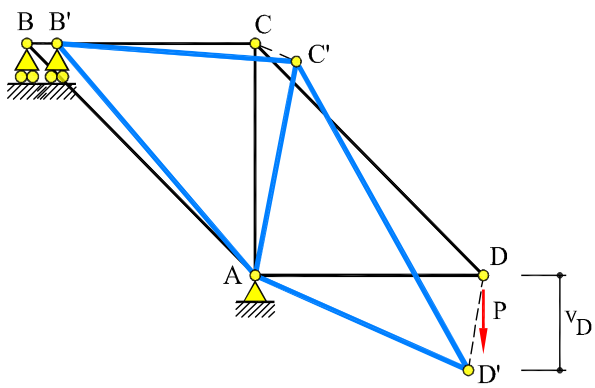


Fig. 4.18: Desplazamiento vertical del nudo D

$$N_1^* = -\sqrt{2} \qquad N_2^* = 1 \qquad N_3^* = -1$$
$$N_4^* = \ -1 \qquad N_5^* = \sqrt{2}$$

Aplicando el método de la fuerza unidad, puede escribirse:

$$\begin{aligned} v_D &= \sum_k \left(N^* \frac{Nl}{EA} \right)_k \\ &= \frac{3P\left(4\sqrt{2}+3\right)}{200 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 5,19 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \qquad (\downarrow) \end{aligned}$$

Notese que el desplazamiento resulta positivo; por tanto, su sentido es descendente (Figura 4.18).

Estructuras Reticuladas

Sea una estructura de plano medio en la que consideramos únicamente la deformación de flexión. La estructura está compuesta por las piezas $k = 1, ..., m$, y sobre ella actúa un sistema de fuerzas F_i $(i = 1, ..., n)$. Sea M la correspondiente ley de flectores, y sea $\chi = \left(\chi_0 + M/EI\right)$ el correspondiente campo de curvaturas, donde se han tenido en cuenta un campo de curvaturas impuestas χ_0.

Sea, además, una única fuerza virtual $F_j^* = 1$, de valor unidad y aplicada en el mismo punto y en la misma dirección del movimiento e_j que se quiere calcular. Sean M^* los momentos flectores virtuales debidos a esta fuerza virtual F_j^*.

Aplicando ahora el Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios, se tiene:

$$e_j = \sum_k \int_{l_k} (M^* \chi)\, ds = \sum_k \int_{l_k} \left(\chi_0 \ M^* + \frac{M\,M^*}{EI} \right) ds \qquad (4.35)$$

que permite calcular el movimiento deseado.

Obsérvese que al usar la expresión $\chi = \left(\chi_0 + M/EI\right)$ se está suponiendo comportamiento elástico lineal.

Ejemplo 4.5.2.3

Calcular la flecha en el punto medio y el giro en los extremos de la viga biapoyada de la Figura 4.19a, sobre la que actúa una carga uniformemente repartida p.

La ley de momentos flectores en la viga debida al sistema real de fuerzas es (Figura 4.19b):

$$M(x) = \frac{p}{2}\, x\, (l - x)$$

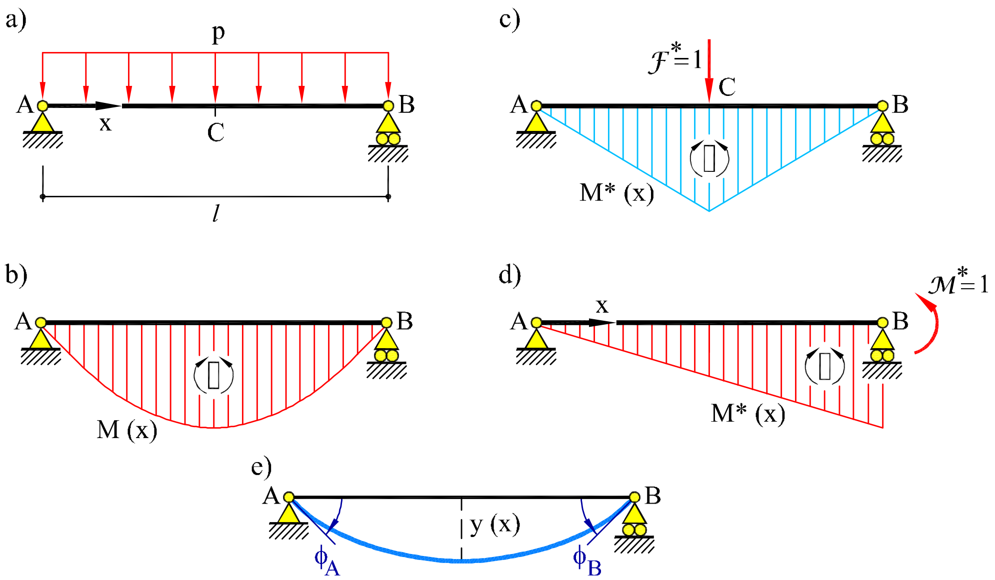


Fig. 4.19: Viga del Ejemplo 4.5.2.3

Por tanto, la correspondiente ley de curvaturas es:

$$\chi(x) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{p}{2EI}x(l-x)$$

Para calcular la flecha en el punto medio utilizando el método de la fuerza unidad, se usa la ley de momentos virtuales debida a una fuerza virtual vertical centrada de valor unidad (Figura 4.19c):

$$M^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{F}^*}{2}x = \dfrac{x}{2} & 0 \leq x \leq \dfrac{l}{2} \\[2ex] \dfrac{\mathcal{F}^*}{2}(l-x) = \dfrac{l-x}{2} & \dfrac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

Entonces, según la Ec. (4.35):

$$y_C = \int_l \left(\frac{M\,(x)\, M^*(x)}{EI} \right) dx = \frac{2}{EI}\int_0^{l/2} \frac{p}{2}x(l-x)\frac{x}{2}dx = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI} \qquad (\downarrow)$$

donde el signo positivo indica que el sentido de la flecha coincide con el de la fuerza $\mathcal{F}^*$. Nótese que se ha usado el hecho de que tanto $M(x)$ como $M^*(x)$ sean simétricos para integrar sólo sobre media viga.

Análogamente, para calcular el giro en el extremo B utilizando el método de la fuerza unidad, se usa la ley de momentos virtuales debida a un momento de valor unidad aplicado en dicho extremo (Figura 4.19d):

$$M^*(x) = \mathcal{M}^* \frac{x}{l} = \frac{x}{l}$$

Ahora, según la Ec. (4.35):

$$\phi_B = \int_l \left(\frac{M\,(x)\,M^*(x)}{EI} \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{p}{2} x(l-x) \frac{x}{l} dx = \frac{1}{24} \frac{pl^3}{EI} \qquad (\circlearrowleft)$$

donde el signo positivo indica que el sentido del giro coincide con el del momento $\mathcal{M}^*$. Por simetría, ϕ_A es igual y opuesto a ϕ_B (Figura 4.19e).

Ejemplo 4.5.2.4

Obtener la flecha máxima y los giros en los extremos de una viga biapoyada de sección rectangular, cuando el intradós y el trasdós sufren variaciones de temperatura $-\Delta t_1$ y Δt_2, respectivamente, con una variación lineal de temperatura a través del canto h de la pieza.

En este caso, la curvatura debida a los efectos térmicos es (ver Ejemplo 3.8.4 del Capítulo 3)

$$\chi_t = -\frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{h} \alpha = -\overline{\nabla t}\, \alpha$$

Para calcular la flecha en el punto medio utilizando el método de la fuerza unidad, se procede como en el Ejemplo anterior (Figura 4.19c), con $M^*(x) = x/2$. Ahora, según la Ec. (4.35):

$$\begin{aligned} y_C &= \int_l (\chi_t(x)\, M^*(x)\,)\, dx \\ &= 2 \int_0^{l/2} (-\overline{\nabla t}\, \alpha) \frac{x}{2} dx = -\frac{1}{8}\, \overline{\nabla t}\, \alpha\, l^2 \qquad (\uparrow) \end{aligned}$$

donde el signo negativo indica que el sentido de la flecha es contrario al de la fuerza $\mathcal{F}^*$, o sea, ascendente. Nótese que se ha usado el hecho de que tanto χ_t como M^* sean simétricos para integrar sólo sobre media viga.

Análogamente, para calcular el giro en el extremo B, ahora con $M^*(x) = x/l$, se tiene (Figura 4.19d):

$$\begin{aligned}\phi_B &= \int_l (\chi_t(x)\, M^*(x))\, dx \\ &= \int_0^l (-\overline{\nabla t}\,\alpha)\frac{x}{l}dx = -\frac{1}{2}\overline{\nabla t}\,\alpha\, l \qquad (\circlearrowright)\end{aligned}$$

donde el signo negativo indica que el sentido del giro es contrario al del momento $\mathcal{M}^*$, o sea, horario. Por simetría, ϕ_A es igual y opuesto a ϕ_B.

Ejemplo 4.5.2.5

Para la estructura de la Figura 4.20a, sometida a las cargas que se indican, calcular el giro en el extremo del voladizo, aplicando el método de la fuerza unidad. La rigidez a flexión de la viga EI es constante.
Datos: $l = 4\,\text{m}$, y $EI = 10^5$ kN·m^2.

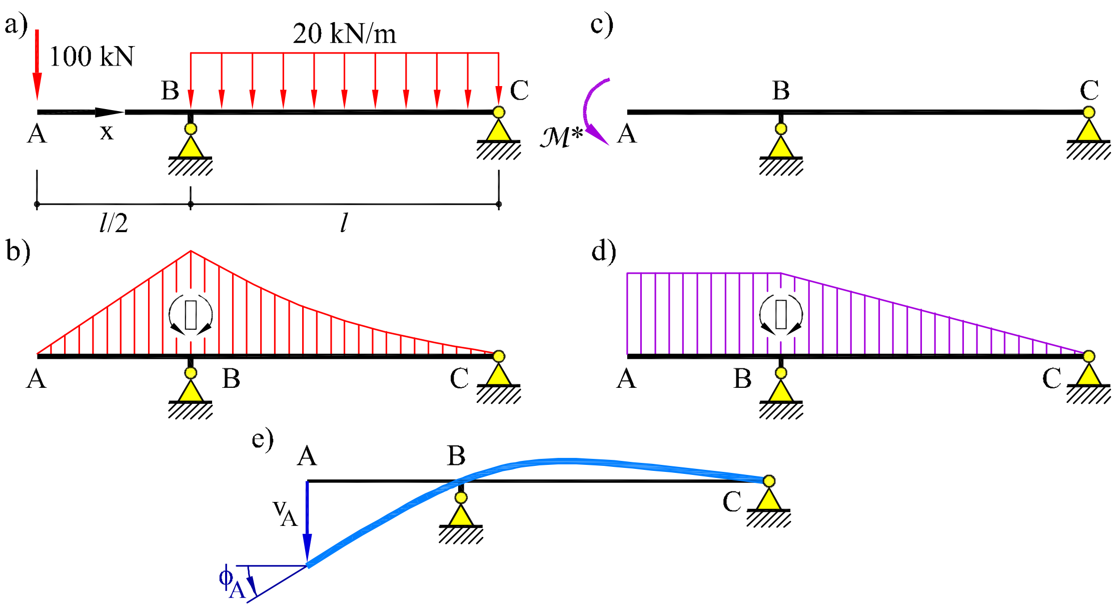


Fig. 4.20: Viga del Ejemplo 4.5.2.5

La ley de momentos flectores en la viga debida al sistema real de fuerzas es (Figura 4.20b):

$$M(x) = \begin{cases} -100x & (AB) \\ -10x^2 + 130x - 420 & (BC) \end{cases}$$

Para calcular el giro en el extremo del voladizo A se usa la ley de momentos virtuales debida a un momento $\mathcal{M}^* = 1$ aplicado en dicho extremo (Figuras 4.20c y 4.20d):

$$M^*(x) = \begin{cases} -1 & (AB) \\ -1,5 + 0,25x & (BC) \end{cases}$$

Aplicando el método de la fuerza unidad, puede escribirse:

$$\begin{aligned} \phi_A &= \int_l \left(\frac{M(x)\, M^*(x)}{EI} \right) dx \\ &= \int_0^2 \frac{(-100x)(-1)}{EI} dx + \int_2^6 \frac{(-10x^2 + 130x - 420)(-1,5 + 0,25x)}{EI} dx \\ &= 4,13 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \qquad (\circlearrowleft) \end{aligned}$$

El signo positivo indica que el sentido del giro coincide con el del momento $\mathcal{M}^*$ (Figura 4.20e).

Ejemplo 4.5.2.6

Para la estructura de la Figura 4.21a, calcular el desplazamiento horizontal del nudo B, aplicando el método de la fuerza unidad. La rigidez a flexión EI es idéntica para todas las barras. Datos: $P = 15\,\text{kN}$, $EI = 10^5$ kN·m^2.

La ley de momentos flectores debida al sistema de cargas real (Figura 4.21b) es:

$$M = \begin{cases} 12y & (AE) \\ 36 & (EB) \\ 36 - 9x & (BC) \end{cases}$$

La ley de momentos flectores virtuales debida a la fuerza virtual $\mathcal{F}^* = 1$, aplicada en B y en la dirección del movimiento que se desea calcular (Figura 4.21c) es:

$$M^* = \begin{cases} y & (AB) \\ 6 - 1,5x & (BC) \end{cases}$$

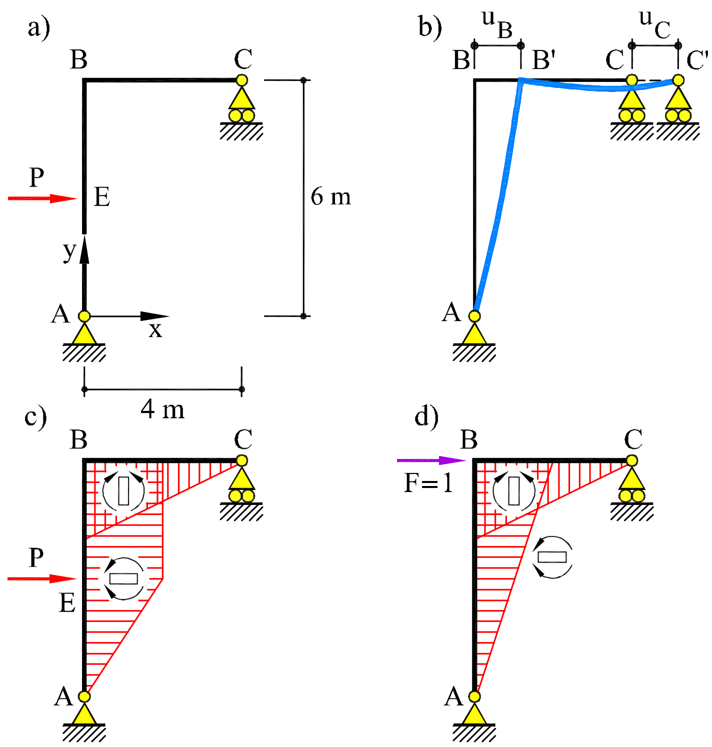


Fig. 4.21: Estructura del Ejemplo 4.5.2.6

Aplicando el método de la fuerza unidad, puede escribirse:

$$\begin{aligned} u_B &= \int_L \left(\frac{M\ M^*}{EI} \right) ds \\ &= \int_0^3 \frac{12y \cdot y}{EI} dy + \int_0^3 \frac{36y}{EI} dy + \int_0^4 \frac{(36-9x)\cdot(6-1,5x)}{EI} dx \\ &= 8,82 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \qquad (\rightarrow) \end{aligned}$$

El signo positivo indica que el sentido del desplazamiento horizontal de B coincide con el sentido de la fuerza virtual (Figura 4.21d).

4.6 Teoremas de Reciprocidad

Los Teoremas de Reciprocidad son aplicables a todos los sistemas estructurales que satisfacen el Principio de Superposición (es decir, a los de comportamiento lineal), y son fundamentales en Mecánica de Estructuras por sus numerosas aplicaciones.

Sea un sistema estructural lineal sobre el que pueden actuar dos sistemas distintos de fuerzas: el sistema F_i $(i = 1, ..., n)$ aplicado en los puntos A_i y el sistema ϕ_j $(j = 1, ..., m)$ aplicado en los puntos Ω_j.

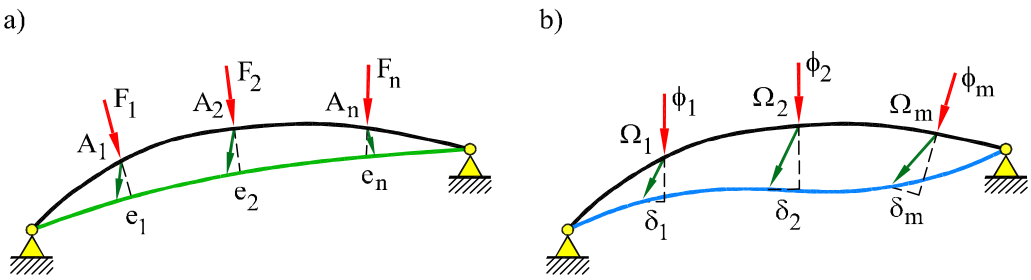


Fig. 4.22: Dos sistemas de fuerzas distintos actuando sobre una estructura

Al aplicar *únicamente* el sistema F_i sobre la estructura, se producen los movimientos eficaces e_i de las fuerzas F_i, en los puntos A_i (Figura 4.22a); se producen también unos movimientos δ'_j en los puntos Ω_j, medidos según las direcciones de las fuerzas ϕ_j.

Al aplicar *únicamente* el sistema ϕ_j, se producen los movimientos eficaces δ_j de las fuerzas ϕ_j, en los puntos Ω_j (Figura 4.22b); también se producen unos movimientos e'_i en los puntos A_i, medidos según las direcciones de las F_i.

Calculemos el trabajo desarrollado al aplicar los dos sistemas de fuerzas conjuntamente, de dos formas alternativas:

1. Se aplica, primero, el sistema de fuerzas F_i y, a continuación, el sistema de fuerzas ϕ_j (Figura 4.23a); la expresión del trabajo realizado por los dos sistemas de fuerzas es:

$$W_e^{[1]} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i\, e_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \phi_j\, \delta_j + \sum_{i=1}^{n} F_i\, e'_i \tag{4.36}$$

   Obsérvese la aparición del tercer término, correspondiente al trabajo recíproco que realizan las fuerzas F_i al aplicar el sistema ϕ_j.

2. Se aplica, primero, el sistema de fuerzas ϕ_j y, después, el sistema F_i (Figura 4.23b), se tiene:

$$W_e^{[2]} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \phi_j\, \delta_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i\, e_i + \sum_{j=1}^{m} \phi_j\, \delta'_j \tag{4.37}$$

   Ahora, el tercer término representa el trabajo recíproco realizado por las fuerzas ϕ_j al aplicar el sistema F_i.

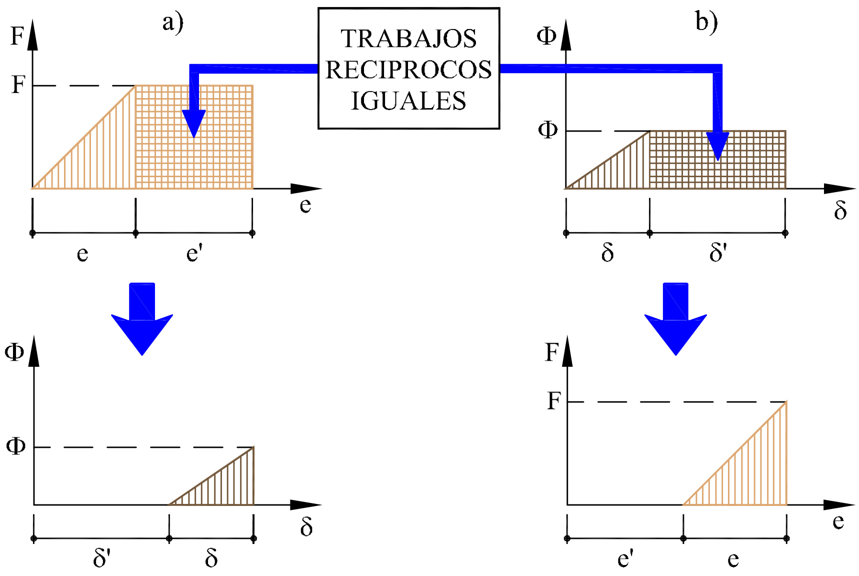


Fig. 4.23: Igualdad de los trabajos recíprocos

Al no depender el trabajo realizado del orden de aplicación de las cargas debe ser igual para ambos procesos de carga. Por tanto:

$$W_e^{[1]} = W_e^{[2]} \tag{4.38}$$

lo que implica:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i e'_i = \sum_{j=1}^{m} \phi_j \delta'_j \tag{4.39}$$

Esta ecuación se conoce como *Teorema de Rayleigh (1873)-Betti (1872)* o *de Reciprocidad de los Trabajos*, y expresa que: *"en una estructura de comportamiento lineal, el trabajo que realizan las fuerzas de un sistema A, debido a los desplazamientos producidos por las fuerzas de un sistema B, es igual al trabajo que realizan las fuerzas de un sistema B, debido a los desplazamientos producidos por las fuerzas del sistema A".*

En el caso particular de que los sistemas sean simplemente dos fuerzas de idéntica magnitud aplicadas en puntos y/o direcciones distintas (Figura 4.24), se deduce como corolario el *Teorema de Maxwell (1864)* o *de Reciprocidad de los Movimientos*, que dice: *"en una estructura de comportamiento lineal, el movimiento de un punto A, en una cierta dirección* **a** *debido a la aplicación de una fuerza de valor F de dirección* ***b*** *en un punto B, es igual al movimiento del punto B, en la dirección* ***b***, *cuando se aplica en el punto A una fuerza de valor F en la dirección* **a**.*"*

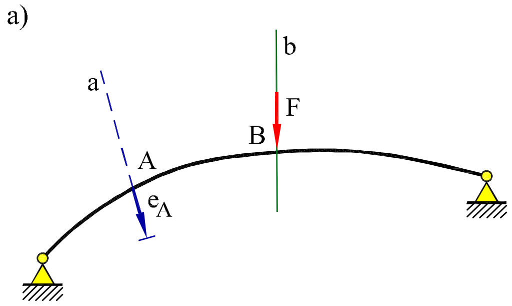


Fig. 4.24: Teorema de reciprocidad de los movimientos

Así, en la estructura articulada de la Figura 4.25 el desplazamiento horizontal en A debido a la fuerza V_B aplicada en B es igual al desplazamiento vertical en B debido a la acción de una fuerza horizontal H_A, del mismo valor, aplicada en el punto A:

$$
\begin{aligned}
u_A &= \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{V_B a}{EA} \\
v_B &= \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{H_A a}{EA}
\end{aligned}
$$

Ambos movimientos eficaces son positivos porque tienen el mismo sentido que las fuerzas H_A y V_B, respectivamente.

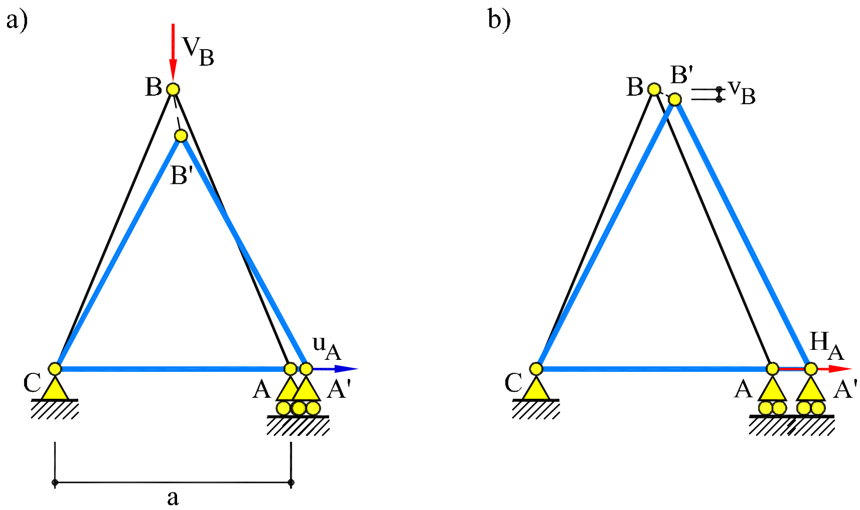


Fig. 4.25: Movimientos en A y B debidos a V_B y H_A, respectivamente

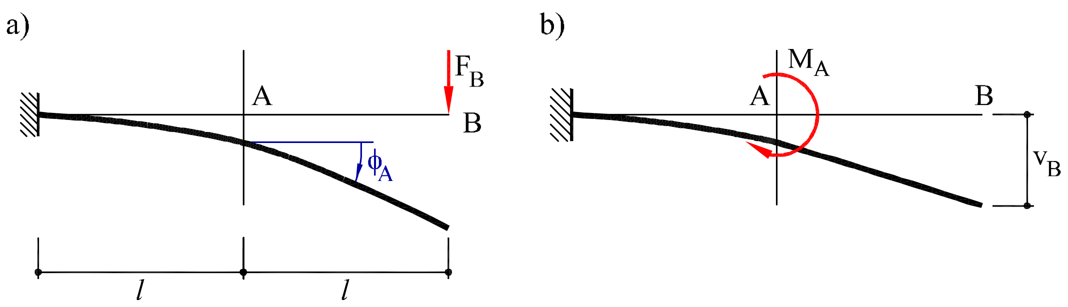


Fig. 4.26: Giro en A y flecha en B, debidos a F_B y M_A,respectivamente

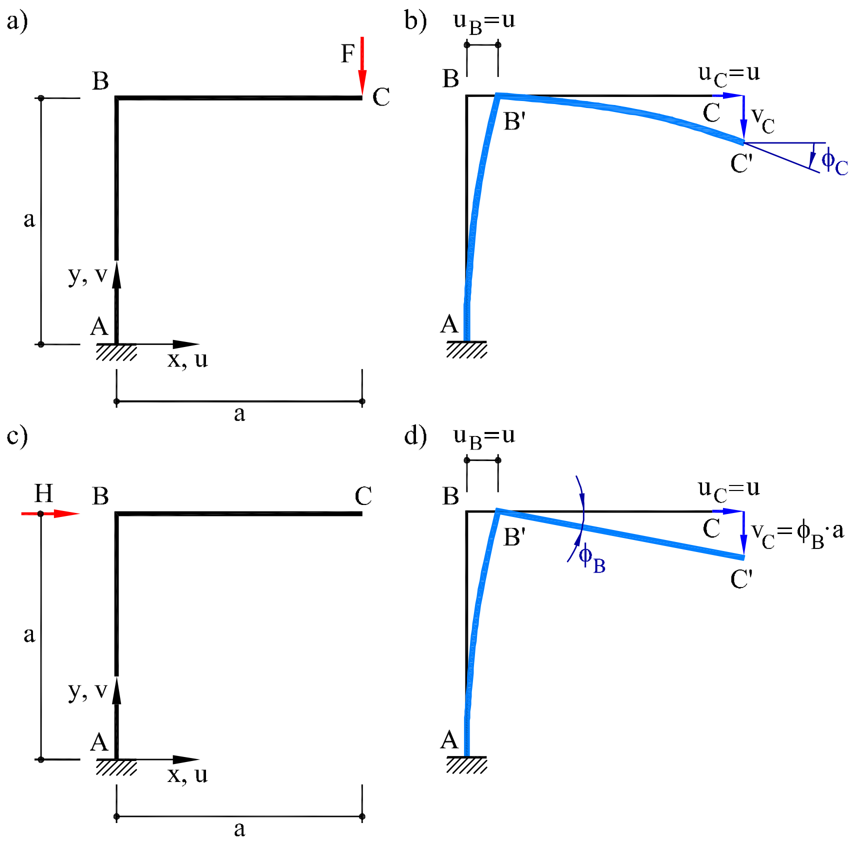


Fig. 4.27: Otra comprobación del Teorema de Maxwell

Análogamente, en el voladizo de la Figura 4.26 el giro en A debido a la fuerza F_B es igual a la flecha en B debida a la acción de un momento M_A, del mismo valor, aplicado en el punto intermedio A:

$$\phi_A = \frac{3}{2}\frac{F_B l^2}{EI}$$

$$v_B = \frac{3}{2}\frac{M_A l^2}{EI}$$

Ambos movimientos eficaces, giro y flecha, son positivos ya que tienen los mismos sentidos que el momento y la fuerza, respectivamente.

Finalmente, en la estructura de la Figura 4.27 el desplazamiento horizontal en B debido a la fuerza F, actuando en C es igual a la flecha en C debida a la fuerza H del mismo valor, actuando en B.

De los resultados obtenidos en el Ejemplo 3.8.5 del Capítulo 3, puede escribirse que para el estado de carga de la Figura 4.27a el desplazamiento horizontal en B (Figura 4.27b) es:

$$u_B = \frac{Fa^3}{2EI} \quad (\rightarrow)$$

Para el estado de carga de la Figura 4.27c, el desplazamiento vertical en C es (Figura 4.27d):

$$v_C = \phi_B \cdot a = \frac{Ha^3}{2EI} \quad (\downarrow)$$

Ambos movimientos eficaces son positivos porque tienen el mismo sentido que las fuerzas F y H, respectivamente.

5 Energía de Deformación

5.1 Introducción

El concepto de *energía* es fundamental en la Física y en las disciplinas relacionadas con ella. Se puede definir la *energía*, en términos sencillos, como la *capacidad de un sistema físico para producir trabajo*.

La energía puede manifestarse de diversas formas, dependiendo de la naturaleza del sistema físico considerado y de las fuerzas presentes en dicho sistema. Así, se habla de energía mecánica, energía eléctrica, energía térmica, etc., cada término referido a una cierta capacidad de generar fuerzas y realizar trabajo (Figura 5.1).

Trabajo y energía son conceptos tan relacionados que se miden en las mismas unidades. Para diferenciarlos, puede decirse que las fuerzas de un sistema *realizan* trabajo, mientras que el sistema *posee* energía.

Además, la *ley de conservación de la energía* establece que, en un sistema aislado, *la energía ni se crea ni se destruye, sino que se transforma de una forma a otra*. Por tanto, para que en un proceso que ocurre en un sistema aislado se realice trabajo, parte de la energía del sistema debe cambiar de forma. La cantidad de trabajo realizado determina el *cambio* de energía que ha ocurrido durante el proceso. Como sólo los cambios son relevantes, *el valor de referencia con respecto al que se mide la energía puede ser establecido arbitrariamente*.

5.2 Energía de deformación y energía potencial total

Como se estableció en el Capítulo anterior, Sección 4.2, para que un sistema estructural sea conservativo no deben existir fuerzas disipativas de fricción; esto exige que no haya rozamientos externos ni internos. En lo que sigue, consideraremos que el proceso de carga es cuasi-estático y adiabático. Además, adoptaremos la hipótesis de pequeños desplazamientos.

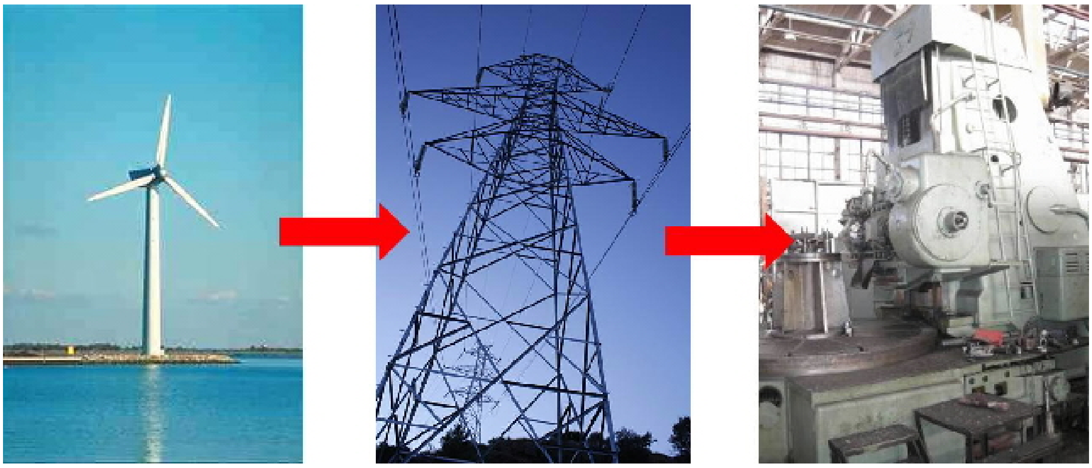


Fig. 5.1: (a) Energía eólica (b) energía eléctrica y (c) energía mecánica

En estas condiciones, la única energía que es necesario considerar en el sistema estructural es aquella que el sistema acumula durante el proceso de deformación, y que se denomina *energía potencial elástica* o *energía de deformación, U*. Si el proceso de descarga se produce también de forma cuasi-estática y adiabática, la energía de deformación almacenada se libera produciendo un trabajo negativo contra las fuerzas exteriores aplicadas (las deformaciones y los movimientos cambian de sentido en la descarga).

Establecidas las anteriores consideraciones, *en el proceso de carga y deformación que lleva a una estructura desde la configuración indeformada a la de equilibrio estático, se llama W_e a la parte del trabajo realizado por las fuerzas exteriores que se invierte en modificar la energía de deformación,* o sea:

$$W_e = \Delta U = U - U_o \tag{5.1}$$

Definiendo como valor de referencia de energía de deformación nula la correspondiente a la configuración indeformada, $U_o = 0$, se puede escribir simplemente:

$$W_e = U \tag{5.2}$$

Recordemos que si el sistema estructural es conservativo, tanto los valores del trabajo de las fuerzas externas como el de la energía de deformación dependen, *exclusivamente*, de la configuración final alcanzada, es decir, de los *valores finales* de las fuerzas y los movimientos. Por tanto, *no dependen* de la historia del proceso de carga ni de las configuraciones intermedias.

A partir de la energía de deformación se define la *energía potencial* de la estructura, como:

$$\Pi = U + H \tag{5.3}$$

donde H es la energía potencial de las fuerzas exteriores, definida como:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} F_i e_i \tag{5.4}$$

donde F_i $(i = 1, ...n)$ son las fuerzas actuantes y e_i sus correspondientes movimientos eficaces.

Alternativamente, se puede decir que en un sistema conservativo, el trabajo complementario realizado durante el proceso de deformación es igual a la energía de deformación complementaria que almacena el sistema; esto es:

$$\overline{W}_e = \overline{U} \tag{5.5}$$

ambas también independientes de la historia del proceso de carga.

La *energía potencial complementaria* es:

$$\overline{\Pi} = \overline{U} + H \tag{5.6}$$

donde H es la energía potencial de las fuerzas exteriores.

Si el sistema es lineal, $W_e = \overline{W}_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i e_i$, $U = \overline{U}$, y $\Pi = \overline{\Pi} = -\sum_{i=1}^{n} F_i e_i$.

5.3 Energía de deformación de una pieza elástica

La energía de deformación (y su complementaria) de una pieza recta (o de pequeña curvatura) se halla calculando el trabajo que los diferentes esfuerzos producen en el proceso de deformación de las rebanadas diferenciales que componen la pieza. Este trabajo es igual a la suma de los trabajos que realiza cada uno de los esfuerzos actuando por separado, ya que cada esfuerzo (debidamente definido) produce un tipo de deformación que no da lugar a que los restantes esfuerzos realicen trabajo (Figura 5.2). Al no producirse trabajos recíprocos, se puede aplicar el Principio de Superposición.

Consideremos una rebanada diferencial de anchura dx y volumen $V_r = A\,dx$, donde A es el área de la sección. Sean (y, z) los ejes principales de inercia de las secciones de la rebanada. Calculemos a continuación la energía de deformación que almacena dicha rebanada sometida a los diferentes esfuerzos que actúan sobre ella.

Esfuerzo axil

Sea N el esfuerzo axil que actúa sobre la rebanada y sea du el alargamiento axial producido, que valen (Figura 5.2a):

$$N = EA\,\varepsilon_x \qquad \text{y} \qquad du = \varepsilon_x\,dx \tag{5.7}$$

donde EA es la rigidez a axil y ε_x es el alargamiento unitario. La energía de deformación que almacena la rebanada es igual al trabajo interno desarrollado por el esfuerzo axil en la deformación; según la fórmula de Clapeyron:

$$dU_N = \frac{1}{2}N\,du = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}\,dx = \frac{1}{2}EA\,\varepsilon_x^2\,dx \tag{5.8}$$

Momento flector

Sea M_z el momento flector de eje z (principal de inercia) que actúa sobre la rebanada y sea $d\phi_z$ el ángulo de flexión relativo entre ambas caras de la rebanada, que valen

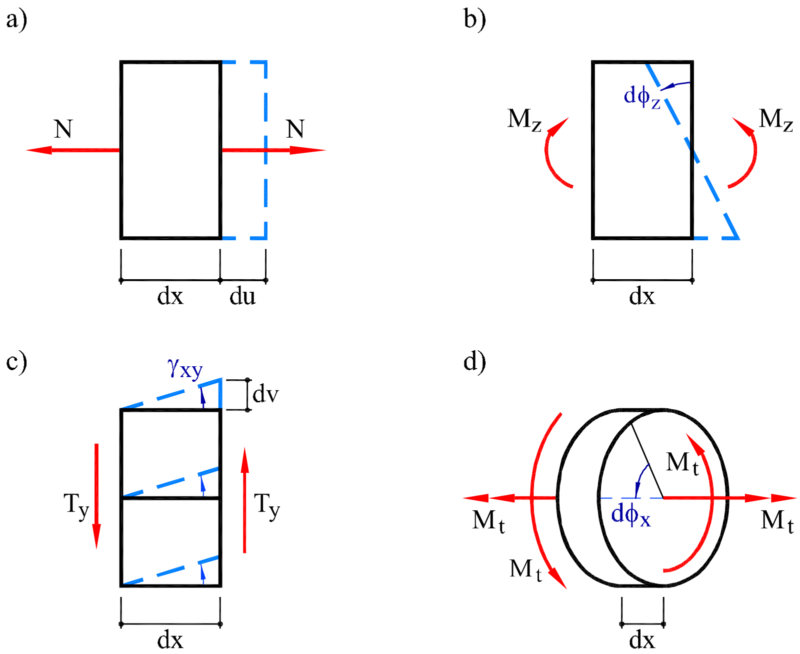


Fig. 5.2: Deformación de la rebanada bajo: (a) axil, (b) flector, (c) cortante y (d) torsor

(Figura 5.2b):

$$M_z = EI_z \chi_z \qquad \text{y} \qquad d\phi_z = \chi_z \, dx \tag{5.9}$$

donde EI_z es la rigidez a flexión según el eje z y χ_z es la curvatura. La energía de deformación que almacena la rebanada es igual al trabajo interno desarrollado por el momento flector en la deformación, esto es:

$$dU_{M_z} = \frac{1}{2} M_z \, d\phi_z = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{EI_z} \, dx = \frac{1}{2} EI_z \, \chi_z^2 \, dx \tag{5.10}$$

Análogamente, en el proceso de deformación de la rebanada producido por un momento flector M_y de eje y (principal de inercia), será:

$$dU_{M_y} = \frac{1}{2} M_y \, d\phi_y = \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} \, dx = \frac{1}{2} EI_y \, \chi_y^2 \, dx \tag{5.11}$$

Nótese que no se producen trabajos recíprocos entre los dos momentos ya que la flexión según un eje principal de inercia es recta, es decir, no produce giro eficaz respecto del otro eje.

Esfuerzo cortante

Sea T_y el esfuerzo cortante paralelo al eje y (principal de inercia), reducido al centro de esfuerzos cortantes, que actúa sobre la rebanada y sea dv el desplazamiento relativo medio entre ambas caras de la rebanada en la dirección y, que valen (Figura 5.2c):

$$T_y = G\Omega_y \, \gamma_{xy} \qquad \text{y} \qquad dv = \gamma_{xy} \, dx \tag{5.12}$$

donde $G\Omega_y$ es la rigidez a la deformación por cortante y γ_{xy} es la distorsión *media* de la rebanada según el eje y. Por definición, Ω_y es el área reducida a cortante de la sección según el eje y. La energía de deformación que almacena la rebanada es igual al trabajo interno desarrollado por el esfuerzo cortante, esto es:

$$dU_{T_y} = \frac{1}{2} T_y \, dv = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{G\Omega_y} \, dx = \frac{1}{2} G\Omega_y \, \gamma_{xy}^2 \, dx \tag{5.13}$$

Análogamente, en el proceso de deformación de la rebanada producida por un esfuerzo cortante T_z paralelo al eje z (principal de inercia) y reducido al centro de esfuerzos cortantes será:

$$dU_{T_z} = \frac{1}{2} T_z \, dw = \frac{1}{2} \frac{T_z^2}{G\Omega_z} \, dx = \frac{1}{2} G\Omega_z \, \gamma_{xz}^2 \, dx \tag{5.14}$$

donde dw el desplazamiento relativo medio entre ambas caras de la rebanada en la dirección z, Ω_z es el área reducida a cortante de la sección según el eje z y γ_{xz} es la correspondiente distorsión media de la rebanada.

Nótese que de nuevo se ha asegurado que no se producen trabajos recíprocos al trabajar según los ejes principales de inercia y reducir los esfuerzos cortantes al centro de dichos esfuerzos.

Momento torsor

Sea M_t el momento torsor, reducido al centro de esfuerzos cortantes, que actúa sobre la rebanada y sea $d\phi_x$ el ángulo de torsión relativo entre ambas caras de la misma, que valen (Figura 5.2d):

$$M_t = GI_t\,\theta \qquad \text{y} \qquad d\phi_x = \theta\,dx \tag{5.15}$$

donde GI_t es la rigidez a torsión y θ es el giro de torsión por unidad de longitud. La energía de deformación que almacena la rebanada es igual al trabajo interno desarrollado por el momento torsor, esto es:

$$dU_{M_t} = \frac{1}{2} M_t\,d\phi_x = \frac{1}{2}\frac{M_t^2}{GI_t}\,dx = \frac{1}{2}\,GI_t\,\theta^2\,dx \tag{5.16}$$

Combinación de solicitaciones

Si sobre una pieza actúan simultáneamente diversos esfuerzos, la energía de deformación de las rebanadas (y su complementaria) será igual a la suma de las energías de deformación correspondientes al trabajo interno debido a cada uno de los esfuerzos por separado, al no haber trabajos recíprocos de unos sobre los otros. Por tanto,

$$dU = d\overline{U} = \frac{1}{2}\left(N\,\varepsilon_x + M_z\,\chi_z + M_y\,\chi_y + T_y\,\gamma_{xy} + T_z\,\gamma_{xz} + M_t\,\theta\right)dx \tag{5.17}$$

que puede expresarse en función de los correspondientes esfuerzos:

$$dU = d\overline{U} = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{T_y^2}{G\Omega_y} + \frac{T_z^2}{G\Omega_z} + \frac{M_t^2}{GI_t}\right)dx \tag{5.18}$$

o, alternativamente, en función de las deformaciones de la rebanada:

$$\begin{aligned} dU \;=\; d\overline{U} \;=\; & \frac{1}{2}(EA\,\varepsilon_x^2 + EI_z\,\chi_z^2 + EI_y\,\chi_y^2 + \\ & + G\Omega_y\,\gamma_{xy}^2 + G\Omega_z\,\gamma_{xz}^2 + GI_t\,\theta^2)\,dx \end{aligned} \tag{5.19}$$

Las expresiones anteriores se pueden integrar a lo largo de la directriz de la viga para obtener la energía de deformación total de la misma:

$$U = \int_L \frac{1}{2}\left(N\,\varepsilon_x + M_z\,\chi_z + M_y\,\chi_y + T_y\,\gamma_{xy} + T_z\,\gamma_{xz} + M_t\,\theta\right)dx \tag{5.20a}$$

$$= \int_L \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{T_y^2}{G\Omega_y} + \frac{T_z^2}{G\Omega_z} + \frac{M_t^2}{GI_t}\right)dx \tag{5.20b}$$

$$= \int_L \frac{1}{2}(EA\,\varepsilon_x^2 + EI_z\,\chi_z^2 + EI_y\,\chi_y^2 + + G\Omega_y\,\gamma_{xy}^2 + G\Omega_z\,\gamma_{xz}^2 + GI_t\,\theta^2)\,dx \tag{5.20c}$$

Estas expresiones, aunque deducidas para piezas de directriz recta, pueden aplicarse también a piezas de pequeña curvatura. Para ello, la energía de deformación de las rebanadas se integra a lo largo de la directriz (curva) de la pieza.

No todos los términos de las expresiones (5.20a) - (5.20c) tienen el mismo orden de magnitud. En piezas de estructuras articuladas que sólo trabajan a axil, se toma:

$$U = \int_L \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{EA}\right)dx = \int_L \frac{1}{2}(EA\,\varepsilon_x^2)dx \tag{5.21}$$

y en el caso en que N y A son constantes:

$$U = \frac{1}{2}\frac{N^2 L}{EA} \tag{5.22}$$

En las estructuras reticuladas, las energías de deformación de flexión y de torsión suelen ser mucho mayores que las de axil y cortante. Por esta razón, para piezas de estructuras reticuladas espaciales se suele tomar:

$$U = \int_L \frac{1}{2}\left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_t^2}{GI_t}\right)dx \tag{5.23a}$$

$$= \int_L \frac{1}{2}\left(EI_z\,\chi_z^2 + EI_y\,\chi_y^2 + GI_t\,\theta^2\right)dx \tag{5.23b}$$

y en piezas de plano medio y emparrillados planos se suele tomar, simplemente:

$$U_{\text{plm}} = \int_L \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{EI_z}dx = \int_L \frac{1}{2}\,EI_z\,\chi_z^2\,dx \tag{5.24a}$$

$$U_{\text{emp}} = \int_L \frac{1}{2}\left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_t^2}{GI_t}\right)dx = \int_L \frac{1}{2}\left(EI_z\,\chi_z^2 + GI_t\,\theta^2\right)dx \tag{5.24b}$$

Debe señalarse, sin embargo, que en casos de compresión excéntrica con poca excentricidad, la energía de deformación debida al esfuerzo axil y la debida al momento flector

pueden ser del mismo orden de magnitud, y, por tanto, deben tenerse en cuenta todos los términos relevantes. Así ocurre, por ejemplo, en el cálculo de arcos.

Para calcular la energía de deformación de una estructura formada por varias piezas basta sumar la energía de deformación correspondiente a cada una de las piezas que la componen. Así, se puede escribir:

$$U_T = \sum_i U_i \tag{5.25}$$

donde U_T es la energía total de deformación de la estructura, y U_i es la energía de deformación correspondiente a la pieza i-ésima.

Movimientos y deformaciones impuestos

El concepto de energía de deformación puede extenderse fácilmente para tener en cuenta el caso de movimientos y/o deformaciones impuestos sobre la estructura. Basta para ello considerar las contribuciones de los correspondientes campos de deformación.

Consideremos, por ejemplo, una pieza de plano medio sometida a un campo impuesto de temperaturas que da lugar a un campo de curvatura $(\chi_z)_o$. La curvatura total se puede escribir en la forma:

$$\chi_z^t = (\chi_z)_o + \chi_z \tag{5.26}$$

donde χ_z es la curvatura debida al momento flector M_z, $\chi_z = M_z/EI_z$. La energía de deformación de la pieza se puede escribir:

$$U = \int_L \frac{1}{2} EI_z \left(\chi_z^t\right)^2 dx = \int_L \frac{1}{2} EI_z \left((\chi_z)_o + \chi_z\right)^2 dx \tag{5.27a}$$

$$= \int_L \frac{1}{2} \left[\frac{M_z^2}{EI_z} + 2M_z (\chi_z)_o + EI_z (\chi_z)_o^2\right] dx \tag{5.27b}$$

Ejemplo 5.3.1

En la estructura articulada de la Figura 5.3a, determinar el desplazamiento horizontal del nudo B utilizando el concepto de trabajo y energía de deformación de la estructura. Todas las barras tienen la misma sección y material.
Datos: $a = 4,5$ m, $h = 6$ m, $A = 15$ cm^2, $E = 200$ GPa.

Para la carga que se indica, $P = 20\,\text{kN}$, los axiles en las barras son:

$$N_1 = 33,3\,\text{kN} \qquad N_2 = -26,7\,\text{kN} \qquad N_3 = -20,0\,\text{kN}$$

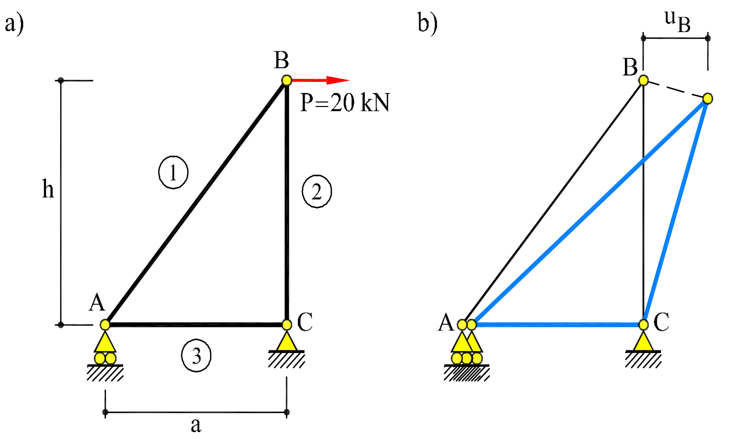


Fig. 5.3: (a) Estructura del Ejemplo 5.3.1 (b) deformada de la estructura

La barra 1 está traccionada y las barras 2 y 3 están comprimidas.

El desplazamiento horizontal u_B del nudo B es el movimiento eficaz de la fuerza P, ya que coincide con la dirección de dicha fuerza (Figura 5.3b). Por tanto, puede aplicarse la expresión (5.2):

$$\frac{1}{2} P u_B = \sum \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA}$$

donde el primer miembro es el trabajo de la fuerza P y el segundo es la energía de deformación de la estructura. Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{1}{2} 20\ u_B = \frac{1}{2 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-4}} \left[(33,3)^2 \cdot 7,5 + (-26,7)^2 \cdot 6,0 + (-20)^2 \cdot 4,5 \right]$$

y resolviendo se obtiene el desplazamiento horizontal del nudo B:

$$u_B = 2,4 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\rightarrow)$$

Ejemplo 5.3.2

Calcular la energía de deformación de un voladizo de longitud l y de sección rectangular $b \times h$ cargado en su extremo libre con una fuerza P (Figura 5.4a).
Datos: $l = 5$ m, $b = 20$ cm, $h = 40$ cm, $P = 10$ kN, $E = 20$ GPa.

Las leyes de esfuerzos son (Figuras 5.4b y c):

$$T(x) = -P \qquad ; \qquad M(x) = -Px$$

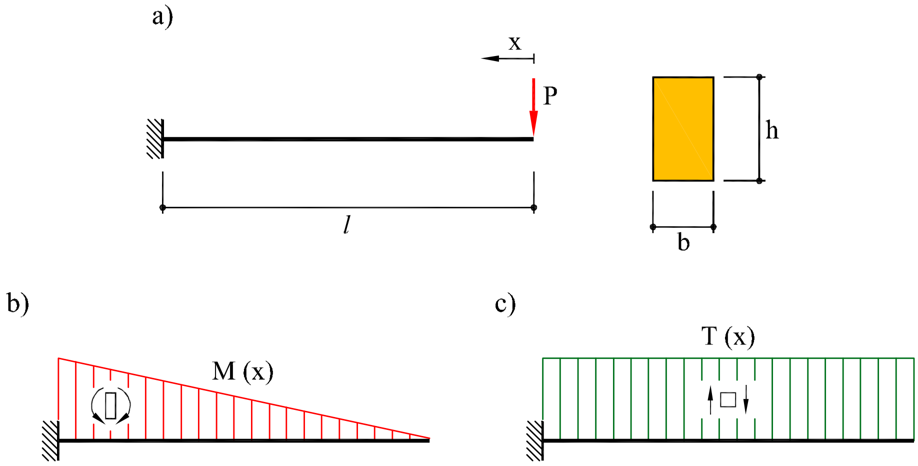


Fig. 5.4: (a) Voladizo del Ejemplo 5.3.2 (b) ley de flectores y (c) ley de cortantes

Por tanto, la energía de deformación es:

$$\begin{aligned} U &= \int_L \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{G\Omega}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^l \frac{(-Px)^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{(-P)^2}{G\Omega} dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{P^2 l^3}{3EI} + \frac{P^2 l}{G\Omega}\right] \end{aligned}$$

Obsérvese que U se puede escribir como una función cuadrática y homogénea de la fuerza P. Esta expresión debe ser idéntica al trabajo desarrollado por la fuerza P en el proceso de deformación y que, según el teorema de Clapeyron, es:

$$W_e = \frac{1}{2} P e$$

donde e es el movimiento eficaz de P, es decir, la flecha en el extremo del voladizo.

Haciendo $U = W_e$, la flecha en el extremo del voladizo es:

$$e = e_M + e_T = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{G\Omega}$$

donde se observan claramente las contribuciones de la deformación debida al flector y la debida al cortante.

Si se calcula la relación entre la energía de deformación debida al esfuerzo cortante y la debida al momento flector, teniendo en cuenta que:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \quad , \quad \Omega = \frac{5}{6}bh \quad , \quad G \simeq \frac{E}{2}$$

se tiene que la relación entre las componentes de la flecha debidas al cortante y al flector es:

$$\frac{e_T}{e_M} = \frac{l/G\Omega}{l^3/3EI} = \frac{6}{10}\left(\frac{h}{l}\right)^2$$

para las relaciones de esbeltez $\lambda = l/h$ siguientes, se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{l}{h} = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{e_T}{e_M} = 0,60\ \% \\ \lambda &= \frac{l}{h} = 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{e_T}{e_M} = 0,15\ \% \end{aligned}$$

Si se calculan estas relaciones para los datos del ejemplo, se tiene:

$$\lambda = \frac{l}{h} = \frac{5,0}{0,4} = 12,5$$

La flecha en el extremo del voladizo debida a flexión y a cortante, respectivamente, es:

$$e_M = 1,95 \cdot 10^{-2}\,\text{m} \qquad \text{y} \qquad e_T = 0,75 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$$

y su relación es:

$$\frac{e_T}{e_M} = \frac{6}{10}\left(\frac{1}{12,5}\right)^2 = 0,384\%$$

Se comprueba, por tanto, que en estructuras reticuladas la energía de deformación del esfuerzo cortante es despreciable frente a la de flexión, situación que suele ocurrir también con el esfuerzo axil. Esto justifica la no consideración de dichos esfuerzos en el cálculo de movimientos en la mayoría de los casos prácticos de cálculo de este tipo de estructuras.

Ejemplo 5.3.3

Calcular la energía de deformación del pórtico de la Figura 5.5a cargado con una fuerza P tal como se indica. Todas las barras del pórtico son del mismo material y tienen igual sección rectangular $b \times h$ (Figura 5.5b). Calcular el desplazamiento vertical en E. Datos: $l = 5\,\text{m}$, $b = 6\,\text{cm}$, $h = 12\,\text{cm}$, $P = 2\,\text{kN}$ y $E = 200$ GPa

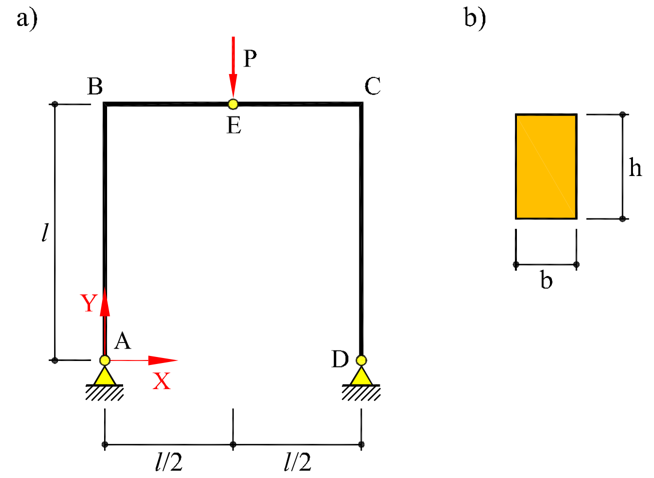


Fig. 5.5: (a) Pórtico del Ejemplo 5.3.3 (b) Sección transversal

La estructura es simétrica y está cargada simétricamente. Las reacciones en los apoyos son:

$$H_A = \frac{P}{4} \qquad V_A = V_D = \frac{P}{2} \qquad H_D = -\frac{P}{4}$$

Las leyes de esfuerzos para cada tramo son (Figuras 5.6a, 5.6b y 5.6c) :

	flectores	cortantes	axiles
Tramo AB :	$M(y) = -\frac{P}{4}y$	$T(y) = \frac{P}{4}$	$N(y) = -\frac{P}{2}$
Tramo BE :	$M(x) = -\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)$	$T(x) = -\frac{P}{2}$	$N(x) = -\frac{P}{4}$

La energía de deformación para cada barra es:

$$\begin{aligned}
U_{AB} &= \frac{1}{2}\left[\int_0^l \frac{(-P/4\ y)^2}{EI}dy + \int_0^l \frac{(P/4\ )^2}{G\Omega}dy + \int_0^l \frac{(-P/2\ )^2}{EA}dy\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{P^2l^3}{48EI} + \frac{P^2l}{16G\Omega} + \frac{P^2l}{4EA}\right] \\
U_{BE} &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{l/2} \frac{(-P/2\ \ (l/2 - x))^2}{EI}dx + \int_0^{l/2} \frac{(-P/2\ )^2}{G\Omega}dx + \int_0^{l/2} \frac{(-P/4\ )^2}{EA}dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{P^2l^3}{96EI} + \frac{P^2l}{8G\Omega} + \frac{P^2l}{32EA}\right]
\end{aligned}$$

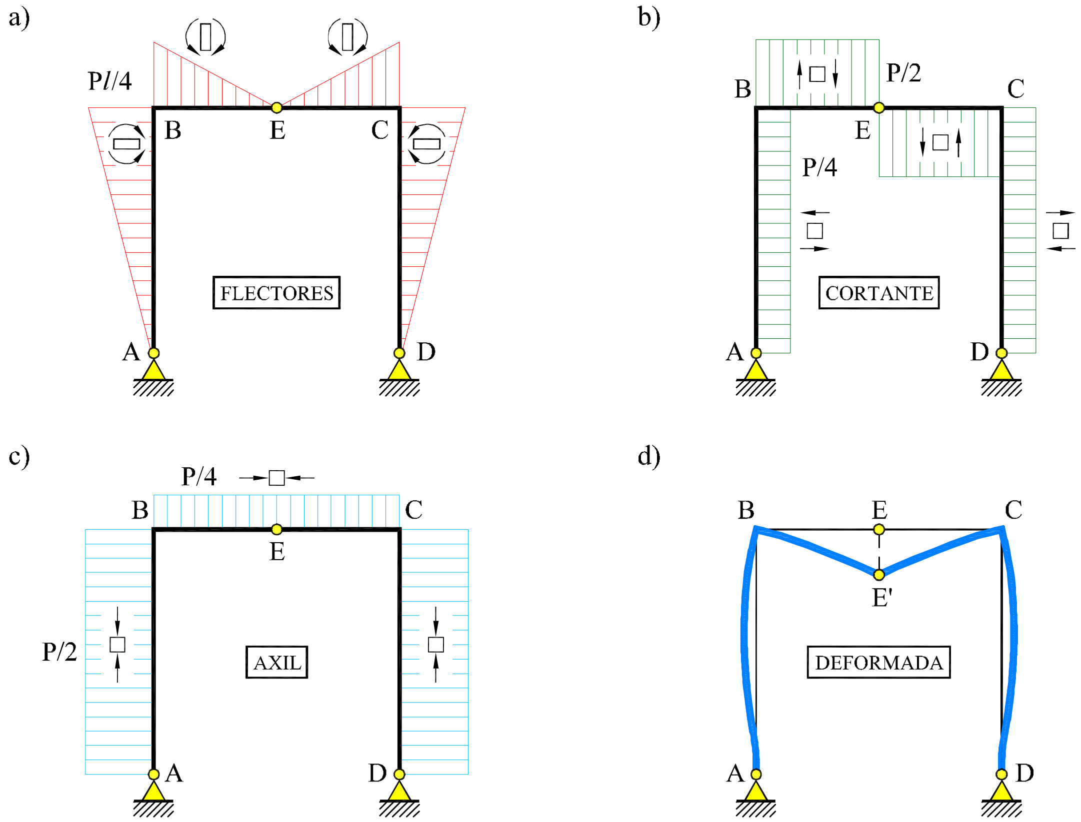


Fig. 5.6: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 5.3.3

Por simetría, la energía de deformación total de la estructura es:

$$U = 2\,(U_{AB} + U_{BE}) = \left[\frac{P^2 l^3}{32EI} + \frac{3P^2 l}{16G\Omega} + \frac{9P^2 l}{32EA}\right]$$

La energía de deformación de la estructura debe ser igual al trabajo desarrollado por la fuerza P en el proceso de deformación. Llamando e al movimiento eficaz de P, se puede escribir:

$$\frac{1}{2}Pe = \left[\frac{P^2 l^3}{32EI} + \frac{3P^2 l}{16G\Omega} + \frac{9P^2 l}{32EA}\right]$$

Por tanto, se tiene (Figura 5.6d):

$$e = e_M + e_T + e_N = \left[\frac{Pl^3}{16EI} + \frac{3Pl}{8G\Omega} + \frac{9Pl}{16EA}\right]$$

donde cada uno de los sumandos del tercer miembro representa la flecha por flexión, cortante y axil, respectivamente. Si se tiene en cuenta que $I = \frac{1}{12}bh^3$, $\Omega = \frac{5}{6}bh$ y $G \simeq E/2$, la flecha en el punto E puede reescribirse:

$$e = e_M + e_T + e_N = \left[\frac{3}{4}\frac{Pl^3}{Ebh^3} + \frac{9}{10}\frac{Pl}{Ebh} + \frac{9}{16}\frac{Pl}{Ebh}\right]$$

Para los datos del Ejemplo:

$$\begin{aligned} e &= e_M + e_T + e_N \\ &= \left(9,04 \cdot 10^{-3} + 6,25 \cdot 10^{-6} + 3,90 \cdot 10^{-6}\right) \text{ m} \\ &= 9,05 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \end{aligned}$$

La relación entre la flecha debida al flector y la debida al cortante más el axil es:

$$\frac{e_T + e_N}{e_M} = 1,95\left(\frac{h}{l}\right)^2 = 1,95\left(\frac{1,2 \cdot 10^{-2}}{5}\right)^2 = 0,112\%$$

El resultado obtenido confirma que en *estructuras reticuladas* la deformación debida al esfuerzo cortante es *despreciable* frente a la de flexión. En general, suele ocurrir lo mismo con la deformación debida al esfuerzo axil. Esto justifica la no consideración de dichos esfuerzos en el cálculo de movimientos, en la mayoría de los casos prácticos de cálculo de estructuras reticuladas.

5.4 Energía potencial mínima

El Teorema de la Energía Potencial Mínima (TEPM) establece que "*de todos los campos de movimientos y deformaciones que son compatibles con las condiciones de contorno de un sistema estructural, aquellos que corresponden a una configuración estable de equilibrio hacen que la energía potencial total del sistema sea mínima*".

Este teorema puede demostrarse a partir del Principio de los Trabajos Virtuales (Sección 4.4.1):

Sea una estructura, compuesta por las piezas $j = 1, ..., m$, sobre la que actúa un sistema de fuerzas F_i $(i = 1, ..., n)$. Sean $(N,\, M_z,\, M_y,\, T_y,\, T_z,\, M_t)$ los correspondientes esfuerzos sobre la piezas de la estructura. Sean e_i los movimientos eficaces de las fuerzas F_i.

Se toma como campo de movimientos virtuales una variación del campo real de movimientos, que es obviamente admisible, $e_i^* = de_i$, donde $d(\cdot)$ indica "variación respecto a los movimientos e_i". Entonces, el campo virtual de curvaturas es:

$$\chi_z^* = d(\chi) = d\left(\frac{M}{EI}\right) \tag{5.28}$$

y, análogamente, para las demás deformaciones generalizadas.

En estas condiciones, el PTV se puede escribir:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_i\, de_i &= \sum_j \left[\int_{L_j} N\, d\left(\frac{N}{EA}\right) + M_z\, d\left(\frac{M_z}{EI_z}\right) + M_y\, d\left(\frac{M_y}{EI_y}\right) + \right. \\ &\left. + T_y\, d\left(\frac{T_y}{G\Omega_y}\right) + T_z\, d\left(\frac{T_z}{G\Omega_z}\right) + M_t\, d\left(\frac{M_t}{GI_t}\right)\right] ds \qquad (5.29)\end{aligned}$$

que puede reescribirse en la forma:

$$\begin{aligned} d \left\{ \sum_j \int_{L_j} \frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{T_y^2}{G\Omega_y} + \frac{T_z^2}{G\Omega_z} + \frac{M_t^2}{GI_t} \right] ds \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{n} F_i\, e_i \right\} &= 0 \qquad (5.30a) \\ d\,\{U + H\} &= 0 \qquad (5.30b) \\ d\Pi &= 0 \qquad (5.30c)\end{aligned}$$

donde:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} F_i\, e_i \qquad (5.31)$$

es la *energía potencial de las fuerzas exteriores* y

$$\Pi = U + H \qquad (5.32)$$

es la *energía potencial total del sistema.*

La energía potencial de las fuerzas exteriores sólo puede definirse si los valores y las direcciones de las fuerzas no dependen de los movimientos. Este es, por ejemplo, el caso bajo hipótesis de pequeños movimientos.

La condición (5.30c) indica que los desplazamientos correspondientes a la estructura en equilibrio hacen que la energía potencial sea *estacionaria*, es decir, un máximo o un mínimo. Se puede demostrar que el equilibrio es estable si se trata, efectivamente, de un *mínimo.*

El teorema de la energía potencial es útil para estudiar estructuras que puedan sufrir inestabilidades, como en el caso del pandeo, y analizar si una determinada configuración de equilibrio es estable o inestable.

Reescribiendo (5.30c) en las variaciones respecto a los movimientos eficaces e_i, se

tiene:

$$
\begin{aligned}
d\Pi &= d\left(U+H\right) && (5.33)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial e_i} de_i - \sum_{i=1}^{n} F_i \, de_i = 0 && (5.34)
\end{aligned}
$$

que debe satisfacerse para cualquier combinación arbitraria de valores de_i. Por tanto, término a término:

$$
\frac{\partial U}{\partial e_i} = F_i \qquad \text{para } \ i = 1, ..., n \tag{5.35}
$$

Este resultado se conoce como el Primer Teorema de Castigliano: "*si la energía de deformación de un sistema estructural se expresa en función de los desplazamientos independientes e_i correspondientes a un sistema de fuerzas F_i, la primera derivada parcial de la energía de deformación respecto a cualquiera de estos desplazamientos es igual a la fuerza F_i en la dirección de e_i*".

El Primer Teorema de Castigliano se generaliza para momentos y giros eficaces, escribiéndose en ese caso:

$$
\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = M_i \qquad \text{para } \ i = 1, ..., n \tag{5.36}
$$

Si el trabajo de las fuerzas se expresa en forma matricial (ver Sección 4.3.1) se tiene:

$$
W_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K} \, \boldsymbol{e}
$$

donde $\boldsymbol{e}$ es el vector de movimientos eficaces y $\boldsymbol{K}$ es la matriz de rigidez de la estructura.

Si el sistema es conservativo, $U = W_e$ y, además

$$
H = -\boldsymbol{e}^T \mathbf{f}
$$

donde $\mathbf{f}$ es el vector de fuerzas exteriores. Por tanto, la energía potencial total es

$$
\Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K} \, \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^T \mathbf{f} \tag{5.37}
$$

y el TEPM es:

$$
\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{e}} = \boldsymbol{K} \, \boldsymbol{e} - \mathbf{f} = 0 \tag{5.38}
$$

que, como veremos, son las *ecuaciones de equilibrio* de la estructura.

Ejemplo 5.4.1

La estructura de la Figura 5.7 está formada por tres barras del mismo material e idéntica sección. Para una carga vertical P como se indica, determinar los axiles actuantes sobre cada barra, aplicando el TEPM. Calcular la energía potencial del sistema y verificar en qué condiciones es mínima.

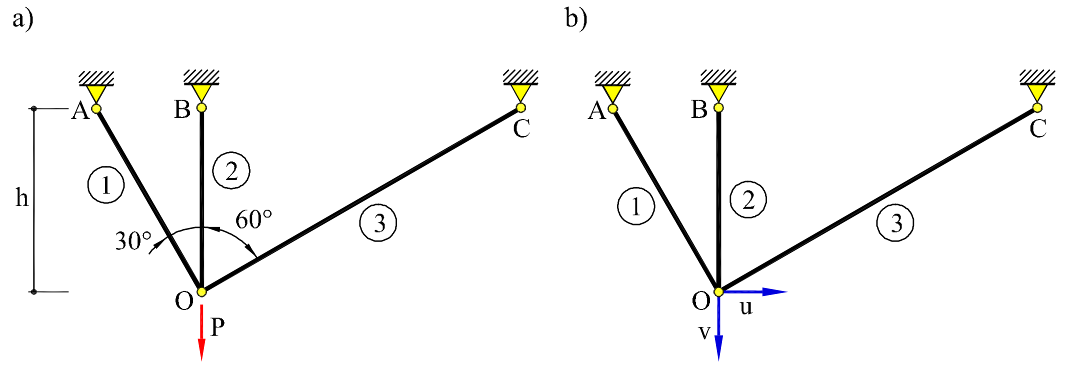


Fig. 5.7: (a) Estructura del Ejemplo 5.4.1 (b) desplazamientos del punto O

Se consideran los desplazamientos, horizontal u y vertical v, del punto O. Los alargamientos de las barras pueden expresarse en función de dichos movimientos (ver Sección 3.3.2):

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}v + \frac{1}{2}u \qquad \delta_2 = v \qquad \delta_3 = \frac{1}{2}v - \frac{\sqrt{3}}{2}u$$

La energía de deformación de las barras es:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}\frac{EA}{l_1}\delta_1^2 = \frac{1}{2}\frac{EA}{h\sqrt{3}/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v + \frac{1}{2}u\right)^2 \\ U_2 &= \frac{1}{2}\frac{EA}{l_2}\delta_2^2 = \frac{1}{2}\frac{EA}{h}v^2 \\ U_3 &= \frac{1}{2}\frac{EA}{l_3}\delta_3^2 = \frac{1}{2}\frac{EA}{2h}\left(\frac{1}{2}v - \frac{\sqrt{3}}{2}u\right)^2 \end{aligned}$$

y la energía de deformación de la estructura es:

$$U = \frac{1}{2}\frac{EA}{h}\left(\frac{3\sqrt{3}+9}{8}v^2 + \frac{6-2\sqrt{3}}{8}uv + \frac{3+\sqrt{3}}{8}u^2\right)$$

Aplicando el TEPM (o el 1er Teorema de Castigliano):

$$\left.\begin{array}{lcll} \dfrac{\partial U}{\partial u} = 0 & \Longrightarrow & \left(3+\sqrt{3}\right)u + \left(3-\sqrt{3}\right)v & = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial v} = P & \Longrightarrow & \left(3-\sqrt{3}\right)u + \left(9+3\sqrt{3}\right)v & = \dfrac{8P}{k} \end{array}\right\}$$

donde $k = EA/h$. En forma matricial:

$$\frac{k}{8}\begin{bmatrix} 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} & 3\sqrt{3}+9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones permiten resolver la estructura a pesar de ser una vez hiperestática. Resolviendo el sistema, se obtienen los valores de los movimientos del punto O:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+3}\,\frac{P}{k} \\ v &= +\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3}\,\frac{P}{k} \end{aligned}$$

Una vez determinados los movimientos del punto O, pueden calcularse los axiles de

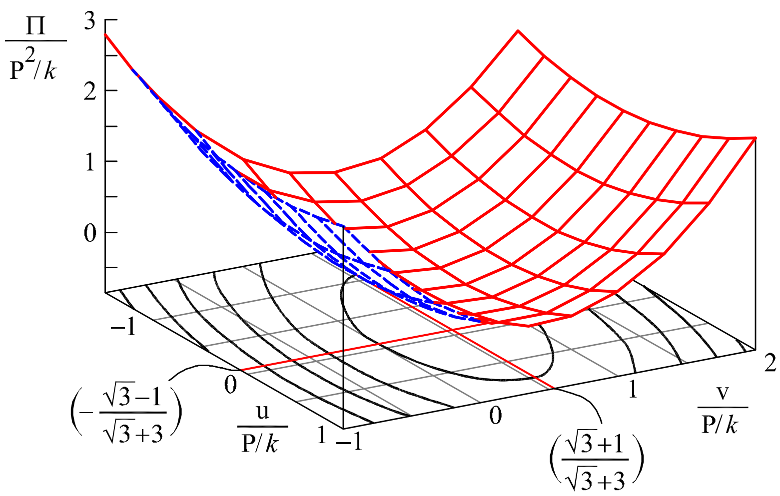


Fig. 5.8: Energía potencial en función de los desplazamientos u y v

las barras:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}P \\ N_2 &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3}P \\ N_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}+3}P \end{aligned}$$

Todos los axiles son positivos; por tanto, todas las barras están traccionadas.

La energía potencial del sistema es:

$$\Pi = U + H = \frac{1}{2}\frac{k}{8}\left[\left(3+\sqrt{3}\right)u^2 + \left(6-2\sqrt{3}\right)uv + \left(3\sqrt{3}+9\right)v^2\right] - Pv$$

Esta función es un paraboloide que se representa en la Figura 5.8 en forma adimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\Pi}{P^2/k} &= \frac{1}{16}\left[\left(3+\sqrt{3}\right)\left(\frac{u}{P/k}\right)^2 + \left(6-2\sqrt{3}\right)\left(\frac{u}{P/k}\right)\left(\frac{v}{P/k}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(3\sqrt{3}+9\right)\left(\frac{v}{P/k}\right)^2\right] - \left(\frac{v}{P/k}\right) \end{aligned}$$

Obsérvese que la energía tiene un mínimo para los desplazamientos de la solución estable de equilibrio.

Ejemplo 5.4.2

La estructura articulada de la Figura 5.9a está formada por cinco barras del mismo material e idéntica sección. Para una carga vertical P según se indica, determinar los axiles actuantes sobre cada barra, aplicando el TEPM.
Datos: $l = 6\,\text{m}$, $A = 5\,\text{cm}^2$, $P = 100\,\text{kN}$ y $E = 200$ GPa.

La estructura es una vez hiperestática y el grado de indeterminación cinemática es igual a dos, los desplazamientos verticales de los nudos C y D. Además, la estructura es simétrica y la carga también lo es. Por tanto, las reacciones, los axiles y los alargamientos serán simétricos respecto al eje de simetría.

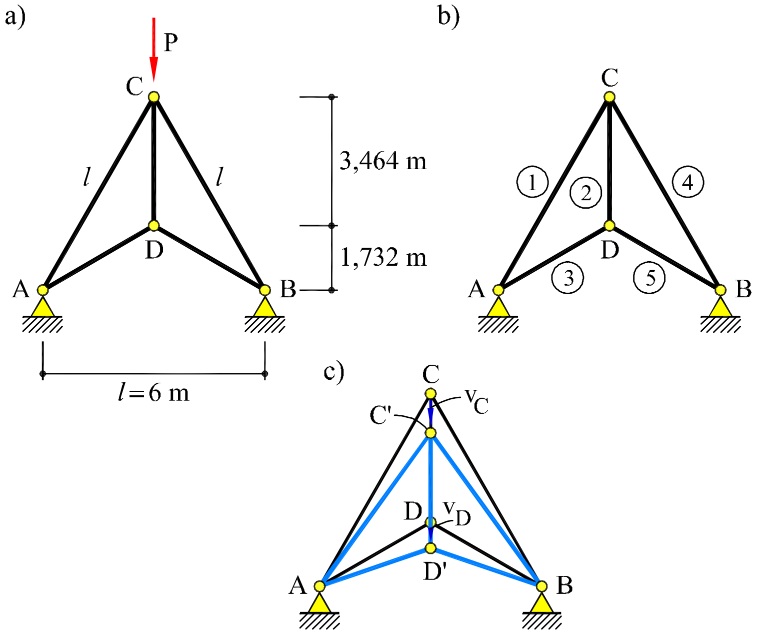


Fig. 5.9: (a) Estructura del Ejemplo 5.4.2, (b) numeración y (c) deformada

Sean v_C y v_D los desplazamientos verticales de C y D, respectivamente. El alargamiento de cada barra en función de dichos movimientos es (Figuras 5.9b y 5.9c):

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} v_C \\ \delta_2 &= v_D - v_C \\ \delta_3 &= -\frac{1}{2} v_D \end{aligned}$$

Por simetría, los alargamientos $\delta_4 = \delta_1$ y $\delta_5 = \delta_3$.

La energía de deformación de cada barra es:

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{EA}{L_i} \delta_i^2$$

Llamando $k = EA/l_2$, la energía de deformación de la estructura es:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} k \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} v_C^2 \right) + v_D^2 - 2 v_D \, v_C + v_C^2 + 2 \left(\frac{1}{4} v_D^2 \right) \right] \\ &= \frac{k}{4} \left[\left(\sqrt{3} + 2 \right) v_C^2 - 4 v_D \, v_C + 3 v_D^2 \right] \end{aligned}$$

La energía potencial de las fuerzas exteriores es:

$$H = -Pv_C$$

Por tanto, la energía potencial del sistema es:

$$\begin{aligned}\Pi &= U + H \\ &= \frac{k}{4}\left[\left(\sqrt{3}+2\right)v_C^2 - 4v_D\ v_C + 3v_D^2\right] - Pv_C\end{aligned}$$

De la minimización de la energía del sistema:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{e}} = 0$$

se obtiene:

$$\frac{k}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3}+2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} v_C &= 2,89 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\downarrow) \\ v_D &= 1,93 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

Conocidos los movimientos incógnitas se determinan los axiles en las barras:

$$\begin{aligned} N_1 &= -41,7\,\text{kN} \\ N_2 &= -27,7\,\text{kN} \\ N_3 &= -27,2\,\text{kN} \end{aligned}$$

Por simetría, $N_4 = N_1$ y $N_5 = N_3$.

Ejemplo 5.4.3

Obtener las ecuaciones elásticas de flexión y de cortante de una pieza recta de longitud l y rigidez EI (Figura 5.10), aplicando el TEPM.

La ley de flechas, en forma paramétrica, es:

$$y(x) = H_A(x)\phi_A + H_B(x)\phi_B + \overline{H}_A(x)y_A + \overline{H}_B(x)y_B + y^o(x)$$

donde ϕ_A, ϕ_B, y_A, e y_B, son los giros y las flechas de los extremos A y B, respectivamente; $y^o(x)$ es la ley de flechas de una viga biempotrada de la misma luz y rigidez,

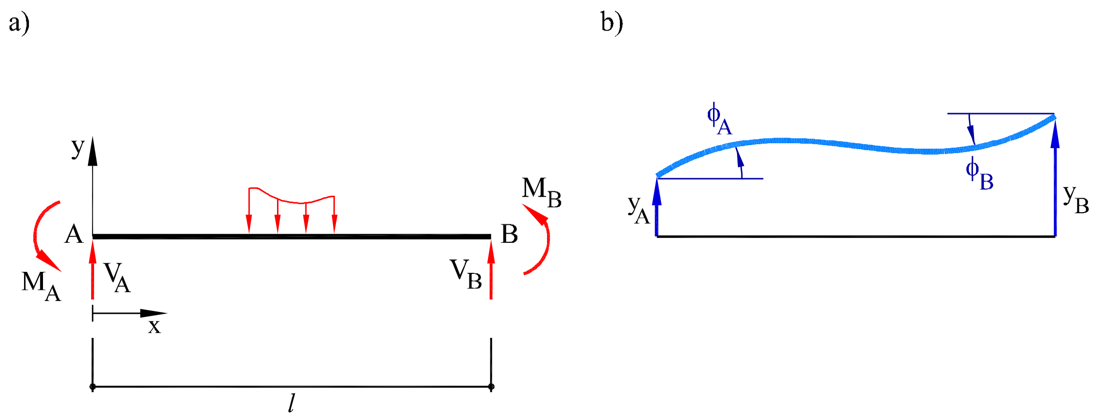


Fig. 5.10: (a) Estructura del Ejemplo 5.4.3, (b) numeración y (c) deformada

cargada de la misma forma. Las funciones $H_A(x)$, $H_B(x)$, $\overline{H}_A(x)$ y $\overline{H}_B(x)$ son polinomios hermíticos (ver Ejemplo 4.4.2.3 del Capítulo 4).

Derivando dos veces la ley de flechas se tiene la expresión general de la ley de curvaturas:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= H''_A(x)\,\phi_A + H''_B(x)\,\phi_B + \overline{H}''_A(x)\,y_A + \overline{H}''_B(x)\,y_B + \chi^o(x) \\ &= H''_A(x)\,\phi_A + H''_B(x)\,\phi_B + l\left(\overline{H}''_B(x) - \overline{H}''_A(x)\right)\overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x) \end{aligned}$$

donde $H''_A(x)$, $H''_B(x)$, $\overline{H}''_A(x)$ y $\overline{H}''_B(x)$ son las derivadas segundas de los polinomios hermíticos, $\chi^o(x)$ es la curvatura correspondiente a $y^o(x)$ (su derivada segunda) y $\overline{\phi}_{AB} = (y_B - y_A)\,/l$ es el giro de sólido rígido de la pieza, positivo si es antihorario.

La energía de deformación es:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_0^l EI\;\chi^2(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[H''_A(x)\,\phi_A + H''_B(x)\,\phi_B + \left(\overline{H}''_B(x) - \overline{H}''_A(x)\right)l\,\overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x)\right]^2 dx \end{aligned}$$

Para el caso $\chi^o(x) = 0$ se tiene:

$$U = \frac{2EI}{l}\left[\phi_A^2 + \phi_A\phi_B + \phi_B^2 - 3\,(\phi_A + \phi_B)\,\overline{\phi}_{AB} - 3\,\overline{\phi}_{AB}^2\right]$$

donde U es una función cuadrática de los giros y desplazamientos en los extremos de la pieza.

Aplicando el TEPM, la primera derivada de la energía de deformación respecto a ϕ_A y ϕ_B, respectivamente, nos proporciona el respectivo valor del momento M_A y M_B en los extremos de la pieza:

$$\begin{aligned}
M_A &= \frac{\partial U}{\partial \phi_A} = \int_0^l EI\ \chi(x) \frac{\partial \chi(x)}{\partial \phi_A} dx \\
&= \int_0^l EI \left[H_A''(x)\, \phi_A + H_B''(x)\, \phi_B + \left(\overline{H}_B''(x) - \overline{H}_A''(x) \right) l\, \overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x) \right] H_A''(x) dx \\
&= 4\frac{EI}{l}\phi_A + 2\frac{EI}{l}\phi_B - 6\frac{EI}{l}\overline{\phi}_{AB} + M_A^o
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_B &= \frac{\partial U}{\partial \phi_B} = \int_0^l EI\ \chi(x) \frac{\partial \chi(x)}{\partial \phi_B} dx \\
&= \int_0^l EI \left[H_A''(x)\, \phi_A + H_B''(x)\, \phi_B + \left(\overline{H}_B''(x) - \overline{H}_A''(x) \right) l\, \overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x) \right] H_B''(x) dx \\
&= 2\frac{EI}{l}\phi_A + 4\frac{EI}{l}\phi_B - 6\frac{EI}{l}\overline{\phi}_{AB} + M_B^o
\end{aligned}$$

Estas expresiones son las *ecuaciones elásticas de flexión* de la pieza. Los términos M_A^o y M_B^o son los momentos de empotramiento perfecto y su expresión es:

$$\begin{aligned}
M_A^o &= \int_0^l EI\chi^o(x) H_A''(x) dx \\
M_B^o &= \int_0^l EI\chi^o(x) H_B''(x) dx
\end{aligned}$$

La ley de momentos de la pieza, en función de los momentos en los extremos es:

$$M(x) = M_A + (M_B - M_A)\,\frac{x}{l} + M^o(x)$$

La curvatura de la deformada es:

$$\chi(x) = \frac{1}{EI}\left[M_A + (M_B - M_A)\,\frac{x}{l} \right] + \chi^o(x)$$

y la ley de flechas es:

$$y(x) = P_3(x) + y^o(x)$$

En las expresiones anteriores, $M^o(x)$, $\chi^o(x)$ e $y^o(x)$ son las leyes de momentos, de curvatura y de flechas, respectivamente, en la pieza biempotrada. El término $P_3(x)$ es un polinomio cúbico en x.

Si ahora se halla la primera derivada de la energía respecto a la flecha en los extremos A y B, respectivamente, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
V_A &= \frac{\partial U}{\partial y_A} = \int_0^l EI\ \chi(x) \frac{\partial \chi(x)}{\partial y_A} dx \\
&= \int_0^l EI \left[H_A''(x)\, \phi_A + H_B''(x)\, \phi_B + \left(\overline{H}_B''(x)\ - \overline{H}_A''(x) \right) l\, \overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x) \right] \left(- \frac{H_A''(x)}{l} \right) dx \\
&= 6 \frac{EI}{l^2} \phi_A + 6 \frac{EI}{l^2} \phi_B - 12 \frac{EI}{l^3} \overline{\phi}_{AB} + V_A^o \\
V_B &= \frac{\partial U}{\partial y_B} = \int_0^l EI\ \chi(x) \frac{\partial \chi(x)}{\partial y_B} dx \\
&= \int_0^l EI \left[H_A''(x)\, \phi_A + H_B''(x)\, \phi_B + \left(\overline{H}_B''(x)\ - \overline{H}_A''(x) \right) l\, \overline{\phi}_{AB} + \chi^o(x) \right] \left(\frac{H_B''(x)}{l} \right) dx \\
&= -6 \frac{EI}{l^2} \phi_A - 6 \frac{EI}{l^2} \phi_B + 12 \frac{EI}{l^3} \overline{\phi}_{AB} + V_B^o
\end{aligned}
$$

Estas expresiones son las *ecuaciones elásticas de cortante* de la viga. Los términos V_A^o y V_B^o son los cortantes de empotramiento perfecto y su expresión es:

$$
\begin{aligned}
V_A^o &= \int_0^l EI \chi^o(x) \left(- \frac{H_A''(x)}{l} \right) dx \\
V_B^o &= \int_0^l EI \chi^o(x) \left(\frac{H_B''(x)}{l} \right) dx
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.4.4

Hallar la ley de momentos de la viga empotrado-apoyada de la Figura 5.11a, sometida a la acción de un momento $\mathcal{M}$ en el extremo B, aplicando el TEPM.

El único movimiento de extremo que provoca el momento $\mathcal{M}$ es un giro ϕ_B (Figura 5.11b). Las leyes de flechas, giros y curvaturas correspondientes son:

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \phi_B\ l \left[- \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \\
\phi(x) &= \phi_B \left[-2 \frac{x}{l} + 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \\
\chi(x) &= -\frac{2}{l} \phi_B \left(1 - 3 \frac{x}{l} \right)
\end{aligned}
$$

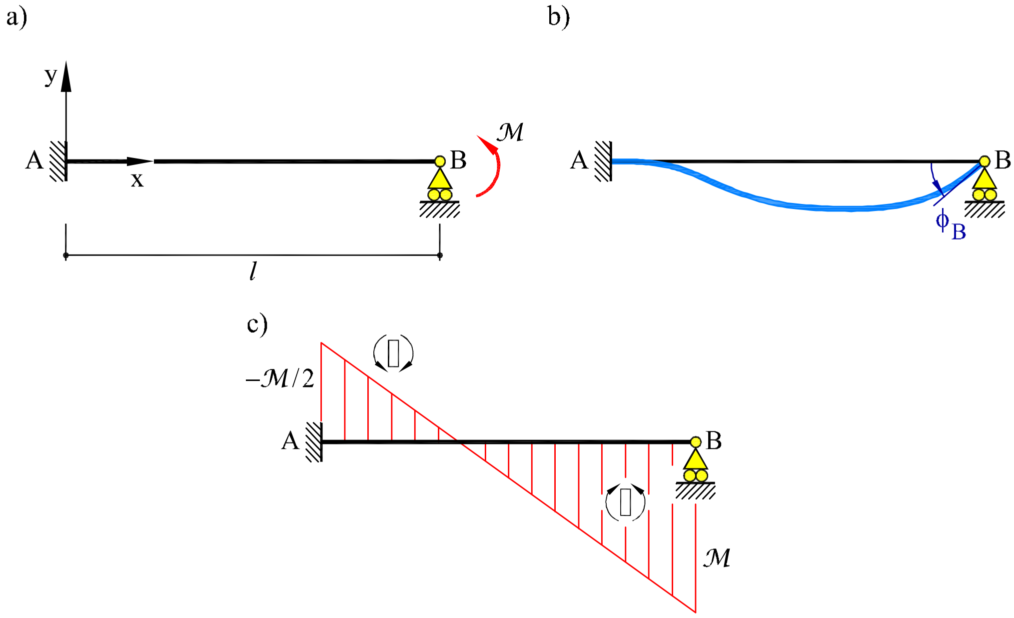


Fig. 5.11: (a) Viga del Ejemplo 5.4.4 (b) deformada (c) ley de momentos flectores

La energía de deformación de la viga es:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\ \chi^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[-\frac{2}{l}\phi_B\left(1-3\frac{x}{l}\right)\right]^2 dx = \frac{2EI}{l}\phi_B^2$$

Aplicando el TEPM:

$$\mathcal{M} = \frac{\partial U}{\partial \phi_B} = \frac{4EI}{l}\phi_B$$

Esta ecuación resuelve la estructura a pesar de ser una vez hiperestática. El giro en B resulta:

$$\phi_B = \frac{\mathcal{M}\ l}{4EI}$$

En la Figura 5.12 se representa el valor de la energía potencial del sistema en función del giro ϕ_B, en forma adimensional, con $K = EI/l$. Puede verse que el valor de ϕ_B obtenido (configuración de equilibrio estable) corresponde a un valor mínimo de la energía potencial de la estructura.

Sustituyendo en la expresión de la curvatura el valor del giro ϕ_B, la ley de momentos de la viga empotrado-apoyada es (Figura 5.11c):

$$M(x) = EI\chi(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{M}\left(1-3\frac{x}{l}\right)$$

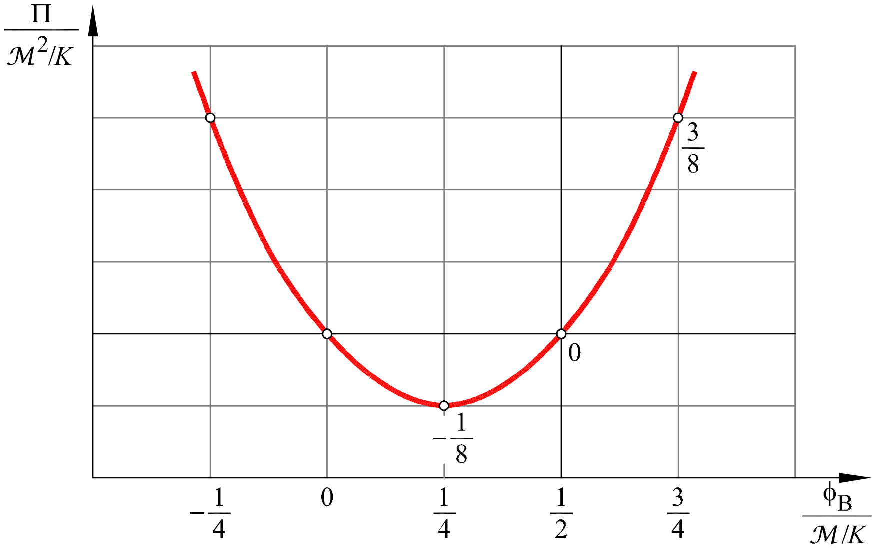


Fig. 5.12: Energía potencial en función del giro ϕ_B

Ejemplo 5.4.5

Resolver la estructura de la Figura 5.13a bajo las cargas que se indican, utilizando el TEPM.

La estructura es tres veces hiperestática. Despreciando la deformación por axil y cortante, y considerando la simetría de la estructura y de la carga, la estructura es intraslacional y el grado de indeterminación cinemática es igual a dos (Figura 5.13b). Las incógnitas cinemáticas son los giros ϕ_B y ϕ_C. Sin embargo, por simetría, debe ser $\phi_B = -\phi_C$.

Si se hace $K = EI/l$, la energía de deformación de las barras es (ver Ejemplo 5.4.3):

$$\begin{aligned} U_{AB} &= 2K\phi_B^2 \\ U_{BC} &= 2K\left(\phi_B^2 + \phi_B\phi_C + \phi_C^2\right) \\ U_{CD} &= 2K\phi_C^2 \end{aligned}$$

y la energía de deformación de la estructura es:

$$U = \sum_i U_i = 2K\left(2\phi_B^2 + \phi_B\phi_C + 2\phi_C^2\right)$$

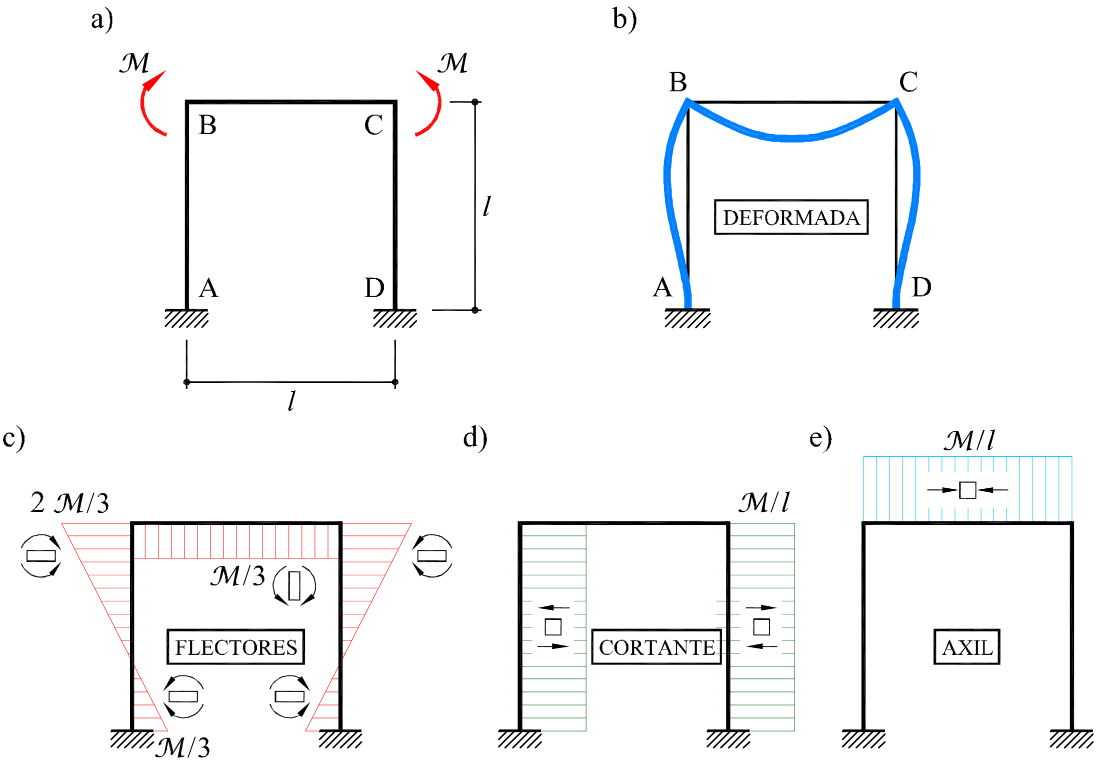


Fig. 5.13: Pórtico del Ejemplo 5.4.5, deformada y leyes de esfuerzos

Aplicando el TEPM puede escribirse:

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_B} = -\mathcal{M} = 2K\,(4\phi_B + \phi_C)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_C} = \mathcal{M} = 2K\,(\phi_B + 4\phi_C)$$

que en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_B \\ \phi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{M}/2K \\ \mathcal{M}/2K \end{bmatrix}$$

Resolviendo se obtiene:

$$\phi_B = -\phi_C = -\frac{\mathcal{M}}{6K}$$

Sustituyendo el valor de ϕ_B hallado, los momentos en los extremos de las barras son:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2K\phi_B &&= -\frac{1}{3}\mathcal{M} \\ M_{BA} &= 2K\left(2\phi_B\right) &&= -\frac{2}{3}\mathcal{M} \\ M_{BC} &= 2K\left(2\phi_B + \phi_C\right) &&= -\frac{1}{3}\mathcal{M} \end{aligned}$$

Una vez calculados los momentos en los extremos de la barras pueden deducirse fácilmente las leyes de esfuerzos de la estructura (Figuras 5.13c, 5.13d y 5.13e).

5.5 Energía potencial complementaria estacionaria

El Teorema de la Energía Potencial Complementaria Estacionaria (TEPCE) establece que "*de todos los campos de fuerzas y esfuerzos que están en equilibrio en un sistema estructural, aquellos que corresponden a una configuración deformada compatible con las condiciones de contorno hacen que la energía potencial total complementaria del sistema sea estacionaria*". En ciertos casos se puede demostrar que, además de estacionaria, la energía potencial total complementaria es mínima. Así ocurre, por ejemplo, en las estructuras elásticas lineales de las que nos ocupamos en este libro. Este teorema puede demostrarse a partir del PTVC (Sección 4.5.1).

Sea una estructura compuesta por las piezas $j = 1, ..., m$, sobre la que actúa un sistema de fuerzas F_i $(i = 1, ..., n)$ tales que e_i $(i = 1, ..., n)$ sean sus movimientos eficaces y $(\varepsilon_x, \chi_z, \chi_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \theta)$, sean las correspondientes deformaciones.

Se toma como campo de fuerzas virtuales una variación del campo real de fuerzas, $F_i^* = dF_i^*$, donde $d(\cdot)$ indica "variación respecto a las fuerzas F_i". Entonces, el campo virtual de esfuerzos es:

$$N^* = d(N) = d(EA\varepsilon_x) \tag{5.39}$$

y, análogamente, para los demás esfuerzos.

En estas condiciones, el PTVC se puede escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} dF_i\, e_i \;\; = \;\; \sum_j \Bigg[\int_{L_j} & \varepsilon_x d\left(EA\,\varepsilon_x\right) + \chi_z\, d\left(EI_z\, \chi_z\right) + \chi_y d\left(EI_y\, \chi_y\right) + \\ & + \gamma_{xy} d\left(G\Omega_y \gamma_{xy}\right) + \gamma_{xz} d\left(G\Omega_z \gamma_{xz}\right) + \theta d\left(GI_t \theta\right) \Big]\, ds \end{aligned} \tag{5.40}$$

que puede reescribirse como:

$$
\begin{aligned}
d\left\{\sum_j \int_{L_j} \frac{1}{2}\left[EA\varepsilon_x^2 + EI_z\chi_z^2 + EI_y\chi_y^2 + G\Omega_y\gamma_{xy}^2 + G\Omega_z\gamma_{xz}^2 + GI_t\theta^2\right] ds \right. \\
\left. - \sum_{i=1}^{n} F_i\, e_i \right\} &= 0 \quad (5.41a) \\
d\left\{\overline{U} + H\right\} &= 0 \quad (5.41b) \\
d\overline{\Pi} &= 0 \quad (5.41c)
\end{aligned}
$$

La condición (5.41c) indica que las fuerzas en equilibrio hacen que la energía potencial complementaria sea estacionaria.

El teorema de la energía potencial total complementaria puede usarse para derivar ecuaciones de compatibilidad en estructuras hiperestáticas.

Reescribiendo (5.41c) en las variaciones respecto a las fuerzas F_i, se tiene:

$$
\begin{aligned}
d\overline{\Pi} &= d\left(\overline{U} + H\right) \\
&= \sum_{i=n}^{n} \frac{\partial \overline{U}}{\partial F_i} dF_i - \sum_{i=1}^{n} e_i\, dF_i = 0
\end{aligned}
\qquad (5.42)
$$

que debe satisfacerse para cualquier combinación arbitraria de valores de dF_i. Por tanto, término a término:

$$
\frac{\partial \overline{U}}{\partial F_i} = e_i \qquad \text{para } \; i = 1, ..., n \qquad (5.43)
$$

Este resultado se conoce como Segundo Teorema de Castigliano: "*si la energía (complementaria) de deformación de un sistema estructural se expresa en función de las fuerzas independientes* F_i *correspondientes a un sistema de movimientos* e_i, *la primera derivada parcial de la energía de deformación respecto a una fuerza cualquiera* F_i *es igual al movimiento* e_i *en la dirección de* F_i ".

El Segundo Teorema de Castigliano se generaliza para momentos y giros eficaces, escribiéndose en ese caso:

$$
\frac{\partial \overline{U}}{\partial M_i} = \varphi_i \qquad \text{para } \; i = 1, ..., n \qquad (5.44)
$$

En forma matricial, se puede escribir:

$$
\overline{U} = \overline{W}_e = \frac{1}{2}\, \mathbf{f}^T \boldsymbol{B}\; \mathbf{f} \qquad (5.45)
$$

donde $\mathbf{f}$ es el vector de fuerzas exteriores y $\boldsymbol{B}$ es la matriz de flexibilidad de la estructura. Si el sistema es conservativo, $\overline{U} = \overline{W}_e$ y, además:

$$H = -\mathbf{f}^T \boldsymbol{e} \tag{5.46}$$

Por tanto, la energía potencial total complementaria es:

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}\, \mathbf{f}^T \boldsymbol{B}\ \mathbf{f} - \mathbf{f}^T \boldsymbol{e} \tag{5.47}$$

y el TEPCM es:

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial \mathbf{f}} = \boldsymbol{B}\ \mathbf{f} - \boldsymbol{e} = 0 \tag{5.48}$$

Comparando las Ecs. (5.48) y (5.38) se tiene que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}^{-1}$.

Cálculo de Movimientos

El TEPCM (y el Segundo Teorema de Castigliano) se usa para calcular movimientos. En este sentido, su utilidad es análoga a la del PTVC y el método de la Fuerza Unidad. Se utiliza también para resolver estructuras hiperestáticas por el método de compatibilidad, tal como se trata en el Capítulo 6.

En los Ejemplos que siguen se ilustra el uso de este teorema para calcular movimientos eficaces. Antes, cabe hacer algunas observaciones de interés:

1. Los movimientos eficaces tienen signo. Así, un valor negativo del movimiento eficaz debe interpretarse como que el movimiento eficaz tiene sentido opuesto a la fuerza.
2. La energía de deformación debe escribirse en función de las fuerzas exteriores, exclusivamente. En consecuencia, *las reacciones isostáticas no deben aparecer en la expresión de la energía de deformación*, sino que deben eliminarse de ella expresándolas en función de las fuerzas exteriores.
3. En una estructura simétrica cargada de forma simétrica (o antisimétrica), la energía de deformación de la estructura completa es igual al doble de la energía de las dos mitades simétricas.
4. Para calcular el movimiento, según una cierta dirección, de un punto en el que *no hay* una fuerza exterior aplicada, se puede poner en dicho punto una fuerza ficticia $\mathcal{F}$, según la dirección de interés, y añadir ésta al sistema de cargas. El correspondiente movimiento eficaz será correcto al particularizar la solución para el valor $\mathcal{F} = 0$.

5. Para calcular movimientos debidos a campos de deformaciones impuestas debe usarse la expresión de la energía interna de la Ec. (5.27b), así como poner una fuerza ficticia $\mathcal{F}$, en el punto y según la dirección de interés. El correspondiente movimiento eficaz será correcto al particularizar la solución para el valor $\mathcal{F} = 0$. Este procedimiento es completamente equivalente a utilizar el Método de la Fuerza Unidad (ver Sección 4.5.2 y Ejemplo 4.5.2.3).

6. Para hallar el desplazamiento *relativo* entre dos puntos según una cierta dirección, se aplican dos fuerzas (ficticias o no) iguales y opuestas en dichos puntos y en la dirección de interés.

Ejemplo 5.5.1

La estructura articulada de la Figura 5.14a está formada por siete barras del mismo material y secciones transversales iguales. Para la fuerza P que se indica, determinar el desplazamiento vertical del nudo C. Calcular la energía de deformación complementaria y la energía potencial total complementaria de la estructura. Comprobar cuándo es mínima ésta última.
Datos: $a = 5\,\text{m}$, $A = 10\,\text{cm}^2$, $P = 15\,\text{kN}$ y $E = 200$ GPa.

Para calcular el desplazamiento vertical del nudo C, aplicando el Segundo Teorema de Castigliano, se supone una fuerza vertical ficticia $\mathcal{F}$ en dicho punto (Figura 5.14b).

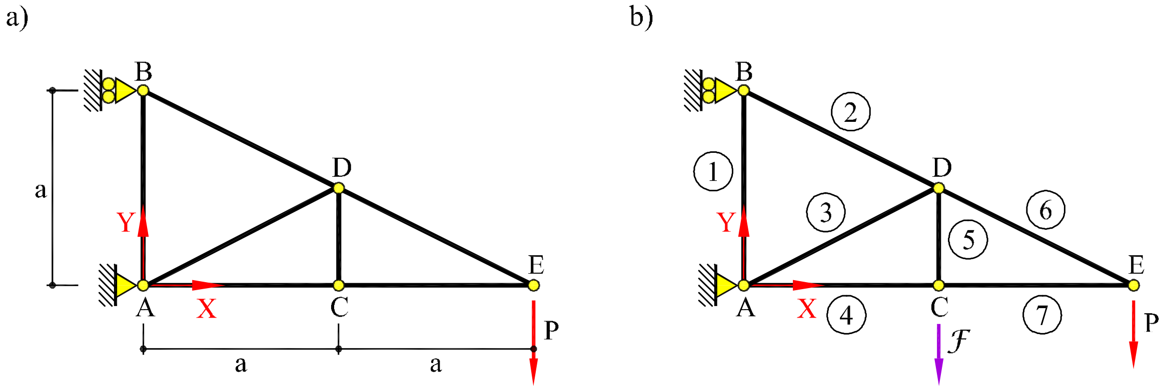


Fig. 5.14: (a) Estructura del Ejemplo 5.5.1 (b) Fuerza ficticia $\mathcal{F}$ en C

Los axiles en las barras son:

$$N_1 = -(P + \mathcal{F}/2) \qquad N_3 = -1,12\ \mathcal{F} \qquad N_5 = \ \mathcal{F}$$

$$N_2 = \ 1,12\,(2P + \mathcal{F}) \qquad N_4 = N_7 = 2P \qquad N_6 = 2,24\ P$$

y las derivadas no nulas respecto de la fuerza ficticia $\mathcal{F}$ son:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \mathcal{F}} = -0,5 \qquad \frac{\partial N_3}{\partial \mathcal{F}} = -1,12$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \mathcal{F}} = \ \ 1,12 \qquad \frac{\partial N_5}{\partial \mathcal{F}} = \ \ 1$$

El desplazamiento vertical del nudo C, aplicando el segundo Teorema de Castigliano, es igual a la primera derivada de la energía de deformación de la estructura respecto a la fuerza ficticia $\mathcal{F}$ para $\mathcal{F} = 0$:

$$v_C = \left.\frac{\partial U}{\partial \mathcal{F}}\right|_{\mathcal{F}=0} = \sum_K \left.\frac{Nl}{EA}\frac{\partial N}{\partial \mathcal{F}}\right|_{\mathcal{F}=0}$$

Haciendo $k = EA/a$, se tiene:

$$\begin{aligned} v_C \ &= \ \frac{1}{k}\left[(-P - 0,5\mathcal{F})\cdot\frac{5,0}{5}\cdot(-0,5) + (2,24P + 1,12\mathcal{F})\cdot\frac{5,59}{5}\cdot 1,12 \,+\right.\\ &\quad \left. + (-1,12\mathcal{F})\cdot\frac{5,59}{5}\cdot(-1,12) + \mathcal{F}\cdot\frac{2,50}{5}\cdot 1\right]_{\mathcal{F}=0} \\ &= \ \frac{1}{k}\frac{16,524}{5}\ P = \frac{16,524P}{200\cdot 10^6\cdot 10\cdot 10^{-4}} = 1,24\cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

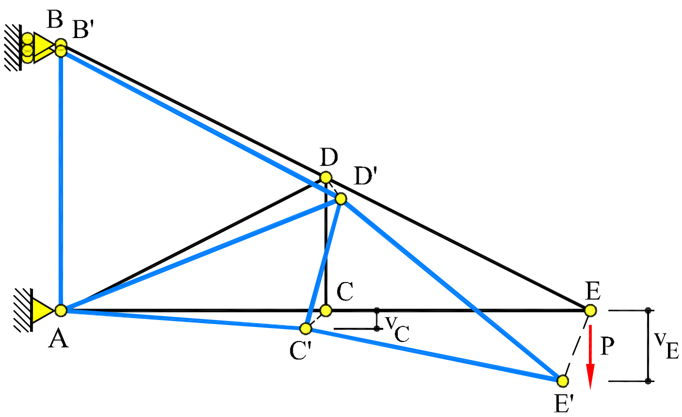


Fig. 5.15: Deformada del Ejemplo 5.5.1

El signo positivo indica que el desplazamiento vertical del nudo C coincide con el sentido de la fuerza ficticia $\mathcal{F}$ (Figura 5.15).

El desplazamiento vertical del nudo E se obtiene de forma similar, derivando la energía respecto a P:

$$v_E = \left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_{\mathcal{F}=0} = \frac{101,1P}{200 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 7,58 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad (\downarrow)$$

Por otra parte, si en la derivada de la energía respecto a P, se toma $\mathcal{F} = -P$, se obtiene el desplazamiento vertical *relativo* entre los nudos E y C:

$$\Delta v = \left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_{\mathcal{F}=-P} = \frac{84,57P}{200 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 6,34 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad (\downarrow)$$

La energía de deformación complementaria de la estructura es:

$$\begin{aligned}
\overline{U} &= \sum_j \frac{1}{2}\frac{N^2 l}{EA} \\
&= \frac{1}{2}\frac{a}{EA}\left(P^2 \cdot 1 + 5,02P^2 \cdot \frac{5,59}{5} + 4P^2 \cdot 1 + 5,02P^2 \cdot \frac{5,59}{5} + 4P^2 \cdot 1\right) \\
&= 10,11\frac{P^2 a}{EA} = 10,11\frac{P^2}{k}
\end{aligned}$$

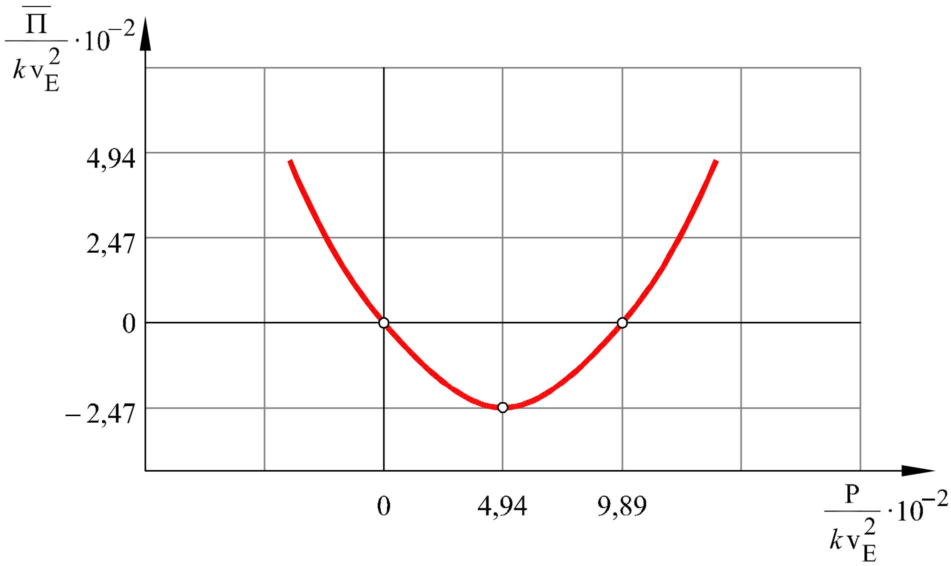


Fig. 5.16: Energía potencial complementaria en función de la carga P

Y la energía potencial total complementaria es:

$$\overline{\Pi} = \overline{U} - Pv_E = 10,11\frac{P^2}{k} - Pv_E$$

De forma adimensional:

$$\frac{\overline{\Pi}}{kv_E^2} = 10,11\left(\frac{P}{kv_E}\right)^2 - \left(\frac{P}{kv_E}\right)$$

Esta función es una parábola que se representa en la Figura 5.16. Como puede verse la energía potencial complementaria tiene un mínimo para $P = 4,94 \cdot 10^{-2}\ kv_E = 15\,\text{kN}$.

Ejemplo 5.5.2

Calcular la flecha en el punto medio de una viga biapoyada cargada con una fuerza puntual centrada (Figura 5.17a). Calcular la energía de deformación complementaria y la energía potencial complementaria de la viga. Comprobar cuándo se produce un mínimo de ésta última.

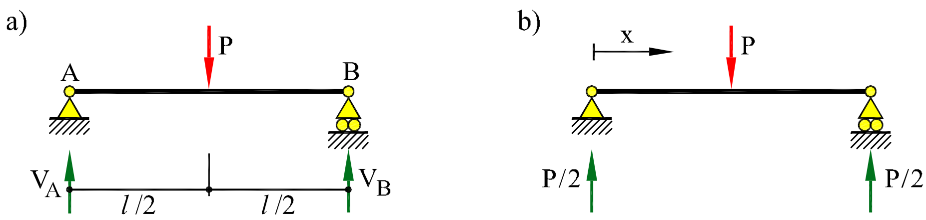


Fig. 5.17: Viga del Ejemplo 5.5.2

Según la Figura 5.17b y, una vez calculadas las reacciones isostáticas, los momentos flectores en la viga son:

$$M(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{2}x & 0 \leq x \leq \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{P}{2}(l-x) & \dfrac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

y, por lo tanto, las derivadas respecto de la fuerza P son:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \dfrac{(l-x)}{2} & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

La flecha en el punto central es el movimiento eficaz de la fuerza P (positiva hacia abajo). Aplicando el segundo Teorema de Castigliano se tiene:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left[\int_L \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx\right] = \int_L M\frac{\partial M}{\partial P}\frac{dx}{EI} \\ &= \int_0^{l/2} \frac{Px}{2}\frac{x}{2}\frac{dx}{EI} + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{P}{2}(l-x)\frac{(l-x)}{2}\frac{dx}{EI} \\ &= \frac{P}{4EI}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} + \left[l^2x + \frac{x^3}{3} - lx^2\right]_{l/2}^{l}\right\} \\ &= \frac{Pl^3}{48EI} \qquad (\downarrow) \end{aligned}$$

Obsérvese que la expresión de la energía de deformación se escribe *únicamente* en función de la fuerza externa P. Puede comprobarse también que, debido a la simetría de la carga, las dos integrales en que se divide el cálculo proporcionan idéntico resultado, por lo que basta con evaluar una de ellas.

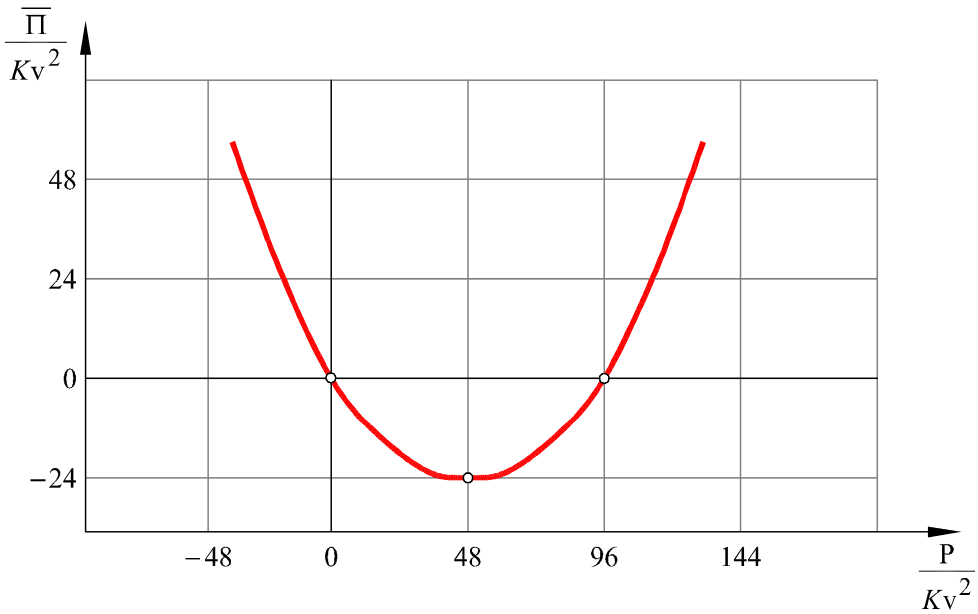


Fig. 5.18: Energía potencial complementaria de la viga en función de la carga P

La energía de deformación complementaria es:

$$\begin{aligned}\overline{U} &= \int_L \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{EI}\,ds \\ &= \int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx = \frac{P^2 l^3}{96EI}\end{aligned}$$

Y la energía potencial total complementaria es:

$$\overline{\Pi} = \overline{U} - H = \frac{P^2 l^3}{96EI} - Pv$$

En forma adimensional, haciendo $K = EI/l^3$:

$$\frac{\overline{\Pi}}{Kv^2} = \frac{1}{96}\left(\frac{P}{Kv}\right)^2 - \left(\frac{P}{Kv}\right)$$

Esta función es una parábola que se representa en la Figura 5.18. Como puede comprobarse, tiene un mínimo para $P = 48Kv = 48\dfrac{EI}{l^3}v$.

Ejemplo 5.5.3

Calcular la flecha en el punto medio de la viga biapoyada de la Figura 5.19a, cuando actúa sobre ella una carga uniforme p.

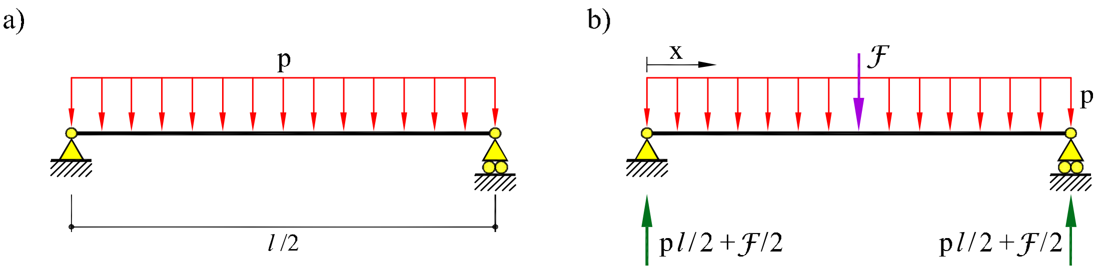


Fig. 5.19: Viga del Ejemplo 5.5.3

Como se pretende calcular el movimiento vertical del punto central de la viga, se resuelve el problema como si, además de la carga uniforme, hubiera una fuerza puntual

$\mathcal{F}$ en el centro de la luz (Figura 5.19b) . Entonces, la ley de flectores es simétrica y:

$$\left.\begin{aligned} M(x) &= \frac{p}{2}x(l-x)+\frac{\mathcal{F}}{2}x \\ \frac{\partial M}{\partial \mathcal{F}} &= \frac{x}{2} \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

La expresión de la energía de deformación de la viga puede escribirse, por simetría, como:

$$U = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2}{2EI}dx$$

Aplicando el segundo Teorema de Castigliano, particularizando para el valor $\mathcal{F} = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{F}}\right)_{\mathcal{F}=0} = 2\int_0^{l/2} \left(\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial \mathcal{F}}\right)_{\mathcal{F}=0} dx \\ &= \frac{2}{EI}\int_0^{l/2} \frac{p}{2}x(l-x)\,\frac{x}{2}\,dx = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI} \qquad (\downarrow) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.5.4

Calcular la flecha en el centro de la luz para una viga biapoyada de sección rectangular, cuando el intradós y el trasdós sufren variaciones de temperatura $-\Delta t_1$ y Δt_2, respectivamente, con una variación lineal de temperatura a través del canto h de la pieza (Figuras 5.20a y 5.20b) y siendo α el coeficiente de dilatación térmica del material.

El problema se resuelve teniendo en cuenta la variación de temperatura (Figura 5.20c) y además suponiendo una fuerza puntual ficticia $\mathcal{F}$ en el centro de la luz (Figura 5.20d).

La curvatura debida a la temperatura es:

$$\chi_t = -\frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{h}\alpha = -\overline{\nabla} t\alpha$$

La ley de momentos debida a la fuerza ficticia $\mathcal{F}$ es:

$$M(x) = \frac{\mathcal{F}x}{2}$$

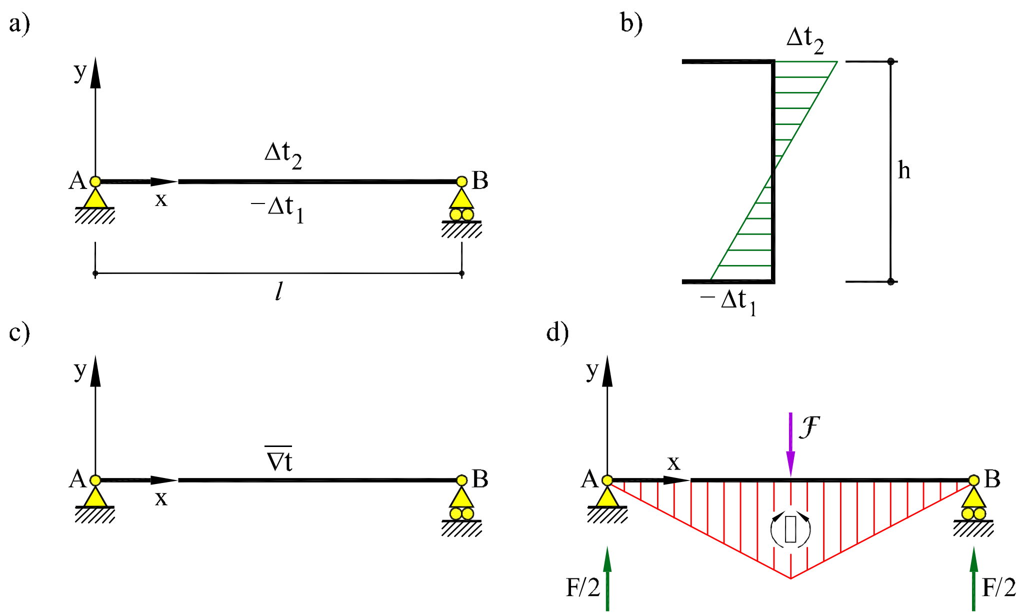


Fig. 5.20: Viga del Ejemplo 5.5.4

y su curvatura es:

$$\chi_{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{F}x}{2EI}$$

La curvatura total de la deformada, suma de las dos, es:

$$\chi = \chi_t + \chi_{\mathcal{F}} = -\overline{\nabla} t\alpha + \frac{\mathcal{F}x}{2EI}$$

Al ser ambas acciones simétricas, las curvaturas también lo son y por ello sólo se integrará la mitad de la viga. La energía de deformación de la estructura es:

$$U = \int_l \frac{1}{2} EI\chi^2 dx = 2\int_0^{l/2} \frac{1}{2} EI\chi^2 dx$$

Derivando la expresión de la energía respecto a la fuerza ficticia $\mathcal{F}$ para $\mathcal{F} = 0$ se obtiene la flecha en el punto medio de la luz:

$$v_{l/2} = \left.\frac{\partial U}{\partial \mathcal{F}}\right|_{\mathcal{F}=0} = 2\int_0^{l/2} EI\chi \frac{\partial \chi}{\partial \mathcal{F}} dx\Bigg|_{\mathcal{F}=0}$$

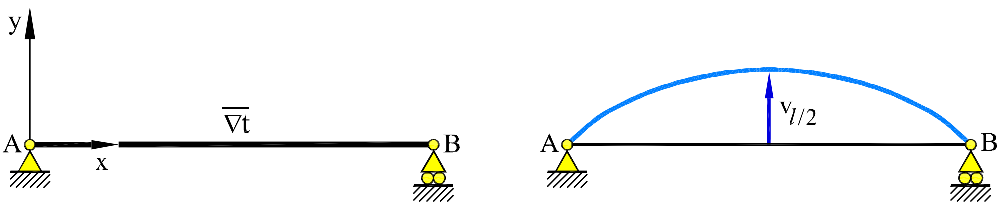


Fig. 5.21: Viga del Ejemplo 5.5.4

sustituyendo:

$$\begin{aligned} v_{l/2} &= 2\int_0^{l/2} EI\left[-\overline{\nabla}t\alpha + \frac{\mathcal{F}x}{2EI}\right]\frac{x}{2EI}\Bigg|_{\mathcal{F}=0} \\ &= -\frac{1}{8}\overline{\nabla}t\alpha l^2 \qquad (\uparrow) \end{aligned}$$

El resultado negativo indica que el sentido de la flecha es opuesto al de la fuerza ficticia supuesta (Figura 5.21).

Ejemplo 5.5.5

Calcular el desplazamiento horizontal del nudo B de la estructura de la Figura 5.22a, aplicando el segundo Teorema de Castigliano. La rigidez a flexión EI es idéntica para todas las barras.
Datos: $P = 12\,\text{kN}$ y $EI = 10^5$ kN·m^2.

El problema se resuelve suponiendo que el sistema de fuerzas sobre la estructura es el que corresponde a la carga puntual real P más una carga puntual ficticia $\mathcal{F}$ aplicada en el nudo B (Figura 5.22c). Las reacciones son:

$$V_C = \frac{3P + 6\mathcal{F}}{4} = -V_A \qquad\qquad H_A = P + \mathcal{F}$$

La ley de momentos es (Figura 5.22d) :

$$M = \begin{cases} M(y) = (P+\mathcal{F})\,y & (AE) \\ M(y) = 3P + \mathcal{F}\,y & (EB) \\ M(x) = 3P\left(1-\frac{x}{4}\right) + 6\mathcal{F}\left(1-\frac{x}{4}\right) & (BC) \end{cases}$$

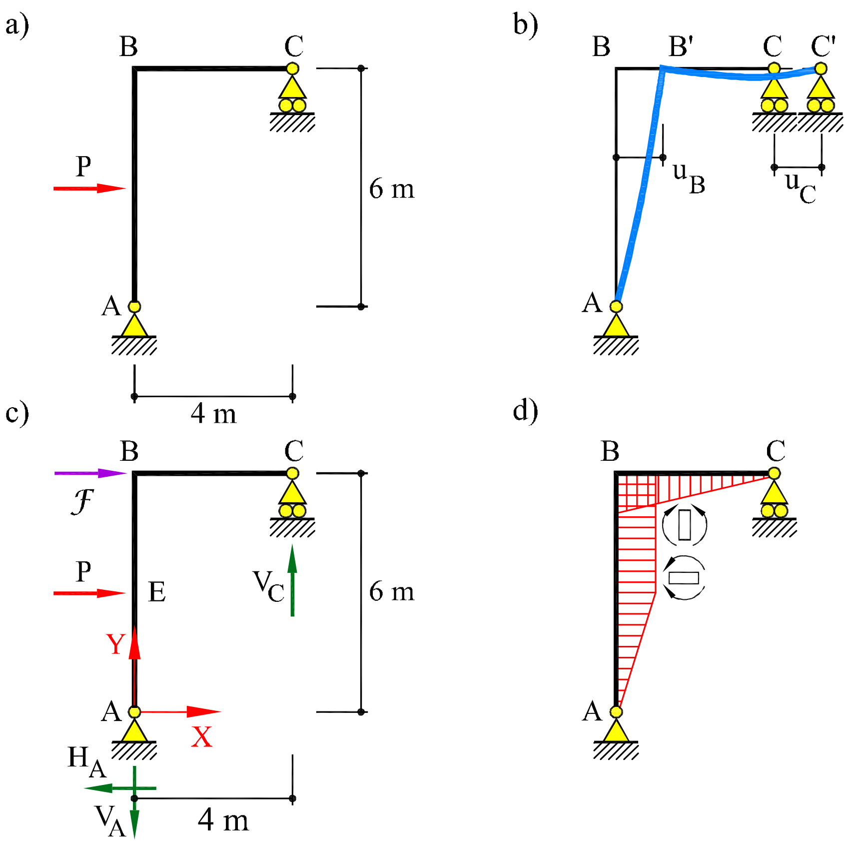


Fig. 5.22: (a) Estructura del Ejemplo 5.5.5, (b) deformada, (c) fuerza ficticia $\mathcal{F}$ y (d) ley de momentos flectores

y la derivada de la ley de momentos respecto a $\mathcal{F}$:

$$\frac{\partial M}{\partial \mathcal{F}} = \begin{cases} y & (AE) \\ y & (EB) \\ 6\left(1 - \frac{x}{4}\right) & (BC) \end{cases}$$

Para calcular el desplazamiento horizontal en B aplicando el segundo Teorema de Castigliano, se tiene:

$$u_B = \left.\frac{\partial U}{\partial \mathcal{F}}\right|_{\mathcal{F}=0} = \sum_{i=1}^{2} \int_L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \mathcal{F}} ds \bigg|_{\mathcal{F}=0}$$

O sea:

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{P}{EI}\left\{\left[\int_0^3 y^2\, dy + 3\int_3^6 y\, dy\right] + \left[18\int_0^4 \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{16}\right) dx\right]\right\} \\ &= 8,82\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \qquad (\rightarrow) \end{aligned}$$

El resultado positivo indica que el sentido del movimiento coincide con el de la fuerza ficticia supuesta (Figuras 5.22b y 5.22c).

5.6 Energía de deformación mínima

El método de flexibilidad puede formularse a partir del Segundo Teorema de Castigliano.

Consideremos una estructura hiperestática de grado h sobre la que actúa un sistema de cargas F_i $(i = 1, ..., n)$, independientes entre sí. Liberando la estructura hiperestática de h enlaces superabundantes (externos o internos), se obtiene una *estructura isostática base* en la que las reacciones hiperestáticas $X_j(j = 1,$...,h), introducidas al liberar los enlaces actúan como fuerzas independientes.

La energía (complementaria) de deformación de la estructura isostática base se puede expresar de la forma:

$$U = U\left(F_i, X_j\right) \qquad \text{con} \qquad i = 1, ..., n \qquad \text{y} \qquad j = 1, ..., \text{h} \tag{5.49}$$

donde $U = U\left(F_i, X_j\right)$ es una función definida positiva, cuadrática y homogénea de sus argumentos.

Asímismo, se tienen h *condiciones cinemáticas* que deben cumplirse para que la estructura isostática base se deforme de manera idéntica a la estructura hiperestática original:

- Si X_k es una reacción hiperestática *externa*, el desplazamiento (o giro) de su punto de aplicación, medido según la dirección de la fuerza (o momento) reacción, e_k, debe ser nulo, al ser rígido el enlace correspondiente en la estructura hiperestática. Aplicando el Segundo Teorema de Castigliano, se tiene la ecuación cinemática:

$$\frac{\partial U\left(F_i, X_j\right)}{\partial X_k} = e_k\left(F_i, X_j\right) = 0 \qquad i = 1, ..., n \qquad j = 1, ..., \text{h} \tag{5.50}$$

- Si X_k es un par de reacciones hiperestáticas *internas*, el desplazamiento (o giro) *relativo* de sus puntos de aplicación, medido según la dirección de las fuerza (o momentos) reacción, Δ_K, debe ser nulo, por continuidad de desplazamientos (o

giros) en el enlace correspondiente en la estructura hiperestática. Se tiene, por tanto, la ecuación cinemática:

$$\frac{\partial U\left(F_i, X_j\right)}{\partial X_k} = \Delta_k \left(F_i, X_j\right) = 0 \qquad i = 1, ..., n \qquad j = 1, ..., \mathrm{h} \tag{5.51}$$

Como resultado, se dispone de h ecuaciones lineales de las cuales es posible obtener los valores de las h incógnitas hiperestáticas $X_j (j = 1, ...,\mathrm{h})$. Estas ecuaciones son todas de la forma:

$$\frac{\partial U\left(F_i, X_j\right)}{\partial X_k} = 0 \qquad j = 1, ..., \mathrm{h} \tag{5.52}$$

Estas ecuaciones representan, además, la condición de que la función $U = U\left(F_i, X_j\right)$ sea estacionaria. Puesto que U es una función cuadrática de las variables X_j, se puede demostrar que dicho punto de estacionareidad es un mínimo, lo que significa que *"las reacciones hiperestáticas toman aquellos valores que hacen que la energía de deformación del sistema estructural sea mínima"*.

Este enunciado se conoce como Teorema de la energía de deformación mínima o Teorema de Ménabréa , y fue demostrado en forma restringida por L.F. Ménabréa en 1858, luego por A. Castigliano en 1879, para estructuras elásticas lineales, y extendido por E. Engesser, en 1889, a estructuras elásticas no lineales.

Ejemplo 5.6.1

La estructura de la Figura 5.23a está formada por tres barras del mismo material e idéntica sección. Para una carga vertical P como se indica, determinar los axiles actuantes sobre cada barra aplicando el Teorema de la energía de deformación mínima.

Sean N_1, N_2 y N_3 los axiles de las tres barras. Por equilibrio de fuerzas en el nudo O:

$$\begin{aligned} \sum F_h &= 0 = N_1 \sin 30^o - N_3 \sin 60^o \\ \sum F_v &= 0 = N_1 \cos 30^o + N_2 + N_3 \cos 60^o - P \end{aligned}$$

La estructura es hiperestática de grado 1, ya que hay dos ecuaciones de equilibrio y tres axiles incógnitas Figura 5.23b. Se elige como incógnita hiperestática la reacción en B ($R = N_2$) y se expresan los axiles en función de P y de la incógnita hiperestática R:

$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(P - R\right) \qquad N_2 = R \qquad N_3 = \frac{1}{2}\left(P - R\right)$$

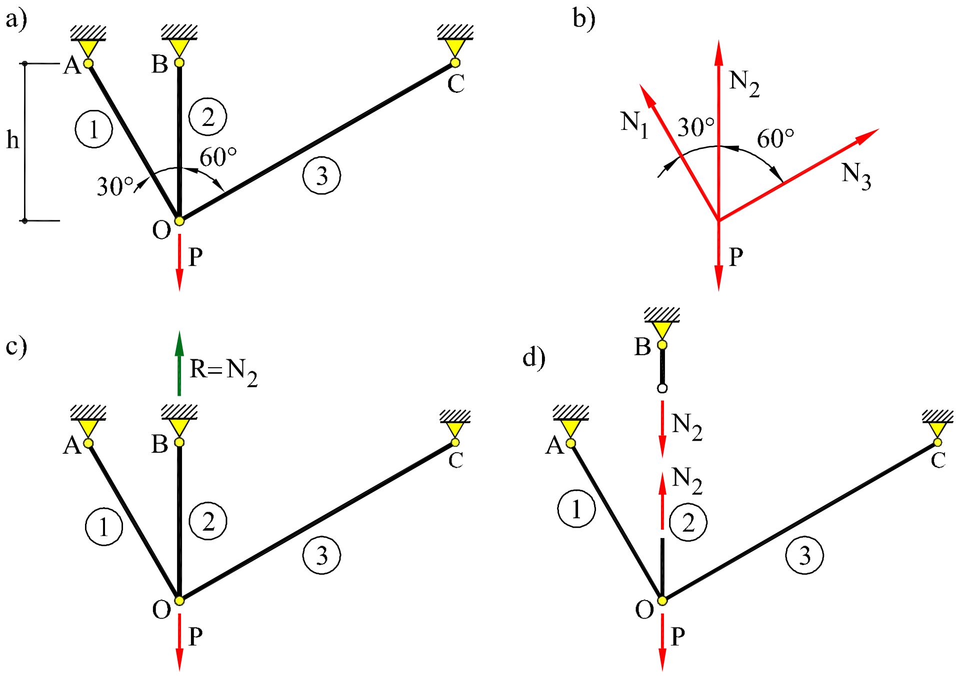


Fig. 5.23: (a) Estructura del Ejemplo 5.6.1 (b) equilibrio de fuerzas en el nudo O (c) reacción en B como incógnita hiperestática y (d) axil N_2 como incógnita hiperestática

El problema se resuelve imponiendo la condición de compatibilidad de que el desplazamiento vertical en B (Figura 5.23c) sea nulo. Aplicando el segundo Teorema de Castigliano:

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial R} = 0$$

Tomando $k = EA/h$ se tiene:

$$\begin{aligned} v_B &= \sum_i \frac{N_i l_i}{EA} \frac{\partial N_i}{\partial R} \\ &= \frac{1}{k}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(P-R)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + R + \frac{1}{2}(P-R)\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{k}\left[\frac{\sqrt{3}+3}{2}R - \frac{\sqrt{3}+1}{2}P\right] = 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$R = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} P$$

que resuelve el problema, ya que se conocen los axiles en función de R.

La energía de deformación es:

$$\begin{aligned} U &= \sum_i \frac{1}{2} \frac{N_i^2 l_i}{EA} \\ &= \frac{1}{2k} \left[N_1^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + N_2^2 + N_3^2 \cdot 2 \right] \\ &= \frac{1}{2k} \left[\frac{\sqrt{3}+1}{2} (P - N_2)^2 + N_2^2 \right] \end{aligned}$$

Y en forma adimensional:

$$\frac{U}{P^2/k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \left[1 - \left(\frac{N_2}{P} \right) \right]^2 + \left(\frac{N_2}{P} \right)^2 \right\}$$

Esta función es una parábola que se representa en la Figura 5.24. Nótese que el valor de $R = N_2$ obtenido corresponde a un mínimo de la energía de deformación.

Una forma alternativa de resolver el problema puede verse Figura 5.23d, donde se ha elegido como incógnita hiperestática el axil de la barra 2. Esta elección implica escribir

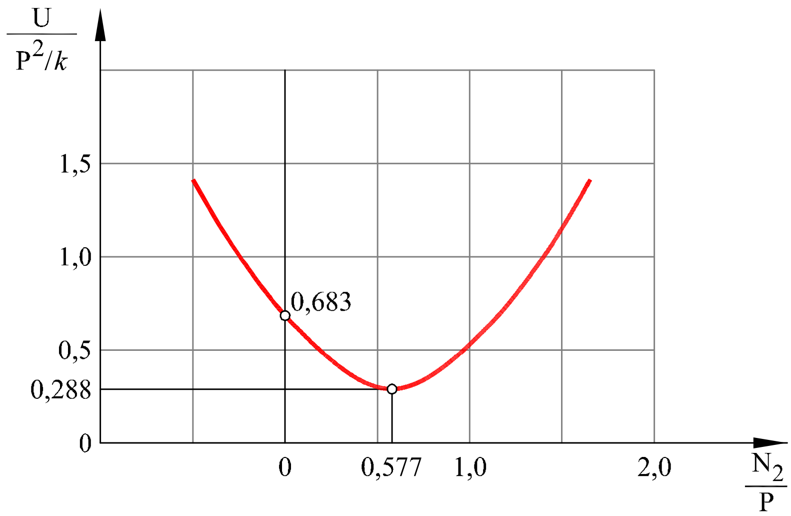


Fig. 5.24: Energía de deformación - Reacción hiperestática

la energía de deformación en función de N_2, e imponer como se ha hecho anteriormente, la condición de compatibilidad de que el *movimiento relativo* entre D' y D'' sea nulo. Aplicando el segundo Teorema de Castigliano, se tiene:

$$\Delta_v = v_{D'} - v_{D''} = \frac{\partial U}{\partial N_2} = 0$$

La ecuación resultante para N_2 es idéntica a la obtenida anteriormente para R.

Ejemplo 5.6.2

Verificar en la viga empotrado-apoyada de la Figura 5.25a que el valor de la reacción hiperestática en B es el que hace mínima la energía de deformación.

La viga es una vez hiperestática. Sea R la reacción desconocida. En las Figuras 5.25b y 5.25c se muestran las leyes de momentos debidas a la carga aplicada p y a la reacción R, respectivamente. Aplicando el principio de superposición puede escribirse:

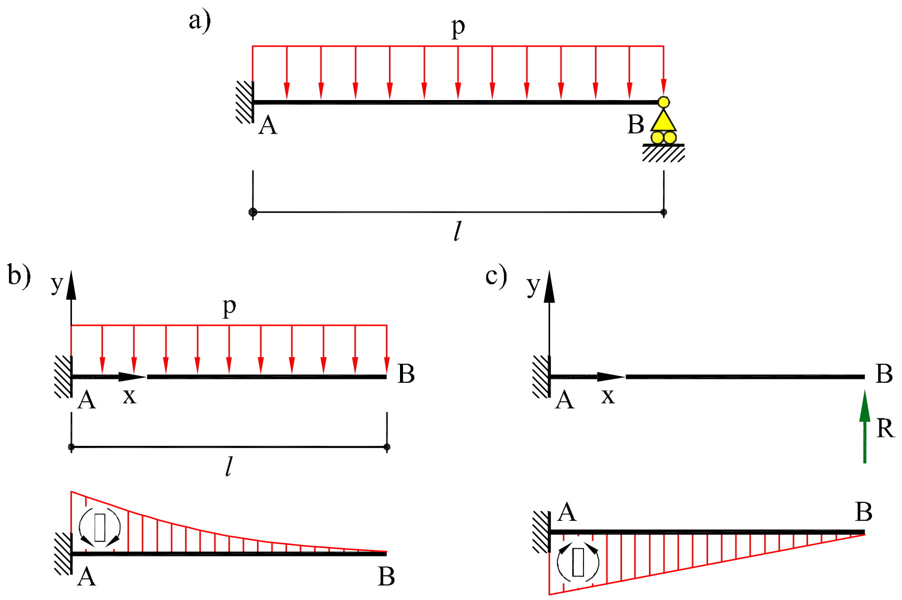


Fig. 5.25: (a) Viga del Ejemplo 5.6.2 (b) ley de momentos debida a la carga p (c) ley de momentos debida a la reacción R

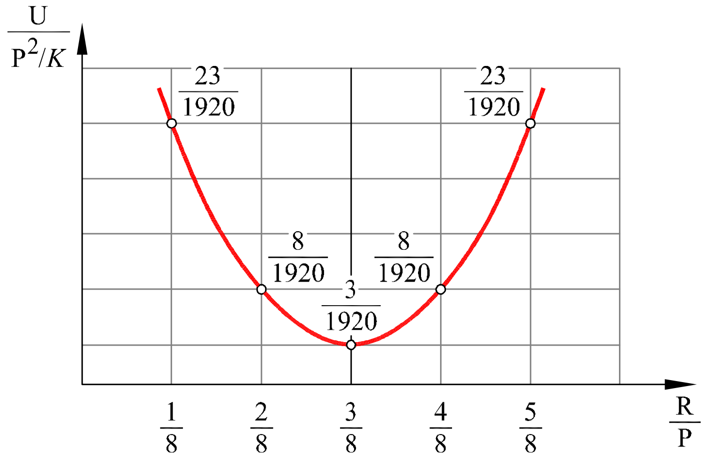


Fig. 5.26: Energía de deformación-Reacción hiperestática

$$M(x) = -\frac{p}{2}(l-x)^2 + R(l-x)$$

La energía de deformación de la estructura es:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{1}{2}\frac{M(x)^2}{EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l \left[-\frac{p}{2}(l-x)^2 + R(l-x)\right]^2 dx \\ &= \frac{l^3}{EI}\left[\frac{1}{40}p^2l^2 - \frac{1}{8}Rpl + \frac{1}{6}R^2\right] = \frac{1}{K}\left[\frac{1}{40}P^2 - \frac{1}{8}RP + \frac{1}{6}R^2\right] \end{aligned}$$

con $K = EI/l^3$ y $P = pl$.

Si se deriva respecto de R y se iguala a cero se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{K}\left[-\frac{1}{8}P + \frac{1}{3}R\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{3}{8}P = \frac{3}{8}pl$$

Se comprueba que el valor de R obtenido corresponde a un mínimo de la energía de deformación (Figura 5.26) porque:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{K} > 0$$

Por otra parte, aplicando el segundo Teorema de Castigliano, el desplazamiento vertical en B, que debe ser nulo, es:

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial R} = 0$$

ecuación que permite determinar el valor de la reacción hiperestática R (Figura 5.27).

La ecuación de minimización de la energía de defomación es la misma que la ecuación de compatibilidad.

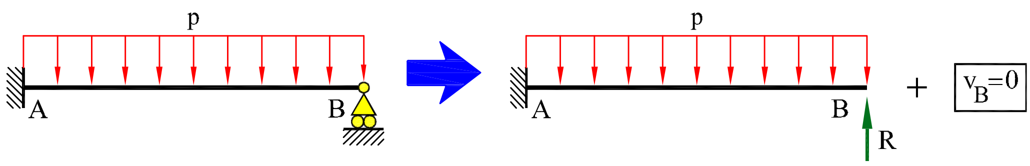


Fig. 5.27: Solución del Ejemplo 5.6.2

5.7 Apoyos y enlaces elásticos

Consideremos la existencia de apoyos o enlaces elásticos en la estructura. La particularidad de este tipo de apoyos o enlaces respecto a los rígidos es su capacidad de deformarse y, al hacerlo, almacenar energía de deformación. Por tanto, la consideración de tales dispositivos no entraña otra dificultad que la inclusión de su energía de deformación a la hora de calcular la energía total de la estructura.

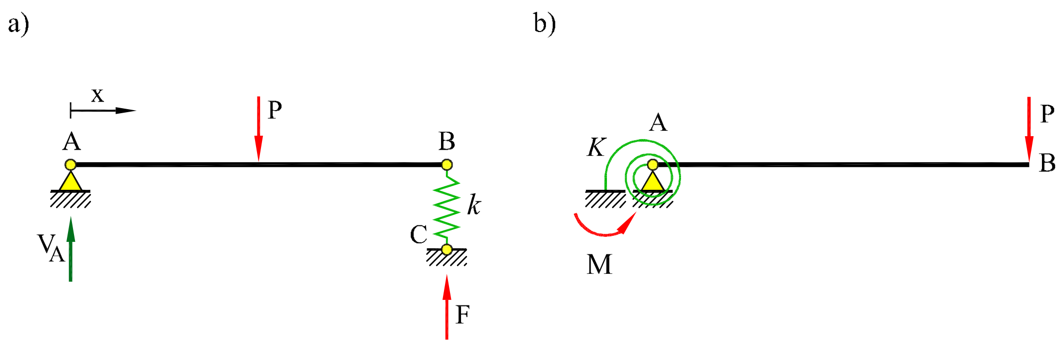


Fig. 5.28: Vigas con apoyos elásticos

Así, por ejemplo, si se tiene una viga como la de la Figura 5.28a, con un apoyo elástico en B, la energía de deformación que almacena el muelle al deformarse es:

$$U_{\text{muelle}} = \frac{1}{2} F\,\delta = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k} = \frac{1}{2}\,k\,\delta^2 \tag{5.53}$$

donde F es la fuerza que actúa sobre el muelle, δ es el movimiento de alargamiento o acortamiento que éste sufre y k es su constante elástica, tal que $F = k\,\delta$.

La energía de deformación total de la estructura, es:

$$U = U_{\text{viga}} + U_{\text{muelle}} \tag{5.54a}$$
$$= \int_L \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx + \frac{1}{2}\frac{F^2}{k} \tag{5.54b}$$
$$= \int_L \frac{1}{2}EI\,\chi^2 dx + \frac{1}{2}k\,\delta^2 \tag{5.54c}$$

A partir de estas expresiones pueden aplicarse a la estructura cuaquiera de los teoremas energéticos de este Capítulo.

Análogamente se puede tratar el caso de resortes elásticos. Consideremos una estructura como la de la Figura 5.28b, con un empotramiento elástico en el extremo A. En ese caso, la energía de deformación del resorte es:

$$U_{\text{resorte}} = \frac{1}{2}M\,\varphi = \frac{1}{2}\frac{M^2}{K} = \frac{1}{2}K\,\varphi^2 \tag{5.55}$$

donde M es el momento que actúa sobre el resorte, φ es el giro que éste sufre y K es su constante elástica, tal que $M = K\,\varphi$.

Ejemplo 5.7.1

Calcular la flecha en el punto medio de la viga de la Figura 5.29. La constante elástica del muelle vale $k = \alpha(EI/l^3)$, siendo EI la rigidez a flexión de la viga.

El problema es análogo al Ejemplo 5.5.3 y se resuelve de la misma forma, pero considerando ahora la energía de deformación del muelle. Según la Figura 5.29 y, una

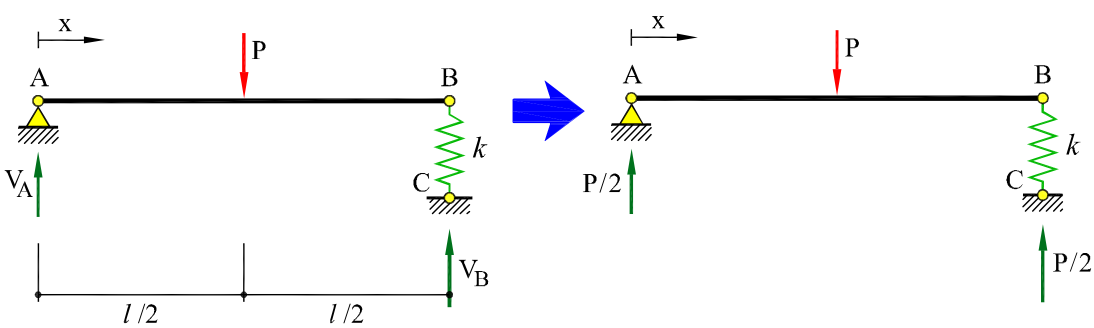


Fig. 5.29: (a) Viga del Ejemplo 5.7.1 (b) resolución

vez calculadas las reacciones isostáticas, el momento flector en la viga es simétrico y de valor:

$$M(x) = \frac{P}{2}x \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

La energía de deformación del muelle es:

$$U_{\text{muelle}} = \frac{1}{2}\frac{(P/2)^2}{k}$$

La flecha en el punto central v es el movimiento eficaz de la fuerza P (positiva hacia abajo). Aplicando el segundo Teorema de Castigliano se tiene:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial U_{\text{viga}}}{\partial P} + \frac{\partial U_{\text{muelle}}}{\partial P} \\ &= 2\int_0^{l/2} M\,\frac{\partial M}{\partial P}\frac{dx}{EI} + \frac{1}{4}\frac{P}{k} \\ &= 2\int_0^{l/2} \frac{Px}{2}\frac{x}{2}\frac{dx}{EI} + \frac{1}{4}\frac{l^3}{EI}\frac{P}{\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{4\alpha}\right)\frac{Pl^3}{EI} \end{aligned}$$

Para $\alpha = \infty$ se recupera la solución correspondiente a un apoyo fijo en B.

6 El Método de Flexibilidad

6.1 Introducción

La necesidad de resolver estructuras hiperestáticas se plantea a principios del siglo XIX, cuando los países europeos se encuentran en plena expansión económica, gracias a los avances científicos y sociales del siglo anterior. La Revolución Industrial da lugar a una sociedad metropolitana e industrializada, necesitada de estructuras e infraestructuras que favorezcan su desarrollo.

En esta época aparecen y se multiplican por toda Europa las Escuelas de Ingenieros, siguiendo el modelo de la prestigiosa École des Pons et Chaussées de París. Es precisamente un profesor de esta Escuela, Louis Navier, el primero en notar que la indeterminación estática puede salvarse teniendo en cuenta la deformabilidad de las piezas; a partir de 1826 usa el método de flexibilidad para resolver arcos hiperestáticos y vigas continuas. El método se extiende rápidamente y, en 1857, B. P. E. Clapeyron presenta ante la Academia de las Ciencias francesa su trabajo sobre la resolución de vigas continuas. El planteamiento general y consistente del método de flexibilidad se debe a J. C. Maxwell (1864) y a O. Mohr (1874).

Lamentablemente, el método de flexibilidad es un procedimiento muy laborioso de resolución de estructuras hiperestáticas y que no permite, en general, un planteamiento sistemático del problema, lo cual lo hace poco adecuado para su implementación en programas de cálculo automático. A partir de la segunda mitad del siglo XX, con la llegada del ordenador digital, el método de flexibilidad va perdiendo protagonismo dentro de la Mecánica de Estructuras en favor del método de rigidez.

Se muestra en este Capítulo la aplicación del método de flexibilidad a la resolución de estructuras articuladas y reticuladas planas. Se plantea, primero, la resolución de estructuras articuladas y, a continuación, la resolución de vigas continuas, considerándose diversas situaciones particulares de interés. Se cierra el Capítulo con la aplicación del método a la resolución de estructuras porticadas.

6.2 El Método de Flexibilidad

El planteamiento del método de flexibilidad es intuitivo y fácil de entender y se muestra, de forma esquemática, en la Figura 6.1. Básicamente, consiste en transformar la estructura hiperestática en otra isostática, a base de suprimir los apoyos (o enlaces) redundantes y sustituirlos por fuerzas (o esfuerzos) incógnita. El número de incógnitas del problema es, pues, igual al grado de hiperestatismo del problema. Es obvio que el hecho de suprimir estos apoyos (o enlaces) implica liberar, en principio, ciertas condiciones de compatibilidad que debe satisfacer la deformación de la estructura original. A la estructura resultado de este proceso se le llama *isostática base*.

Al ser isostática, la resolución de esta *estructura base* no plantea dificultad alguna: sobre ella se pueden satisfacer las condiciones necesarias de equilibrio *a priori* y se le pueden aplicar los métodos conocidos de cálculo de movimientos. En particular, se podrán expresar los movimientos de la estructura en función de las incógnitas hiperestáticas. Por tanto, se pueden imponer *a posteriori* las condiciones de compatibilidad anteriormente liberadas. Esto proporciona el número de ecuaciones necesarias para resolver las incógnitas hiperestáticas. Una vez obtenidas éstas se tiene resuelta la estructura.

Como se observa, el proceso secuencial consiste en, a partir de la geometría de la estructura y de la definición de las acciones,

1. definir la estructura isostática base, a base de seleccionar las incógnitas hiperestáticas y liberar las correspondientes condiciones de compatibilidad,

2. resolver la estructura isostática base, en función de las incógnitas hiperestáticas, a base de satisfacer las condiciones de equilibrio,

3. determinar las incógnitas hiperestáticas, a base de imponer las necesarias condiciones de compatibilidad,

4. determinar las reacciones, esfuerzos y movimientos en la estructura hiperestática original.

Consideremos una estructura hiperestática de grado h sobre la que actúa un sistema de cargas $F_i\,(i = 1, ..., n)$. Liberando la estructura hiperestática de h enlaces superabundantes (externos o internos) se obtiene una *estructura isostática base* en la que las reacciones hiperestáticas X_j ($j = 1$, ...,h), introducidas al liberar los enlaces, actúan como fuerzas independientes. Asimismo, se obtienen h *condiciones cinemáticas* que deben cumplirse para que la estructura isostática base se deforme de manera idéntica a la estructura hiperestática original:

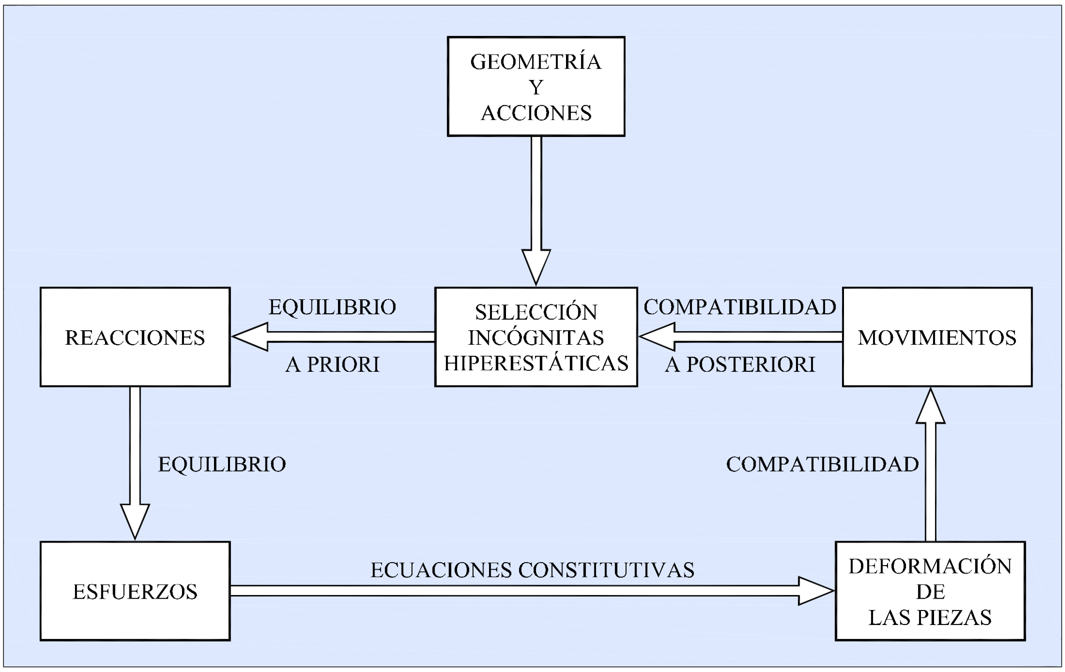


Fig. 6.1: Resolución de estructuras por el método de flexibilidad

- Si X_k es una reacción hiperestática *externa*, el desplazamiento (o giro) de su punto de aplicación, medido según la dirección de la fuerza (o momento) reacción, δ_k, debe ser nulo, al ser rígido el enlace correspondiente en la estructura hiperestática. Se tiene, por tanto, la ecuación cinemática:

$$\delta_k(F_i, X_j) = 0 \qquad i = 1, ..., n \qquad j = 1, ..., \mathrm{h} \tag{6.1}$$

- Si X_k es un par de reacciones hiperestáticas *internas*, el desplazamiento (o giro) relativo de sus puntos de aplicación, medidos según la dirección de las fuerzas (o momentos) reacción, Δ_k, debe ser nulo, por continuidad de desplazamientos (o giros) en el enlace correspondiente en la estructura hiperestática. Se tiene, por tanto, la ecuación cinemática:

$$\Delta_k(F_i, X_j) = 0 \qquad i = 1, ..., n \qquad j = 1, ..., \mathrm{h} \tag{6.2}$$

Como resultado, se dispone de h ecuaciones lineales de las cuales es posible obtener los valores de las h incógnitas hiperestáticas X_j ($j = 1, ...,$h). Es importante señalar que la elección de los h enlaces superabundantes que se liberan para obtener la estructura

isostática base no es única. Distintas elecciones dan lugar a distintas estructuras base y a distintos sistemas de ecuaciones para resolver el problema. Como la solución del problema elástico es *única*, la elección entre una posibilidad u otra es arbitraria.

Tradicionalmente, el procedimiento descrito recibe el nombre de *método de las fuerzas* (por la naturaleza de las incógnitas seleccionadas) o *método de compatibilidad* (por las ecuaciones que se plantean y resuelven). No obstante, el problema estructural implica tanto condiciones de compatibilidad como de equilibrio y su solución requiere considerar tanto los movimientos (y deformaciones) como las fuerzas (y esfuerzos). En este libro, llamaremos al procedimiento descrito *método de flexibilidad*, ya que los coeficientes que aparecen en su desarrollo son de flexibilidad.

Dado que hay que plantear y resolver tantas ecuaciones de compatibilidad como incógnitas hiperestáticas hay en el problema, este método es adecuado para estructuras con bajo grado de hiperestatismo. Su principal desventaja consiste en que la forma de seleccionar las incógnitas hiperestáticas de un problema dado no es única y esto dificulta un planteamiento sistemático del método. Esto lo hace poco adecuado para el cálculo de estructuras por ordenador.

Veamos algunos ejemplos del procedimiento descrito:

(a) Consideremos la viga hiperestática (grado de hiperestatismo h = 1) de la Figura 6.2a. Liberando la coacción hiperestática que supone el apoyo en B, y sustituyéndola por una reacción vertical R de módulo desconocido, obtenemos la estructura isostática base de la Figura 6.2b. En esta estructura se pueden calcular movimientos y, en particular, se puede calcular la flecha en el punto B, que será función de la carga aplicada p y de la reacción incógnita R, esto es, $v_B = v_B(p, R)$. Para que las estructuras de las Figuras 6.2a y 6.2b se deformen de la misma forma, es necesario imponer la condición de que la flecha del punto B sea nula, es decir:

$$v_B(p, R) = 0 \tag{6.3}$$

Esta es la ecuación lineal de la cual es posible obtener el valor de la reacción R, que resuelve el problema.

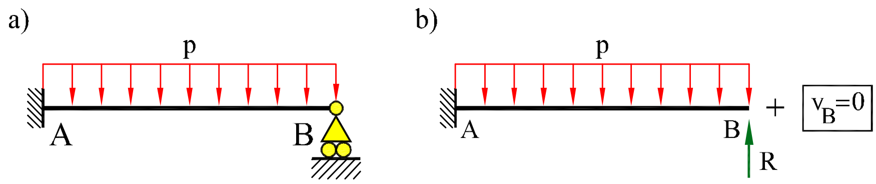


Fig. 6.2: (a) Estructura hiperestática (h=1) (b) estructura isostática base

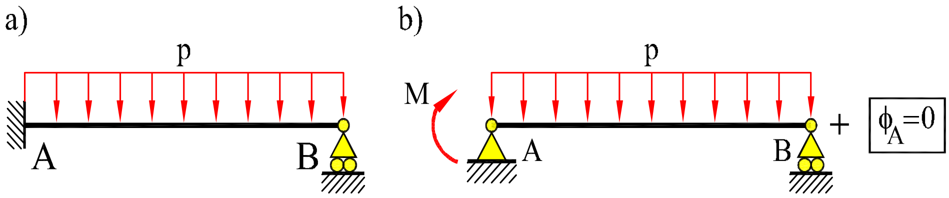


Fig. 6.3: (a) Estructura hiperestática (b) estructura isostática base

(b) La elección de la estructura isostática base no es única. Por ejemplo, al resolver la viga empotrado-apoyada del caso anterior, se puede elegir la estructura de la Figura 6.3b como estructura base, donde se ha sustituido la coacción al giro del empotramiento A por un momento incógnita M. En esta estructura isostática se puede calcular el giro en el apoyo A, que será función de la carga aplicada p y del momento incógnita M, esto es, $\phi_A = \phi_A(p, M)$. Para que las estructuras de las Figuras 6.3a y 6.3b se deformen de la misma forma, es necesario imponer la condición de que el giro del punto A sea nulo, es decir:

$$\phi_A(p, M) = 0 \tag{6.4}$$

(c) La coacción redundante liberada para definir la estructura isostática base no tiene por qué corresponder a un apoyo, ni su correspondiente reacción hiperestática tiene que ser externa. En el arco atirantado de la Figura 6.4a (grado de hiperestatismo h = 1) se sustituye un enlace interno, el tirante AB, por un par de fuerzas T, que representan, respectivamente, la tensión del cable y la acción de éste sobre el resto de la estructura Figura 6.4b. La condición cinemática de compatibilidad es, en este caso, que el *movimiento horizontal relativo* a ambos lados del enlace liberado sea nulo, esto es, que el movimiento horizontal del punto B del arco, $u_B^{\text{arco}} = u_B^{\text{arco}}(P, T)$, sea igual al

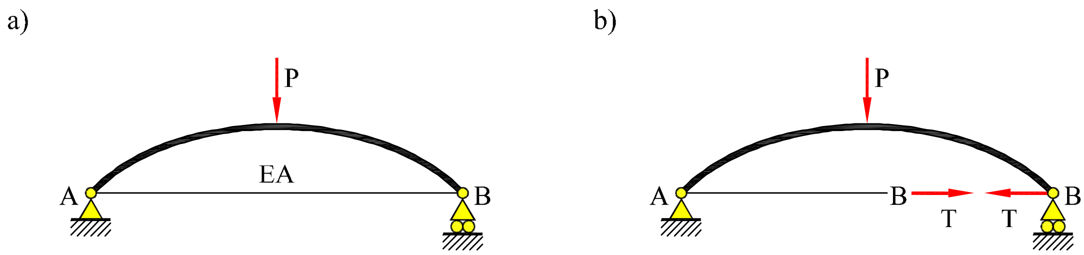


Fig. 6.4: (a) Estructura hiperestática (b) estructura isostática base

alargamiento del cable, $u_B^{\text{cable}} = Tl/EA$:

$$u_B^{\text{rel}} = u_B^{\text{arco}} - u_B^{\text{cable}} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_B^{\text{arco}}(P,T) = \frac{Tl}{EA}$$

(d) En otros casos existe la posibilidad de elegir entre liberar enlaces externos o internos. Por ejemplo, en la viga biempotrada y simétrica de la Figura 6.5 (grado de hiperestatismo h = 1), se puede liberar el giro en los extremos A y A' (Figura 6.5a), introducir los momentos reacción M correspondientes (iguales y opuestos por simetría) e imponer la condición de compatibilidad:

$$\phi_A(p,M) = \phi_{A'}(p,M) = 0 \tag{6.5}$$

de la que se obtiene el momento incógnita M en los extremos. Alternativamente, se puede liberar el giro en el centro O de la viga (Figura 6.5b), introducir como incógnita el par de momentos $\widehat{M}$ (momentos flectores en O) e introducir la condición de simetría:

$$\phi_o(p,\widehat{M}) = 0 \tag{6.6}$$

de la que se obtiene el momento flector incógnita $\widehat{M}$ en el centro de la luz. Esta condición es idéntica a exigir que el *giro relativo* en la rótula introducida en O sea nulo.

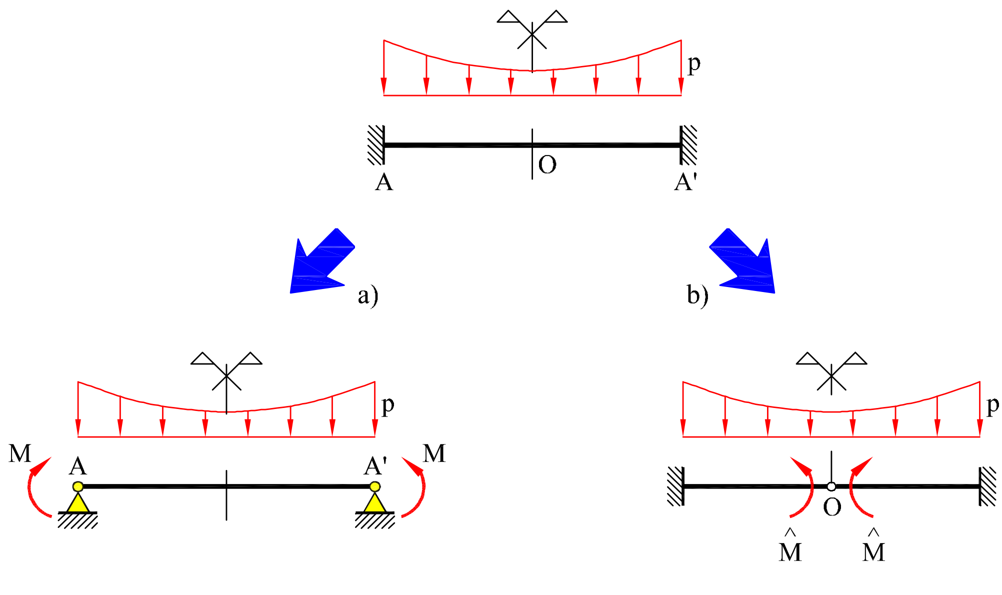


Fig. 6.5: Construcción de estructura isostática base (h=1) de dos formas alternativas

Queda patente en los ejemplos anteriores la importancia de disponer de métodos para calcular movimientos en estructuras isostáticas, ya que son necesarios para plantear las *ecuaciones de compatibilidad*, imprescindibles para resolver el problema hiperestático por el método aquí descrito. Para este fin se pueden utilizar los procedimientos descritos en los capítulos precedentes.

Una vez determinadas las reacciones hiperestáticas en función de las fuerzas exteriores, se pueden aplicar los mismos métodos de cálculo de movimientos utilizados en estructuras isostáticas para calcular movimientos en estructuras hiperestáticas.

6.3 Estructuras articuladas

La estructura articulada se ha definido como aquella formada por un ensamblaje de piezas unidas mediante nudos articulados. Las barras trabajan fundamentalmente a esfuerzo axil, que, si las fuerzas se aplican en los nudos, es constante en cada barra. Resolver la estructura consiste en hallar las reacciones exteriores y los axiles que actúan sobre las distintas barras.

Sea nn el número de nudos de una estructura articulada plana, nr el número de reacciones exteriores y nb los axiles de las barras. La estructura es isostática si se cumple:

$$nr + nb = 2nn \tag{6.7}$$

donde $2nn$ es el número de ecuaciones de la estática, dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas por nudo, al tratarse de una estructura articulada plana. En el caso que:

$$nr + nb > 2nn \tag{6.8}$$

la estructura es hiperestática, y para resolver el problema es necesario imponer condiciones de compatibilidad adicionales.

A continuación, se desarrollan dos ejemplos de aplicación del método de flexibilidad a la resolución de estructuras articuladas hiperestáticas.

Ejemplo 6.3.1

La estructura de la Figura 6.6a, está formada por cinco barras del mismo material e idéntica sección. Para una carga P que se indica, determinar las reacciones y los axiles actuantes sobre cada barra.
Datos: $l = 6\,\text{m}$, $P = 100\,\text{kN}$.

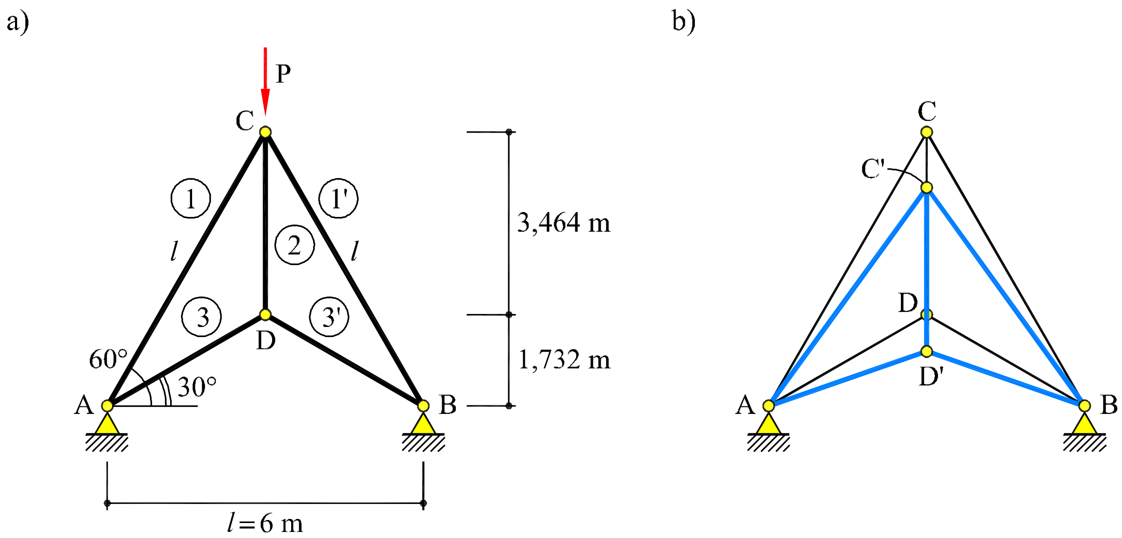


Fig. 6.6: Estructura del Ejemplo 6.3.1 y deformada

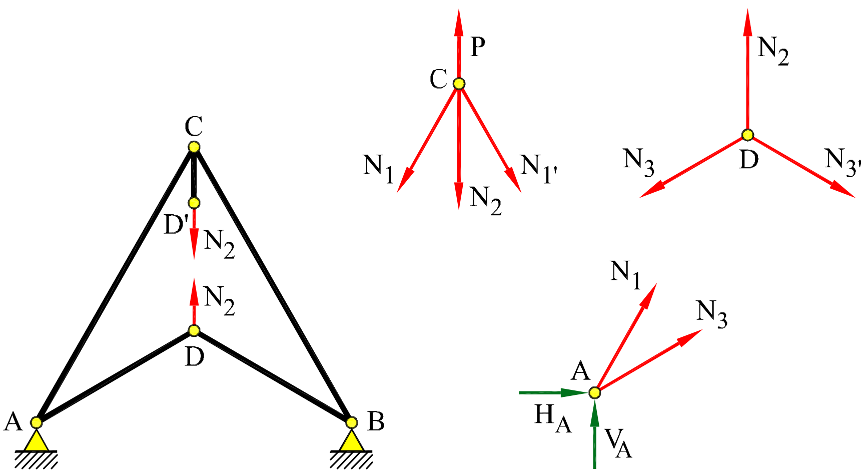


Fig. 6.7: (a) Estructura isostática base del Ejemplo 6.3.1 (b) equilibrio de fuerzas en los nudos

La estructura es simétrica respecto al eje vertical por geometría y carga. Por tanto, las reacciones, los axiles, los movimientos y los alargamientos serán simétricos respecto a dicho eje. La estructura es una vez hiperestática y el grado de indeterminación cinemática es igual a 2, los desplazamientos verticales de los nudos C y D (los horizontales son nulos por simetría).

Se elige como incógnita hiperestática el axil N_2 y se expresan los otros dos axiles en función de P y de N_2 (Figura 6.7).

Por equilibrio:

$$N_1 = -\frac{P + N_2}{\sqrt{3}} \qquad\qquad N_3 = \quad N_2$$

Por simetría, $N_{1'} = N_1$ y $N_{3'} = N_3$.

El problema se resuelve imponiendo que el *desplazamiento vertical relativo* entre los puntos D y D' de la estructura isostática base, sometida a las fuerzas P y N_2, sea nulo (Figura 6.7).

Aplicando el segundo Teorema de Castigliano, el desplazamiento vertical relativo Δ_v, entre D y D' es:

$$\begin{aligned}
\Delta_v &= \frac{\partial U}{\partial N_2} = \sum_j \frac{N_j l_j}{EA}\frac{\partial N_j}{\partial N_2} \\
&= \frac{1}{k}\left[-\frac{P+N_2}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2 + N_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\right] \\
&= \frac{1}{k}\left[\frac{2}{3}P + \left(\frac{2}{3} + \sqrt{3}\right) N_2\right] = 0
\end{aligned}$$

donde $k = EA/l$, y $1/k$ es un coeficiente de flexibilidad a la deformación por axil.

Resolviendo:

$$N_2 = -\frac{2}{2 + 3\sqrt{3}} P = -0,278P$$

y los axiles restantes son:

$$\begin{aligned}
N_1 &= -0,417P \\
N_3 &= -0,278P \qquad\qquad \text{y simétricos}
\end{aligned}$$

Las reacciones son:

$$\begin{aligned}
H_A &= 0,449P \qquad (\leftarrow) \\
V_A &= 0,500P \qquad (\uparrow)
\end{aligned}$$

y simétricas en B. En la Figura 6.6b se muestra la deformada a estima de la estructura.

Ejemplo 6.3.2

La estructura de la Figura 6.8a, está formada por cinco barras del mismo material e idéntica sección. Para las cargas verticales P que se indican, determinar las reacciones y los axiles actuantes sobre cada barra.
Datos: $l = 8\,\text{m}$, $P = 100\,\text{kN}$.

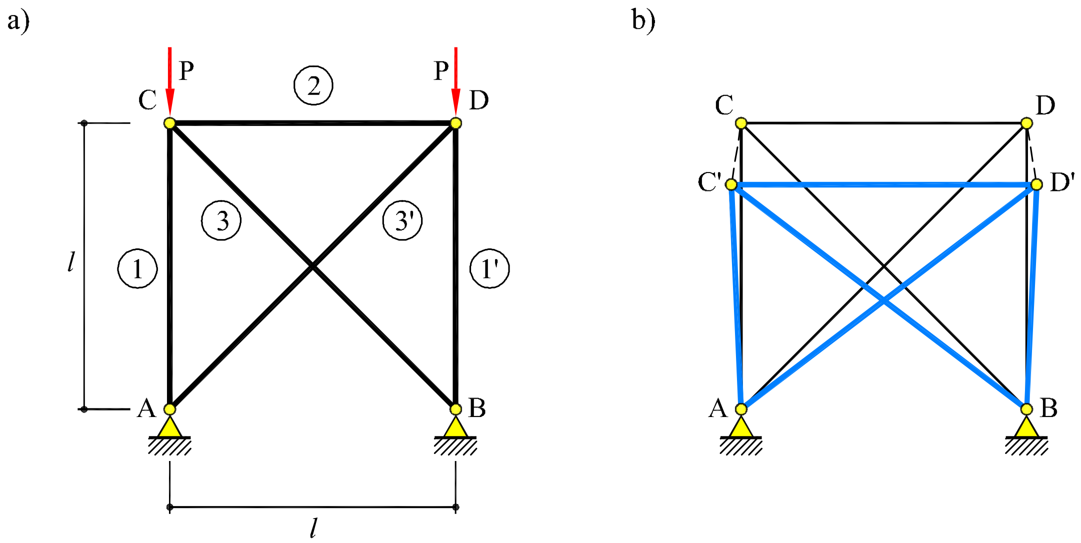


Fig. 6.8: Estructura del Ejemplo 6.3.2 y deformada

La geometría y la carga de la estructura es simétrica respecto al eje vertical. Por tanto, las reacciones, los axiles, los desplazamientos y los alargamientos también lo son. La estructura es una vez hiperestática. El grado de indeterminación cinemática es 4, los desplazamientos vertical y horizontal de los nudos C y D, simétricos entre sí.

Se libera el movimiento horizontal en los apoyos y se colocan las correspondientes reacciones horizontales H (Figura 6.9). El problema se resuelve imponiendo que el *desplazamiento horizontal relativo* de los nudos A y B de la estructura isostática base, sometida a las fuerzas P y H, sea nulo:

$$\Delta_h = u_A - u_B = 0$$

Los axiles en función de P y de la incógnita hiperestática H son:

$$N_1 = H - P \qquad N_2 = H \qquad N_3 = -\sqrt{2}H \qquad \text{y simétricos}$$

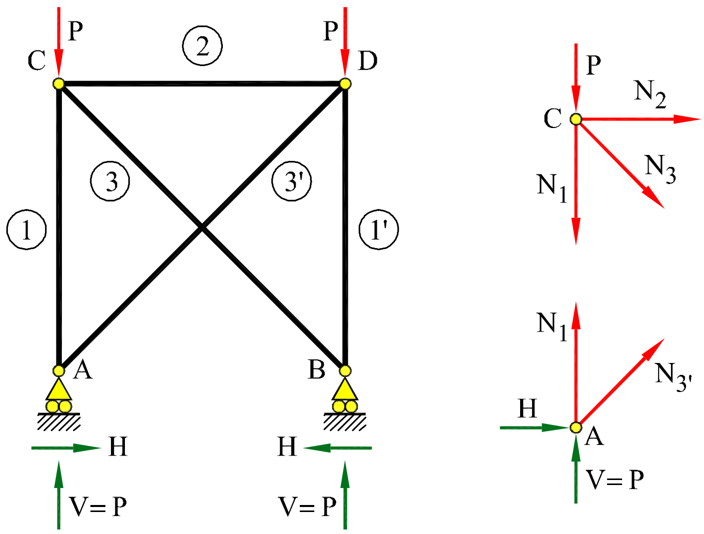


Fig. 6.9: (a) Estructura isostática base del Ejemplo 6.3.2 (b) equilibrio de fuerzas en los nudos

Las derivadas de los axiles respecto a la reacción H son:

$$\frac{\partial N_1}{\partial H} = 1 \qquad \frac{\partial N_2}{\partial H} = 1 \qquad \frac{\partial N_3}{\partial H} = -\sqrt{2}$$

El desplazamiento horizontal relativo entre A y B, aplicando el segundo Teorema de Castigliano, es:

$$\begin{aligned} \Delta_h &= \frac{\partial U}{\partial H} = 0 = \sum_j \frac{N_j l_j}{EA} \frac{\partial N_j}{\partial H} \\ &= \frac{1}{k}\left[2\,(H-P) + H + 4\sqrt{2}H\right] \\ &= \frac{1}{k}\left[-2P + \left(3 + 4\sqrt{2}\right) H\right] \end{aligned}$$

donde $k = EA/l$, y $1/k$ es un coeficiente de flexibilidad a la deformación por axil.

Resolviendo:

$$H = 0,231P$$

Las reacciones en A son:

$$H_A = 0,231P \ (\rightarrow) \qquad V_A = P \quad (\uparrow)$$

y simétricas en B. Los axiles correspondientes a cada barra son:

$$\begin{aligned} N_1 &= -0,769P \\ N_2 &= 0,231P \\ N_3 &= -0,327P \qquad\qquad \text{y simétricos} \end{aligned}$$

En la Figura 6.8b se muestra la deformada a estima de la estructura.

6.4 Vigas continuas

La viga continua puede definirse como una estructura hiperestática formada por varias piezas rectas alineadas, unidas entre sí por nudos rígidos apoyados, denominándose *vano*, o *tramo*, al segmento comprendido entre dos apoyos sucesivos de la viga. Esta tipología se muestra en la Figura 6.10; obsérvese que los nudos intermedios son rígidos, lo cual implica la continuidad de los giros y los momentos flectores a uno y otro lado de cada apoyo. La utilización de las vigas continuas en la ingeniería civil es muy frecuente (por ejemplo en puentes, forjados, carriles de ferrocarril, tuberías, etc) y de ahí la importancia de su estudio.

La viga continua puede tratarse como una tipología particular de estructura reticulada de plano medio, capaz de soportar esfuerzos principalmente de flexión y cuya característica más importante es la de disminuir los momentos en relación con los que se producen en vigas similares de tramos simplemente apoyados.

En el estudio de las vigas continuas sólo consideraremos la acción de fuerzas verticales y de momentos, con lo que las reacciones en los apoyos también serán verticales. De actuar alguna fuerza horizontal, como, por ejemplo, la de frenado en puentes de carretera o de ferrocarril, supondremos que uno de los apoyos es fijo y, por tanto, que soporta todas las acciones horizontales. Con esta disposición de los apoyos, los cambios térmicos uniformes a través del espesor de las piezas no producen ningún tipo de esfuerzo.

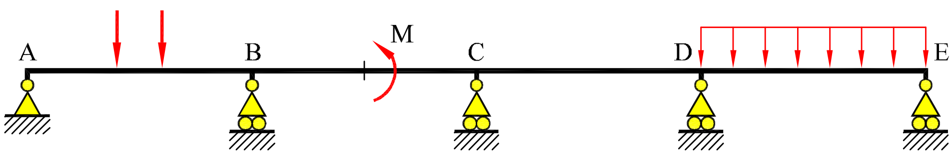


Fig. 6.10: Viga continua de cuatro vanos sometida a cargas transversales

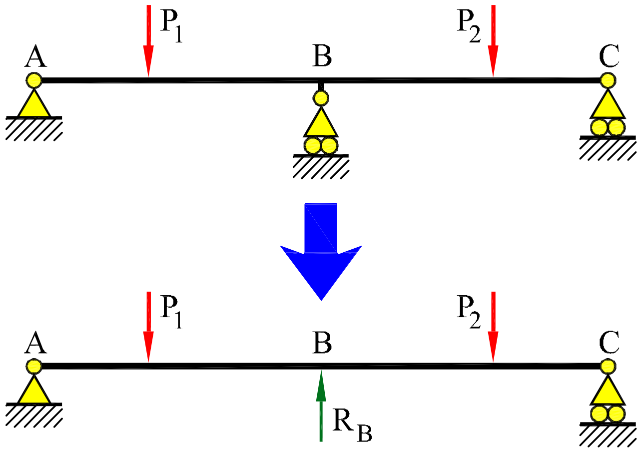


Fig. 6.11: Supresión del apoyo intermedio en una viga continua de dos vanos

Como la viga sobre dos apoyos simples es un sistema isostático, en una viga de más de un tramo cada apoyo intermedio introduce un vínculo superabundante y, en general, una viga continua sobre n apoyos constituye un sistema $n-2$ veces hiperestático. Por tanto, en la resolución de una viga continua pueden tomarse como incógnitas hiperestáticas las reacciones de los apoyos intermedios.

Este método es recomendable en el caso de una viga continua sobre tres apoyos y, de hecho, fue ya utilizado por Navier para resolver este tipo de vigas. Consideremos, por ejemplo, la viga continua de dos vanos de la Figura 6.11. Siguiendo el procedimiento general de resolución de estructuras hiperestáticas por el método de compatibilidad, se elimina el apoyo superabundante B y se sustituye por la correspondiente reacción hiperestática R_B, con lo que se obtiene la viga AC biapoyada e isostática (*estructura isostática base*). La condición cinemática de compatibilidad que debe cumplirse para que la estructura isostática base se deforme de manera idéntica a la estructura original es que el movimiento vertical del apoyo B sea nulo:

$$v_B = v_B(P_1, P_2) + v_B(R_B) = 0 \tag{6.9}$$

Esta ecuación permite hallar el valor de la incógnita hiperestática R_B y, por tanto, resolver el problema.

Este método puede extenderse a vigas continuas sustentadas sobre más de tres apoyos, pero conduce a sistemas de ecuaciones en los que cada una de las ecuaciones $v_I = 0\ (I = 1, ..., n-2)$ contiene todas las incógnitas $R_I\ (I = 1, ..., n-2)$. Tales sistemas "llenos" de ecuaciones son de resolución extremadamente laboriosa.

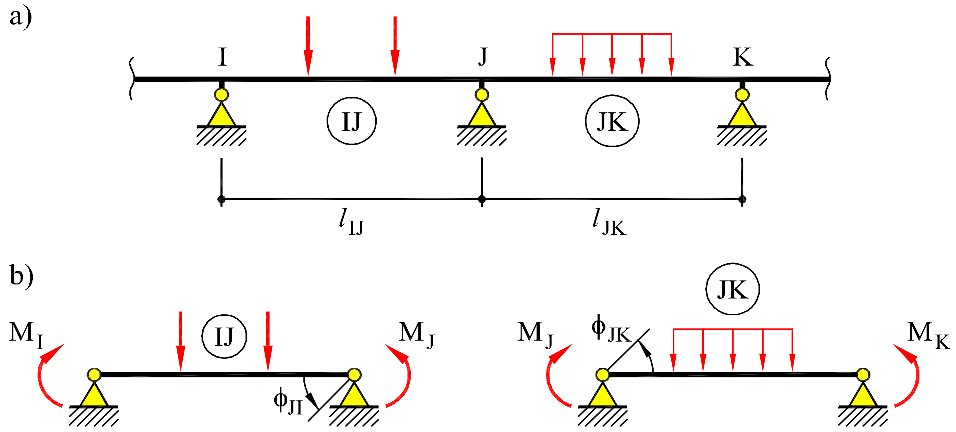


Fig. 6.12: Condición de continuidad de giros en un apoyo intermedio

Ecuación de los tres momentos

Una alternativa al método anterior para resolver vigas continuas es eliminar los enlaces entre los diversos tramos y elegir como incógnitas hiperestáticas los momentos flectores sobre los apoyos intermedios. Como se muestra en la Figura 6.12, esto equivale a suprimir la continuidad de los tramos y considerar la viga como una sucesión de vigas biapoyadas isostáticas que interaccionan entre sí a través de momentos de extremidad, de valor desconocido *a priori*.

Sea una viga continua de $n+2$ apoyos, con grado de hiperestatismo n, ya que tiene n apoyos intermedios. Consideremos tres apoyos *consecutivos*, a los que denominaremos I, J y K; consideremos también los dos vanos *contiguos* que los unen: el IJ, a la izquierda del apoyo J, y el JK, a la derecha del apoyo J (Figura 6.12a). Aislando cada tramo y teniendo en cuenta los momentos hiperestáticos que actúan en sus extremos, se tiene el esquema estructural isostático de la Figura 6.12b. Las ecuaciones que conducen a la determinación de los momentos hiperestáticos incógnita M_J $(J = 1, ..., n)$, sobre los apoyos intermedios, son las correspondientes condiciones de giro *relativo* nulo a uno y otro lado del apoyo J, es decir, de igualdad de giros en los extremos de vanos consecutivos:

$$\phi_J^{\text{rel}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{JI} = \phi_{JK} \qquad J = 1, ..., n \tag{6.10}$$

donde ϕ_J^{rel} es el giro relativo a uno y otro lado del apoyo J y ϕ_{JI} y ϕ_{JK} representan los giros del apoyo J en los tramos IJ y JK. Nótese que se puede plantear una ecuación de compatibilidad de giros como la anterior en cada apoyo intermedio, es decir, que se pueden plantear tantas ecuaciones como incógnitas hiperestáticas tiene el problema.

Con esta elección de incógnitas hiperestáticas, el problema de la viga continua se reduce al estudio de una serie de vigas simplemente apoyadas solicitadas por las cargas directas y por los momentos de extremidad. Si se adoptan como positivos los momentos de extremidad que traccionan las fibras inferiores de las piezas y los giros antihorarios y se supone la inercia constante en cada tramo, se tienen las siguientes expresiones para los giros a la izquierda y a la derecha del apoyo J, respectivamente:

$$\phi_{JI} = +\frac{M_I}{6K_{IJ}} + \frac{M_J}{3K_{IJ}} + \phi^o_{JI} \tag{6.11a}$$

$$\phi_{JK} = -\frac{M_J}{3K_{JK}} - \frac{M_K}{6K_{JK}} + \phi^o_{JK} \tag{6.11b}$$

donde los giros ϕ^o_{JI} y ϕ^o_{JK} son los giros del apoyo J de los tramos IJ y JK debidos a las cargas directamente aplicadas sobre ellos. Las rigideces $K_{IJ} = (EI/l)_{IJ}$ y $K_{JK} = (EI/l)_{JK}$ corresponden a los vanos IJ y JK, respectivamente.

Sustituyendo ahora en la Ec. (6.10), y operando, se tiene la *fórmula de los tres momentos* o de *Clapeyron*:

$$\frac{1}{K_{IJ}}M_I + 2\left[\frac{1}{K_{IJ}}+\frac{1}{K_{JK}}\right]M_J + \frac{1}{K_{JK}}M_K = 6\left(\phi^o_{JK}-\phi^o_{JI}\right) \tag{6.12}$$

Los coeficientes $1/K_{IJ}$ y $1/K_{JK}$ representan la flexibilidad a flexión de los vanos. Si la rigidez a flexión $K = EI/l$ es constante, se tiene la siguiente expresión:

$$M_I + 4M_J + M_K = 6K\left(\phi^o_{JK} - \phi^o_{JI}\right) \tag{6.13}$$

Como puede observarse en las ecuaciones (6.12) y (6.13), con este método cada ecuación sólo relaciona tres incógnitas hiperestáticas consecutivas, con lo que el sistema de ecuaciones resultante es tridiagonal y diagonalmente dominante, es decir, de fácil solución. Esta circunstancia es la motivación principal del procedimiento, ideado por los ingenieros franceses Bertot (1855) y Clapeyron (1857).

Una vez determinados los momentos flectores en los apoyos (incógnitas hiperestáticas del problema), el análisis de la viga continua se reduce al estudio de una serie de vigas simplemente apoyadas, solicitadas por las cargas directas y los momentos de extremidad. De esta forma pueden determinarse las reacciones para cada una de las vigas simplemente apoyadas. Así, por ejemplo, la reacción en el apoyo J puede calcularse a partir de las contribuciones correspondientes a los tramos IJ y JK (Figura 6.13), o sea:

$$R_J = R_{JI} + R_{JK} \tag{6.14}$$

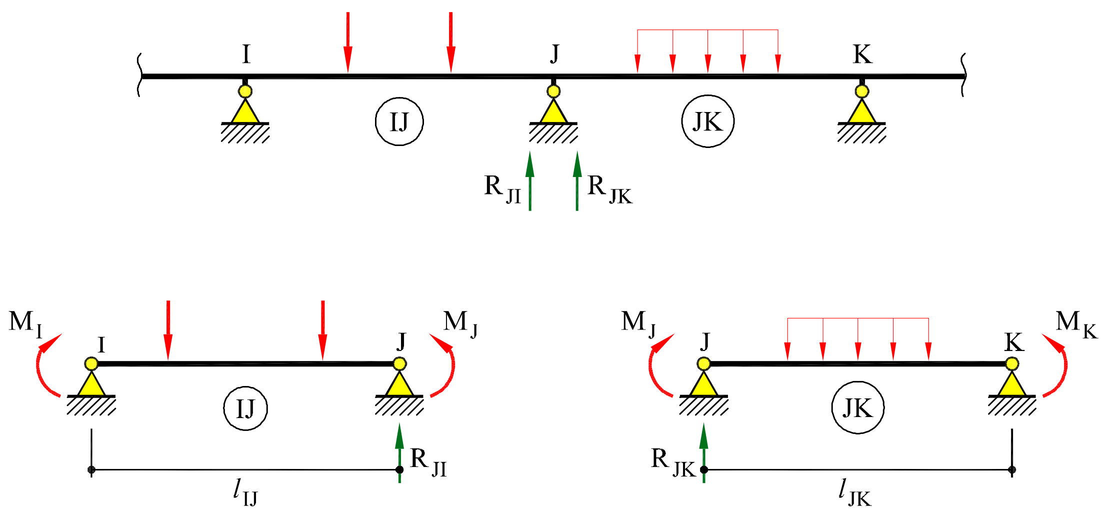


Fig. 6.13: Determinación de la reacción en un apoyo intermedio

donde R_{JI} y R_{JK} son las reacciones en el apoyo J en los tramos IJ y JK, respectivamente. Además:

$$R_{JI} = R^o_{JI} + \frac{M_I - M_J}{l_{IJ}} \qquad ; \qquad R_{JK} = R^o_{JK} + \frac{M_K - M_J}{l_{JK}} \tag{6.15}$$

siendo R^o_{JI} y R^o_{JK} las reacciones isostáticas en el apoyo J debidas a las cargas directas de los tramos IJ y JK, respectivamente. Por tanto, la reacción total del apoyo J es:

$$R_J = R^o_{JI} + R^o_{JK} + \frac{M_I - M_J}{l_{IJ}} + \frac{M_K - M_J}{l_{JK}} \tag{6.16}$$

Ejemplo 6.4.1

Calcular los momentos flectores en los apoyos de la viga de la Figura 6.14, aplicando la *ecuación de los tres momentos* y teniendo en cuenta que la rigidez a flexión $K = EI/l$ es constante. Datos: $l = 4\,\text{m}$; $F = 20\,\text{kN}$; $p = 30\,\text{kN/m}$; $M = 120\,\text{kN·m}$.

Tomando los tres primeros apoyos consecutivos (A, B y C), la ecuación de los tres momentos puede escribirse:

$$M_A + 4M_B + M_C = 6K\,(\phi^o_{BC} - \phi^o_{BA})$$

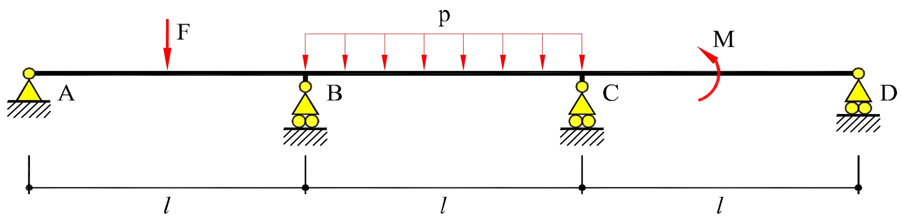


Fig. 6.14: Viga continua del Ejemplo 6.4.1

donde ϕ^o_{BA} y ϕ^o_{BC} son los giros del apoyo B de los tramos AB y BC, respectivamente, debidos a las cargas directamente aplicadas y considerando que dichos tramos están simplemente apoyados.

En la expresión anterior, el momento flector en el apoyo A (M_A) es nulo y los giros ϕ^o_{BA} y ϕ^o_{BC}, positivos si son antihorarios, son iguales a (Figura 6.15):

$$\phi^o_{BA} = \frac{Fl}{16K} \qquad \qquad \phi^o_{BC} = -\frac{pl^2}{24K}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\begin{aligned} 4M_B + M_C &= 6K\left(-\frac{pl^2}{24K} - \frac{Fl}{16K}\right) \\ &= -\frac{pl^2}{4} - \frac{3Fl}{8} = -150\,\mathrm{kN{\cdot}m} \end{aligned}$$

De igual manera, aplicando la ecuación de los tres momentos para los tres apoyos consecutivos siguientes (B, C y D), se obtiene:

$$M_B + 4M_C + M_D = 6K\left(\phi^o_{CD} - \phi^o_{CB}\right)$$

En la expresión anterior, el momento flector en el apoyo D, (M_D) es nulo y los giros ϕ^o_{CB} y ϕ^o_{CD} son iguales a:

$$\phi^o_{CB} = \frac{pl^2}{24K} \qquad \qquad \phi^o_{CD} = -\frac{M}{24K}$$

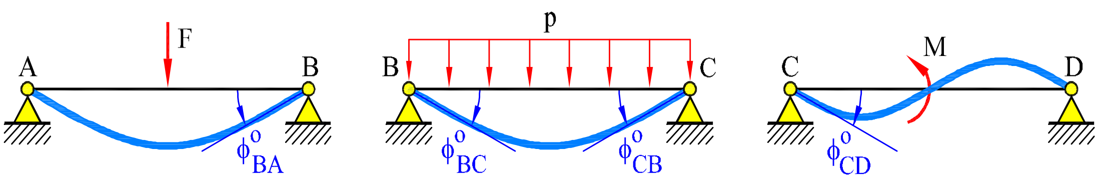


Fig. 6.15: Resolución de la viga del Ejemplo 6.4.1

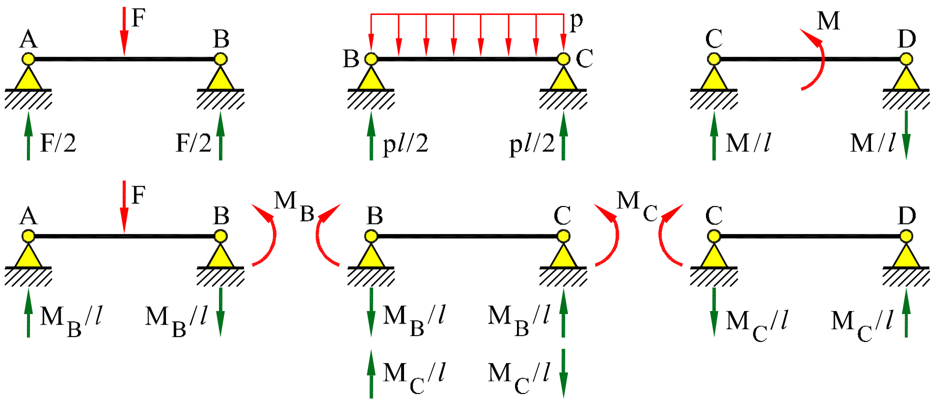


Fig. 6.16: Cálculo de las reacciones del Ejemplo 6.4.1

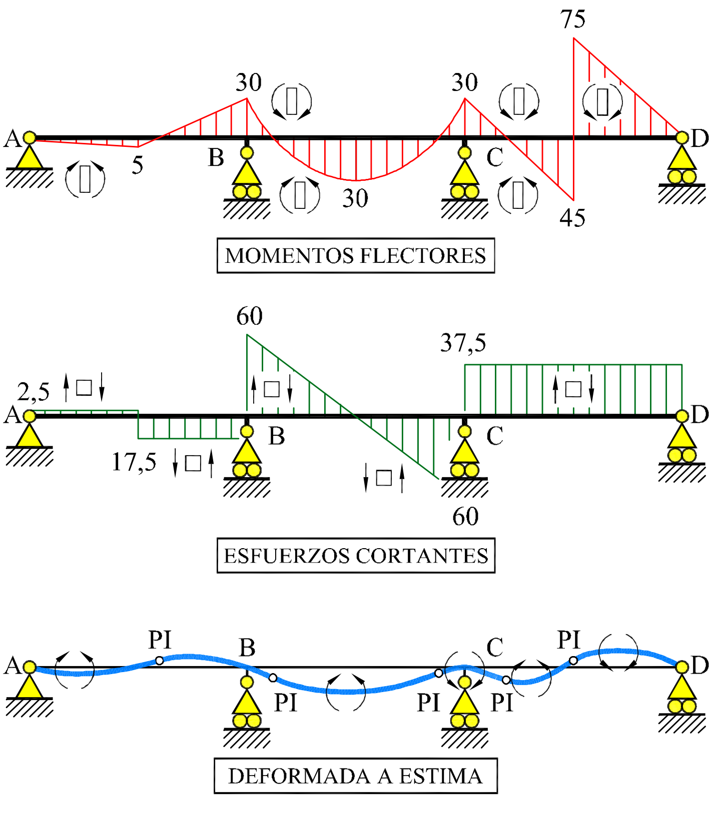


Fig. 6.17: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 6.4.1

Sustituyendo se obtiene:

$$
\begin{aligned}
M_B + 4M_C &= 6K\left(-\frac{M}{24K} - \frac{pl^2}{24K}\right) \\
&= -\frac{M}{4} - \frac{pl^2}{4} = -150\,\text{kN·m}
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se obtienen los valores de los momentos flectores en los apoyos B y C:

$$M_B = M_C = -30\,\text{kN.m}$$

Una vez calculados los momentos de extremo de barra, las reacciones en los apoyos se calculan según el esquema de la Figura 6.16:

$$
\begin{aligned}
R_A &= R_{AB} = \frac{F}{2} + \frac{M_B}{l} = 2,5\,\text{kN} \;\; (\uparrow) \\
R_B &= R_{BA} + R_{BC} = \frac{F}{2} - \frac{M_B}{l} + \frac{pl}{2} - \frac{M_B}{l} + \frac{M_C}{l} = 77,5\,\text{kN} \;\; (\uparrow) \\
R_C &= R_{CB} + R_{CD} = \frac{pl}{2} + \frac{M_B}{l} - \frac{M_C}{l} + \frac{M}{l} - \frac{M_C}{l} = 97,5\,\text{kN} \;\; (\uparrow) \\
R_D &= R_{DC} = -\frac{M}{l} + \frac{M_C}{l} = -37,5\,\text{kN} \; (\downarrow)
\end{aligned}
$$

En la Figura 6.17 se muestran las leyes de esfuerzos de la viga estudiada y su deformada a estima.

Extremos empotrados

Si uno o ambos extremos de la viga continua están empotrados, se tienen como incógnitas hiperestáticas adicionales los momentos en los empotramientos existentes.

Así, por ejemplo, en la viga de la Figura 6.18, en la que los extremos izquierdo A y derecho Z están empotrados, las incógnitas adicionales son los momentos de empotramiento M_A y M_Z.

Las necesarias ecuaciones adicionales se obtienen al imponer las condiciones cinemáticas que expresan que los giros en los empotramientos son nulos; estas condiciones puede expresarse en la forma:

$$\phi_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{M_A}{3K_{AB}} - \frac{M_B}{6K_{AB}} + \phi^o_{AB} = 0 \tag{6.17}$$

$$\phi_Z = 0 \quad \Rightarrow \quad +\frac{M_Y}{6K_{YZ}} + \frac{M_Z}{3K_{YZ}} + \phi^o_{ZY} = 0 \tag{6.18}$$

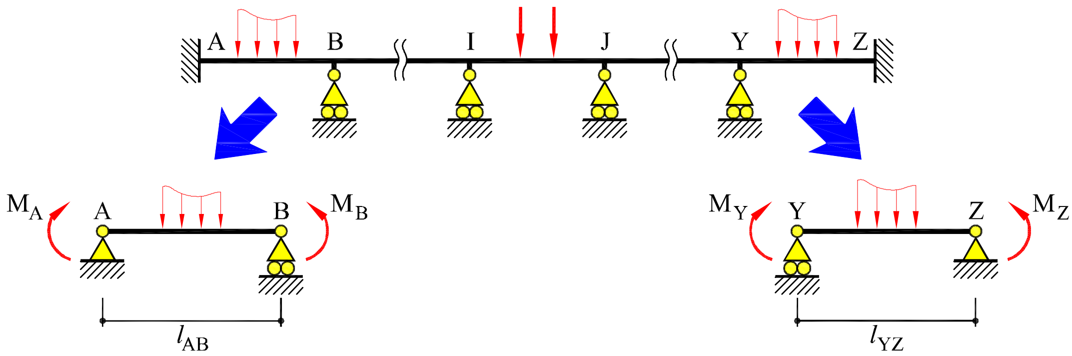


Fig. 6.18: Viga con extremos empotrados

de donde se obtienen las respectivas ecuaciones:

$$2M_A + M_B = 6K_{AB}\phi^o_{AB} \tag{6.19}$$
$$M_Y + 2M_Z = -6K_{YZ}\phi^o_{ZY} \tag{6.20}$$

Ejemplo 6.4.2

Calcular los momentos flectores en los apoyos de la viga de la Figura 6.19, aplicando la *ecuación de los tres momentos* y teniendo en cuenta que la rigidez a flexión $K = EI/l$ es constante. Datos: $l = 4\,\text{m}$; $F = 20\,\text{kN}$; $p = 30\,\text{kN/m}$; $M = 120\,\text{kN·m}$.

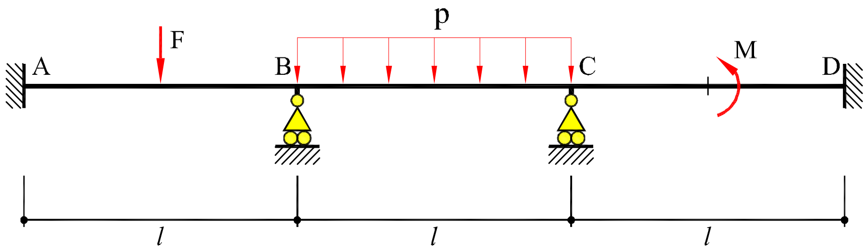


Fig. 6.19: Viga continua del Ejemplo 6.4.2

Aplicando la ecuación de los tres momentos en los apoyos B y C (ver Ejemplo 6.4.1), se obtienen las ecuaciones:

$$M_A + 4M_B + M_C = 6K\left(-\frac{pl^2}{24K} - \frac{Fl}{16K}\right) = -\frac{pl^2}{4} - \frac{3Fl}{8} = -150\,\text{kN·m}$$

$$M_B + 4M_C + M_D = 6K\left(-\frac{M}{24K} - \frac{pl^2}{24K}\right) = -\frac{M}{4} - \frac{pl^2}{4} = -150\,\text{kN·m}$$

Por otra parte, la condición de giro nulo en el empotramientos A resulta en:

$$2M_A + M_B = 6K\phi^o_{AB} = 6K\left(-\frac{Fl}{16K}\right) = -30 \text{ kN·m}$$

Análogamente, en el empotramiento D, la condición de giro nulo es:

$$M_C + 2M_D = -6K\phi^o_{DC} = -6K\left(-\frac{M}{24K}\right) = 30 \text{ kN·m}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se obtienen los valores de los momentos flectores en los apoyos A, B, C y D:

$$\begin{aligned} M_A &= -1,33 \text{ kN·m} & \quad M_C &= -39,33\,\text{kN·m} \\ M_B &= -27,33\,\text{kN·m} & \quad M_D &= 34,67\,\text{kN·m} \end{aligned}$$

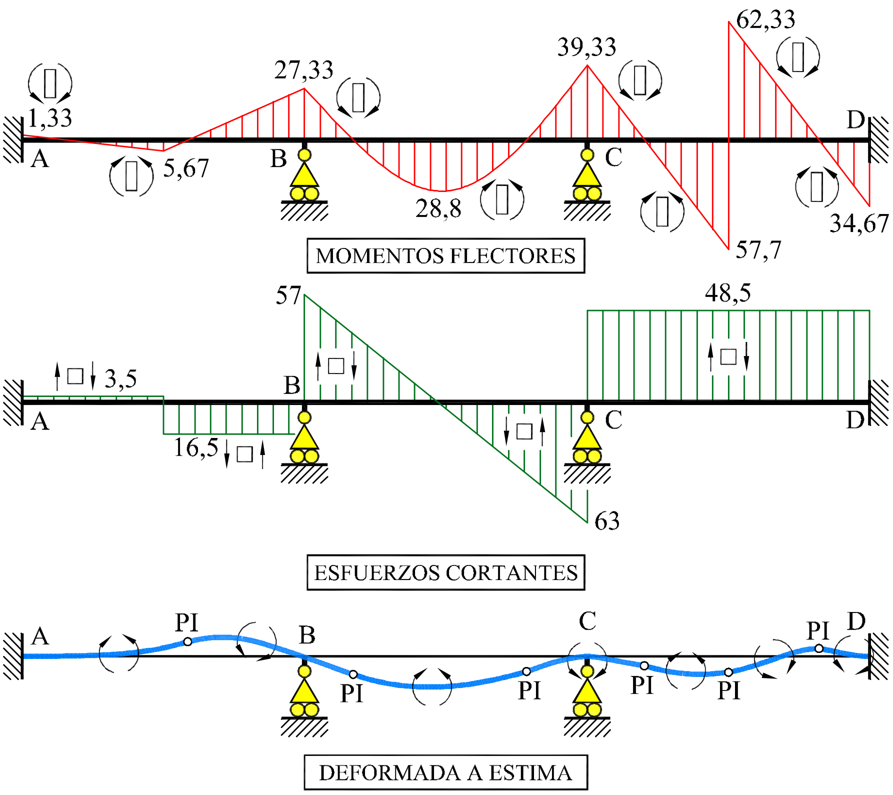


Fig. 6.20: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 6.4.2

Una vez calculados los momentos de extremo de barra, se calculan las reacciones:

$$R_A = R_{AB} \quad = \quad 3,5\,\text{kN} \quad (\uparrow) \qquad R_C = R_{CB} + R_{CD} \quad = \quad 111,5\,\text{kN} \quad (\uparrow)$$
$$R_B = R_{BA} + R_{BC} \quad = \quad 73,5\,\text{kN} \quad (\uparrow) \qquad R_D = R_{DC} \quad = \quad -48,5\,\text{kN} \quad (\downarrow)$$

En la Figura 6.20 se muestran las leyes de esfuerzos de la viga estudiada y su deformada a estima.

Descenso de apoyos

Consideremos ahora la eventualidad de que los $n+2$ apoyos de una viga continua puedan sufrir descensos de valor conocido. Llamemos v_J al descenso (considerado positivo descendente) que experimenta un apoyo genérico J; los tramos contiguos a dicho apoyo están sujetos a giros de sólido rígido de valor (Figura 6.21):

$$\overline{\phi}_{JI} = -\frac{v_J - v_I}{l_{IJ}} \qquad ; \qquad \overline{\phi}_{JK} = -\frac{v_K - v_J}{l_{JK}} \tag{6.21}$$

donde las longitudes l_{IJ} y l_{JK} son las longitudes de los vanos IJ y JK, respectivamente.

Las expresiones (6.11a) y (6.11b), que permiten obtener los giros a la izquierda y la derecha del apoyo J, deben modificarse para tener en cuenta esta componente adicional. Se tiene:

$$\phi_{JI} \;=\; +\frac{M_I}{6K_{IJ}} + \frac{M_J}{3K_{IJ}} + \phi^o_{JI} + \overline{\phi}_{JI} \tag{6.22a}$$

$$\phi_{JK} \;=\; -\frac{M_J}{3K_{JK}} - \frac{M_K}{6K_{JK}} + \phi^o_{JK} + \overline{\phi}_{JK} \tag{6.22b}$$

Introduciendo estos términos adicionales, la ecuación de los tres momentos (6.12) queda de la forma:

$$M_I \frac{1}{K_{IJ}} + 2M_J \left[\frac{1}{K_{IJ}} + \frac{1}{K_{JK}}\right] + M_K \frac{1}{K_{JK}} = \tag{6.23}$$
$$= 6\left[(\phi^o_{JK} - \phi^o_{JI}) + (\overline{\phi}_{JK} - \overline{\phi}_{JI})\right]$$

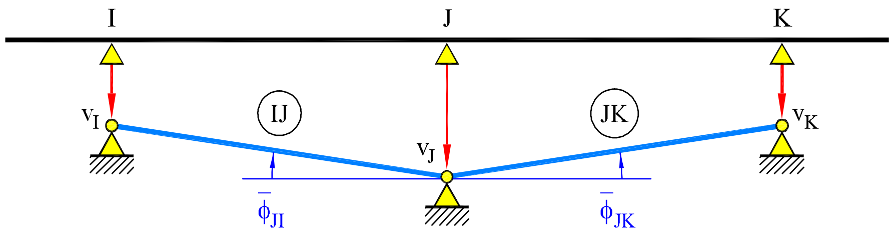


Fig. 6.21: Descenso de apoyos intermedios de una viga continua

donde el último término del segundo miembro es el correspondiente a los descensos de los apoyos.

Ejemplo 6.4.3

La viga continua de tres vanos de luz l de la Figura 6.22 se apoya sobre una viga de longitud $2a$. La rigidez a flexión de ambas vigas es constante e igual a EI. Calcular las leyes de esfuerzos, en función del parámetro de flexibilidad $\alpha = (2a/l)^3$, en los casos: (a) $\alpha = 0$ (apoyo rígido) y (b) $\alpha = 1$ ($2a = l$).

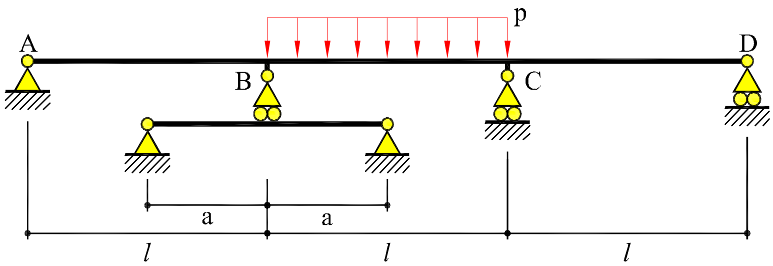


Fig. 6.22: Viga continua del Ejemplo 6.4.3

A efectos de resolución, se adopta el esquema estructural de viga continua con un apoyo elástico de la Figura 6.23a. La constante elástica k del apoyo B se determina resolviendo la viga biapoyada de longitud $2a$ (Figura 6.23b), con lo que se tiene:

$$v_B = \frac{R_B\,(2a)^3}{48EI} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{R_B}{v_B} = 6\,\frac{EI}{a^3}$$

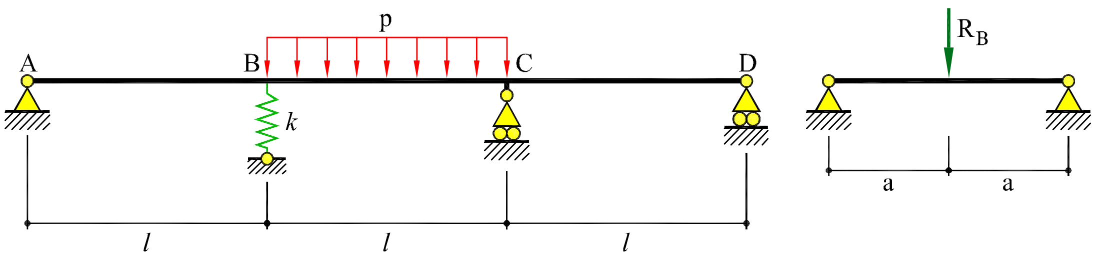


Fig. 6.23: Resolución del Ejemplo 6.4.3

Sabiendo que $M_A = M_D = 0$ y haciendo $K = EI/l$, se pueden plantear las ecuaciones de compatibilidad de giros en los apoyos B y C que resuelven el problema. Así:

$$\begin{aligned} 4M_B + \ M_C &= 6K\left[(\phi^o_{BC} - \phi^o_{BA}) + (\overline{\phi}_{BC} - \overline{\phi}_{BA})\right] \\ M_B + 4M_C &= 6K\left[(\phi^o_{CD} - \phi^o_{CB}) + (\overline{\phi}_{CD} - \overline{\phi}_{CB})\right] \end{aligned}$$

Los giros debidos a la carga uniforme son:

$$\begin{aligned} \phi^o_{BA} &= 0 \qquad ; \qquad \phi^o_{BC} = -\frac{pl^2}{24K} \\ \phi^o_{CB} &= +\frac{pl^2}{24K} \qquad ; \qquad \phi^o_{CD} = 0 \end{aligned}$$

y los debidos a los descensos del apoyo B son:

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_{BA} &= -\frac{v_B}{l} \qquad ; \qquad \overline{\phi}_{BC} = +\frac{v_B}{l} \\ \overline{\phi}_{CB} &= +\frac{v_B}{l} \qquad ; \qquad \overline{\phi}_{CD} = 0 \end{aligned}$$

Ahora es necesario expresar v_B en función de los momentos incógnitas M_B y M_C. Para ello hay que obtener la reacción R_B:

$$R_B = R_{BA} + R_{BC} = -\frac{M_B}{l} + \frac{M_C - M_B}{l} + \frac{pl}{2} = \frac{M_C - 2M_B}{l} + \frac{pl}{2}$$

y entonces, teniendo en cuenta que $\alpha = (2a/l)^3$, se tiene:

$$\frac{v_B}{l} = \frac{R_B}{lk} = \frac{1}{l}\left[\frac{M_C - 2M_B}{l} + \frac{pl}{2}\right]\left(\frac{a^3}{6EI}\right) = \frac{1}{6K}\left[M_C - 2M_B + \frac{pl^2}{2}\right]\frac{\alpha}{8}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad, se tiene:

$$\begin{aligned} 4M_B + \ M_C &= 6K\left[-\frac{pl^2}{24K} + \frac{\alpha}{24K}\left(M_C - 2M_B + \frac{pl^2}{2}\right)\right] \\ M_B + 4M_C &= 6K\left[-\frac{pl^2}{24K} - \frac{\alpha}{24K}\left(M_C - 2M_B + \frac{pl^2}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Reagrupando términos, el sistema queda:

$$4\left(1 + \frac{\alpha}{8}\right)M_B + \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)M_C = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)pl^2 \qquad \text{(a)}$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)M_B + 4\left(1 + \frac{\alpha}{32}\right)M_C = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)pl^2 \qquad \text{(b)}$$

donde se ve la influencia de la rigidez del apoyo B. Así:

(a) para $\alpha = 0$ se recupera la solución correspondiente al apoyo B rígido, esto es

$$M_B = M_C = -\frac{1}{20}pl^2$$

y reacciones:

$$\begin{aligned}
R_A &= R_{AB} = \frac{M_B}{l} = -\frac{1}{20}pl \quad (\downarrow) \\
R_B &= R_{BA} + R_{BC} = -\frac{M_B}{l} + \frac{1}{2}pl + \frac{M_C - M_B}{l} = +\frac{11}{20}pl \quad (\uparrow) \\
R_C &= R_B \\
R_D &= R_A
\end{aligned}$$

(b) para $\alpha = 1$ $(2a = l)$ el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{2}M_B + \frac{3}{4}M_C &= -\frac{1}{8}pl^2 \\
\frac{3}{4}M_B + \frac{33}{8}M_C &= -\frac{5}{16}pl^2
\end{aligned}$$

con solución:

$$M_B = -\frac{1}{64}pl^2 \qquad ; \qquad M_C = -\frac{7}{96}pl^2$$

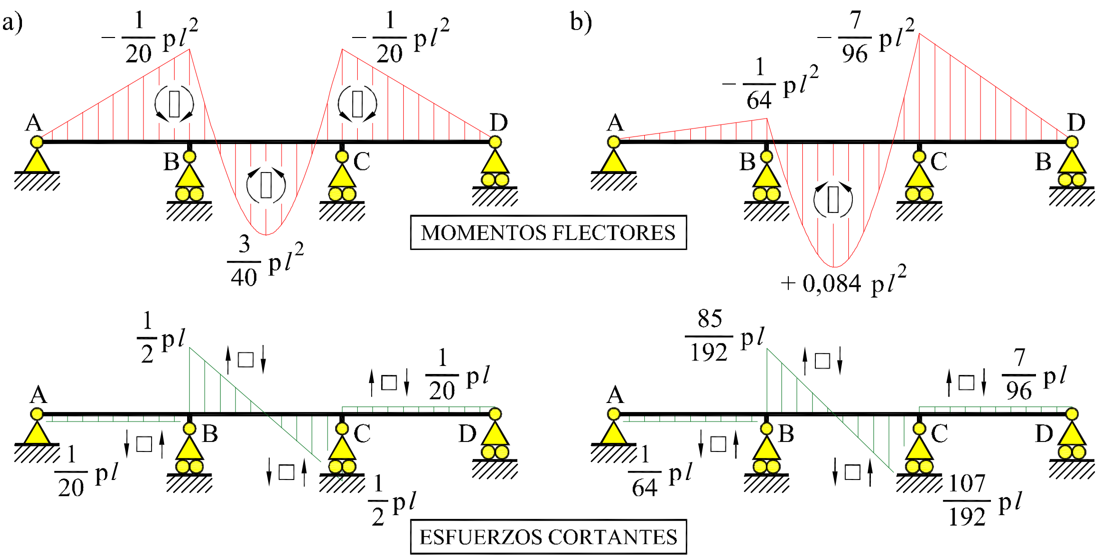


Fig. 6.24: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 6.4.3: (a) para $\alpha = 0$ (b) para $\alpha = 1$

y reacciones:

$$
\begin{aligned}
R_A &= R_{AB} = \frac{M_B}{l} = -\frac{1}{64}pl \quad (\downarrow) \\
R_B &= R_{BA} + R_{BC} = -\frac{M_B}{l} + \frac{1}{2}pl + \frac{M_C - M_B}{l} = \frac{11}{24}pl \quad (\uparrow) \\
R_C &= R_{CB} + R_{CD} = \frac{1}{2}pl - \frac{M_C - M_B}{l} - \frac{M_C}{l} = \frac{121}{192}pl \quad (\uparrow) \\
R_D &= R_{DC} = \frac{M_C}{l} = -\frac{7}{96}pl \quad (\downarrow)
\end{aligned}
$$

Las leyes de esfuerzos de uno y otro caso se muestran en las Figuras 6.24a y 6.24b.

6.5 Pórticos

Se llama *pórtico* o *estructura porticada* a las estructuras reticuladas de plano medio formadas a base de soportes y dinteles. Cuando las piezas de estas estructuras forman células cerradas se les llama *marcos*.

En la Figura 6.25 se muestran algunos ejemplos de estructuras de esta tipología, habitual en ingeniería civil y edificación. El puente o pasarela de la Figura 6.25a es un pórtico simple, mientras que la estructura de la Figura 6.25b es un pórtico doble a dos

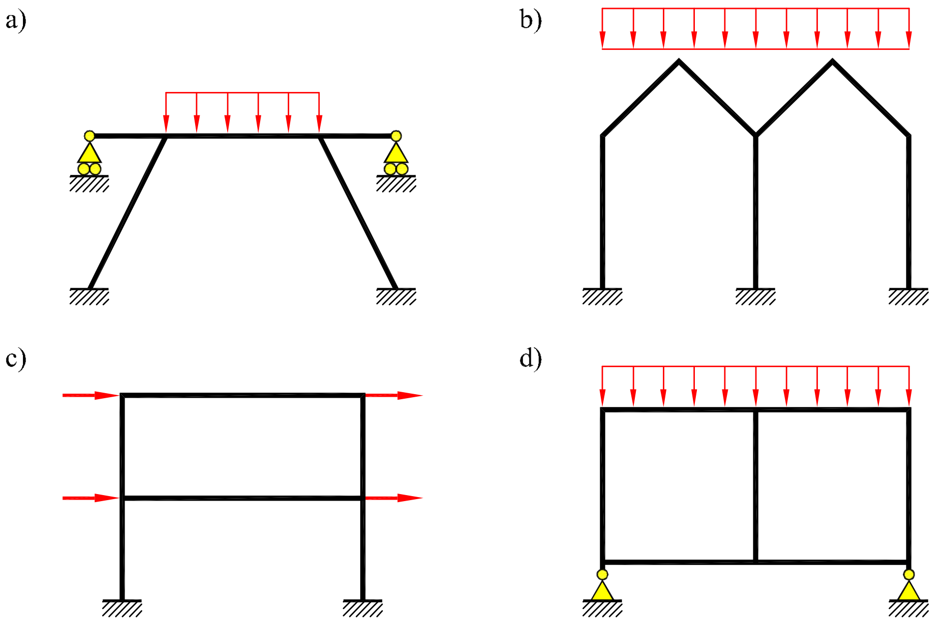


Fig. 6.25: Estructuras porticadas

aguas. En la Figura 6.25c se muestra una típica estructura de edificación de dos pisos; por último, la Figura 6.25d muestra un marco biapoyado de dos células.

Por razones de simetría respecto a su plano medio, las piezas que forman estas estructuras trabajan a flexión compuesta recta, esto es, están sometidas a momentos flectores de eje perpendicular al plano medio y a esfuerzos cortantes y axiles contenidos en dicho plano. Esto, unido al hecho de que los nudos de las estructuras reticuladas sean rígidos, hace que los pórticos y marcos sean, generalmente, estructuras con alto grado de indeterminación estática. De hecho, el pórtico (o arco) triarticulado es la única tipología de pórtico isostático existente.

Así, por ejemplo, para cargas arbitrarias, las estructuras de la Figura 6.25 son, respectivamente, 5, 6, 6 y 7 veces hiperestáticas. Esto hace que el método de flexibilidad sea poco práctico a la hora de resolver pórticos y marcos en la práctica. Sin embargo, a menudo, las estructuras presentan geometrías simétricas, lo que permite reducir notablemente el grado de hiperestatismo y resolverlas por este método (ver Sección 2.6 del Capítulo 2). Así, en la Figura 6.26 se muestran las simplificaciones pertinentes para las estructuras de la Figura 6.25, que resultan en problemas 3, 3, 2 y 4 veces hiperestáticos, respectivamente.

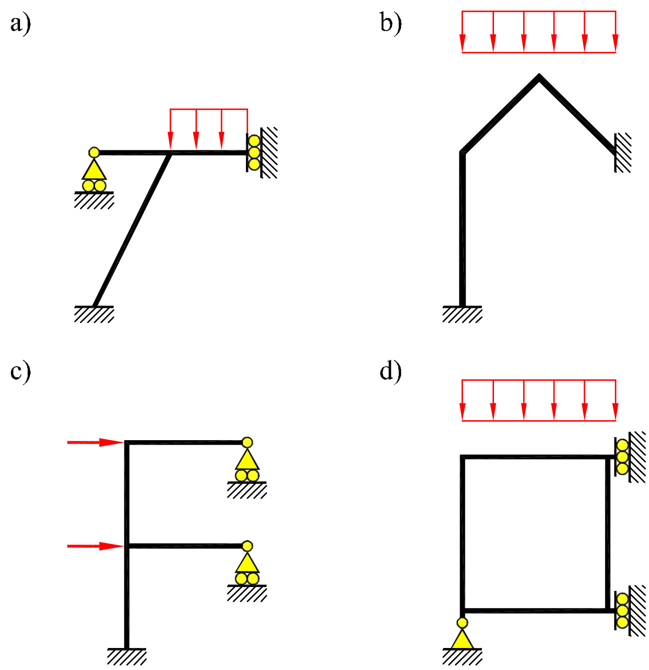


Fig. 6.26: Estructuras porticadas con cargas simétricas y antisimétricas

En lo que sigue se muestran ejemplos ilustrativos de la resolución de pórticos hiperestáticos por el método de flexibilidad. Es importante observar que, en todos ellos, la liberación de apoyos y enlaces superabundantes para construir la estructura isostática base no es única y, por lo tanto, el procedimiento de solución elegido no es sino uno particular de entre varios posibles. Las soluciones obtenidas, sin embargo, son únicas para los problemas planteados. Como es habitual en la resolución de estructuras reticuladas, se desprecia la deformación por axil y cortante frente a la de flexión.

Ejemplo 6.5.1

Resolver el pórtico de la Figura 6.27a bajo carga uniforme en el dintel. La rigidez a flexión EI es idéntica para todas las barras.

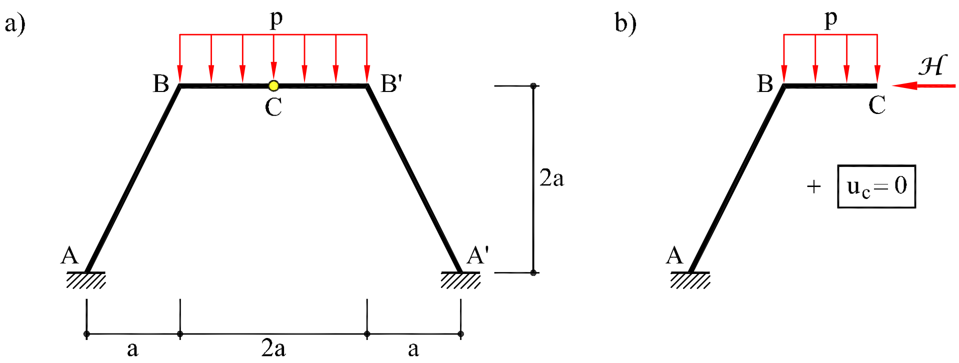


Fig. 6.27: (a) Pórtico simple del Ejemplo 6.5.1 (b) estructura isostática base

Por condiciones de simetría de geometría y carga, el cortante en el eje de simetría debe ser nulo. Por tanto, la estructura es una vez hiperestática y se puede eligir como incógnita hiperestática la fuerza horizontal $\mathcal{H}$ en la rótula C del centro del dintel. La correspondiente condición de compatibilidad es, por simetría, movimiento horizontal nulo en el punto C. Las leyes de momento flector en las barras AB y BC son:

$$M = \begin{cases} -pa(\frac{3}{2}a - X) + \mathcal{H}(2a - Y) & AB \\ -\frac{p}{2}(2a - X)^2 & BC \end{cases}$$

donde se han tomado los ejes (X, Y) de la Figura 6.28a y se consideran positivos los flectores que traccionan las fibras interiores del pórtico.

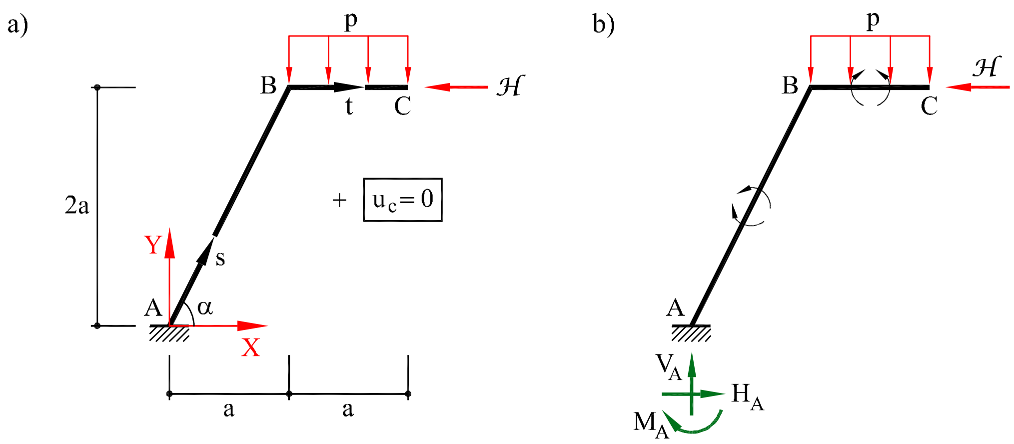


Fig. 6.28: Resolución del pórtico del Ejemplo 6.5.1

La derivada de la ley de momento flector respecto a $\mathcal{H}$ es:

$$\frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}} = \begin{cases} (2a - Y) & (AB) \\ 0 & (BC) \end{cases}$$

Utilizando el segundo Teorema de Castigliano, la condición de movimiento horizontal nulo en C se puede escribir:

$$\begin{aligned} u_C &= 0 = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{H}} = \int_A^C \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}} ds \\ &= \frac{1}{EI} \int_A^B \left[-pa(\frac{3a}{2} - X) + \mathcal{H}(2a - Y) \right] (2a - Y) ds + \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_B^C \left[-\frac{p}{2}(2a - X)^2 \right] (0) ds \\ &= \int_{X=0}^{X=a} [pa(-3a^2 + 5aX - 2X^2) + \\ &\quad + 4\mathcal{H}(a^2 - 2aX + X^2)] \frac{dX}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

donde se ha tomado $Y = 2X, ds = dX/\cos \alpha$ en la barra AB.

Integrando y resolviendo la ecuación resultante, se tiene:

$$\mathcal{H} = \frac{7}{8} pa$$

Ahora se pueden calcular las reacciones isostáticas en A (ver Figura 6.28b):

$$M_A = \frac{1}{4} pa^2 \qquad V_A = pa \qquad H_A = \mathcal{H} = \frac{7}{8} pa$$

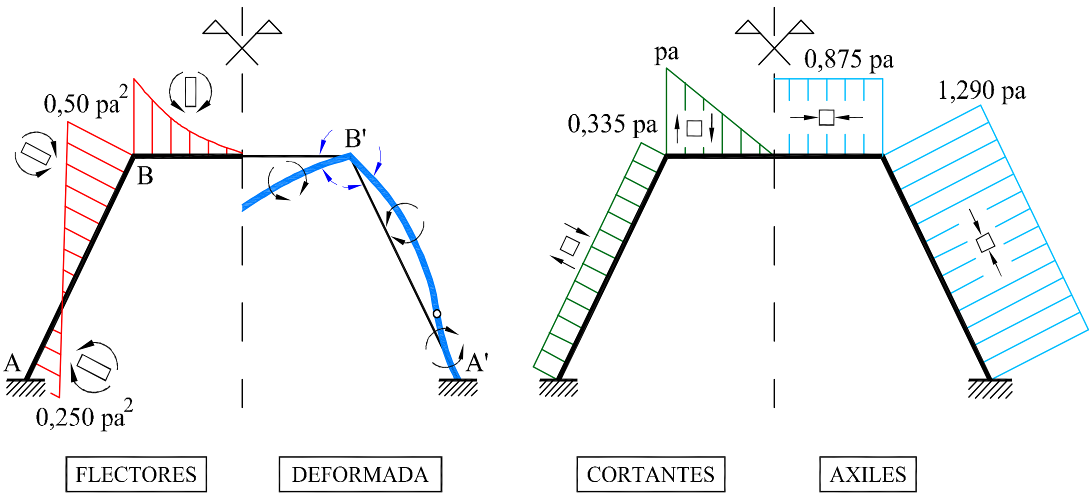


Fig. 6.29: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 6.5.1

y se pueden dibujar las leyes de esfuerzos y la deformada a estima (Figura 6.29).

Ejemplo 6.5.2

Resolver la estructura de dos pisos de la Figura 6.30a para las cargas en ella indicadas.

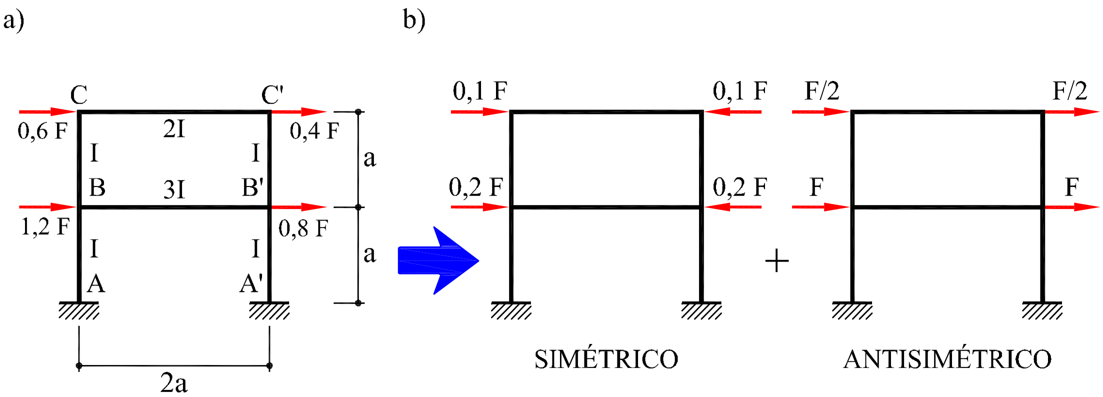


Fig. 6.30: (a) Estructura del Ejemplo 6.5.2 (b) descomposición del estado de carga

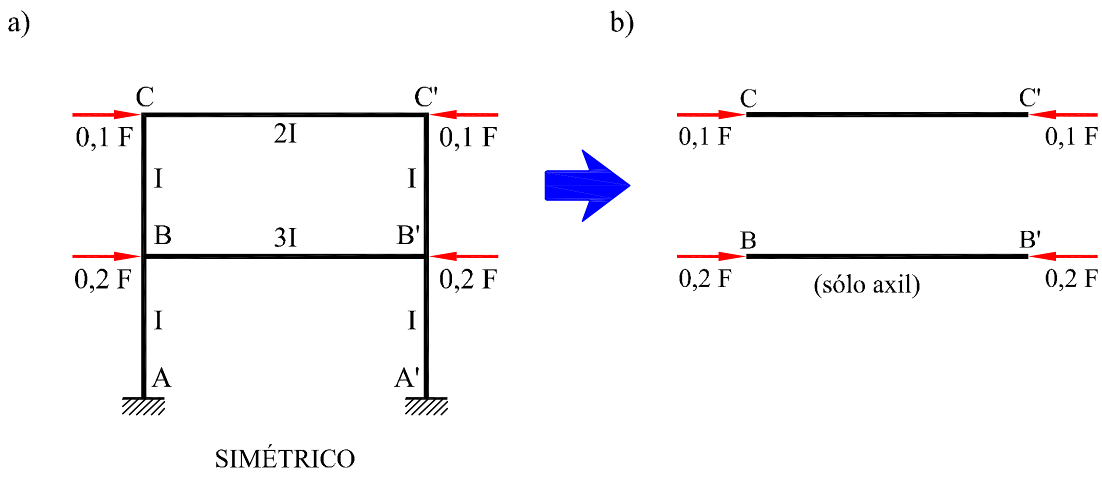


Fig. 6.31: (a) Estado simétrico de carga (b) solución

La estructura es geométricamente simétrica y para su estudio descomponemos la carga en suma de dos estados, uno simétrico y el otro antisimétrico, tal como se muestra en la Figura 6.30b.

El caso de carga simétrica (Figura 6.31) admite, despreciando la deformación por axil, una solución de sólo axiles de compresión en las barras horizontales de obtención inmediata.

Por tanto, sólo resta resolver media estructura correspondiente al estado antisimétrico (Figura 6.32). La estructura es dos veces hiperestática y se eligen como incógnitas hiperestáticas las reacciones R_M y R_N (Figura 6.32b). Las correspondientes condiciones cinemáticas son de movimiento vertical nulo en sus respectivos puntos de aplicación, $v_M = 0$, $v_N = 0$.

Las leyes de momento flector en las barras AB, BC, CM y BN son:

$$M = \begin{cases} R_M a + R_N a - F\,(a-Y) - \dfrac{F}{2}\,(2a-Y) & (AB) \\ R_M a - \dfrac{F}{2}\,(2a-Y) & (BC) \\ R_M (a-X) & (CM) \\ R_N (a-X) & (BN) \end{cases}$$

donde se han tomado los ejes (X,Y) de la Figura 6.32b y se consideran positivos los flectores que traccionan las fibras interiores del pórtico.

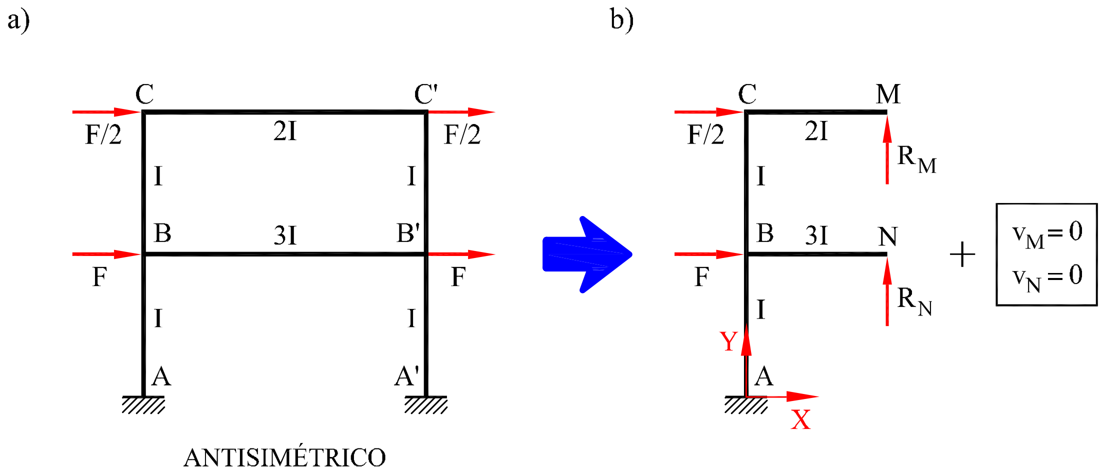


Fig. 6.32: (a) Estado antisimétrico de carga (b) estructura isostática base

Las derivadas de las leyes de momentos respecto a R_M y R_N son:

$$\frac{\partial M}{\partial R_M} = \begin{cases} a & (AB) \\ a & (BC) \\ (a-X) & (CM) \\ 0 & (BN) \end{cases} \qquad \frac{\partial M}{\partial R_N} = \begin{cases} a & (AB) \\ 0 & (BC) \\ 0 & (CM) \\ (a-X) & (BN) \end{cases}$$

Utilizando el segundo Teorema de Castigliano, la condición de compatibilidad de desplazamiento vertical nulo en M se puede escribir:

$$\begin{aligned} v_M &= 0 = \frac{\partial U}{\partial R_M} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_M}\,ds \\ &= \frac{1}{EI}\int_{Y=0}^{Y=a}\left[R_M a + R_N a - F\,(a-Y) - \frac{F}{2}\,(2a-Y)\right] a\;dY + \\ &\quad + \frac{1}{EI}\int_{Y=a}^{Y=2a}\left[R_M a - \frac{F}{2}\,(2a-Y)\right] a\;dY + \\ &\quad + \frac{1}{2EI}\int_{X=0}^{X=a} R_M(a-X)(a-X)\;dX \end{aligned}$$

que resulta en la ecuación:

$$\frac{13}{6}R_M + R_N = \frac{3}{2}F \tag{a2}$$

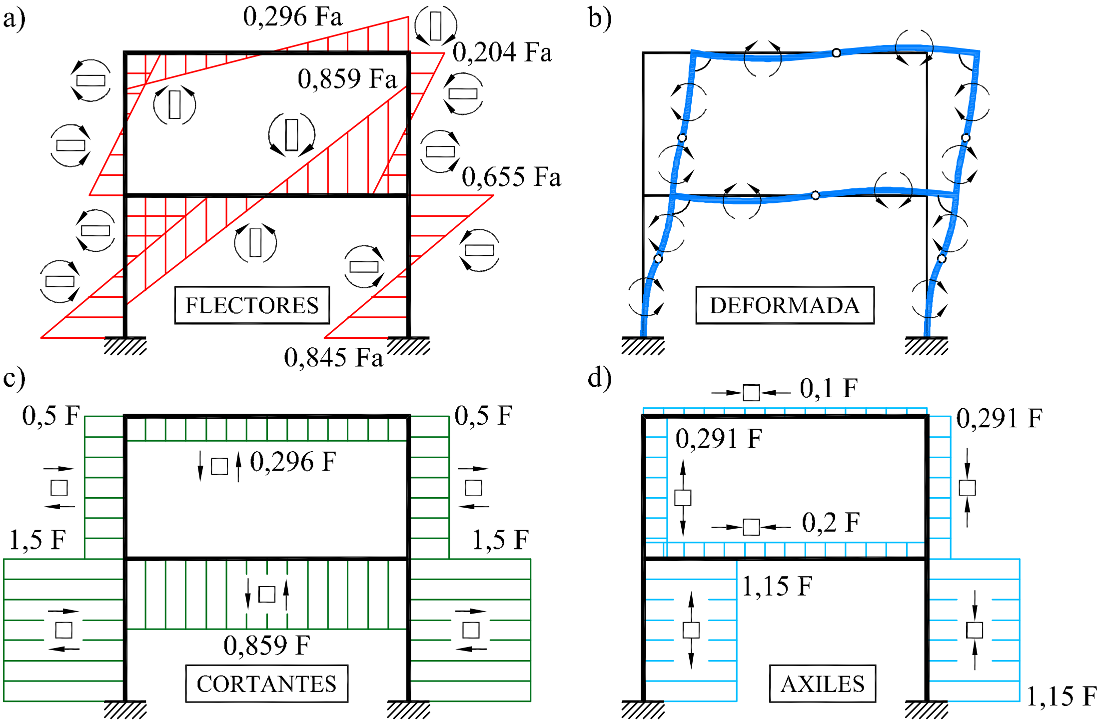


Fig. 6.33: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 6.5.2

La segunda condición de compatibilidad es:

$$\begin{aligned} v_N &= 0 = \frac{\partial U}{\partial R_N} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_N}\, ds \\ &= \frac{1}{EI}\int_{Y=0}^{Y=a}\left[R_M a + R_N a - F\,(a-Y) - \frac{F}{2}(2a-Y)\right] a\; dY + \\ &\qquad + \frac{1}{3EI}\int_{X=0}^{X=a} R_N(a-X)(a-X)\; dX \end{aligned}$$

que resulta en la ecuación:

$$R_M + \frac{10}{9}R_N = \frac{5}{4}F \tag{b2}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (a2) y (b2) se obtiene:

$$R_M = 0,296\,F \qquad\qquad R_N = 0,859\,F$$

La deformada a estima y las leyes de esfuerzos de la estructura pueden verse en las Figuras 6.33a-6.33d.

7 El Método de Rigidez

7.1 Introducción

Los primeros métodos de resolución de estructuras hiperestáticas se desarrollaron durante el siglo XIX y se aplicaron a las tipologías estructurales propias de la época: puentes metálicos de barras articuladas, arcos y vigas continuas. El reducido grado de hiperestatismo de estas estructuras hace que su resolución por el método de flexibilidad sea factible, incluso con los limitados medios de cálculo disponibles entonces.

Con el siglo XX llega el uso del hormigón armado como material de construcción habitual. En las estructuras de barras construidas en hormigón armado los nudos se consideran rígidos y, por lo tanto, las piezas trabajan fundamentalmente a flexión. En las estructuras porticadas, el grado de hiperestatismo crece notablemente y el uso del método de compatibilidad resulta poco práctico.

En 1914, Axel Bendixen presenta en Berlín el "método de pendientes y flechas" para la resolución de pórticos, la primera formalización del método de rigidez. En 1922, K. A. Čališev presenta un método de rigidez de resolución de pórticos en el que se calculan los momentos flectores de los extremos de las barras por aproximaciones sucesivas, resolviendo "una sola ecuación cada vez". En 1932, Hardy Cross publica en la revista de la American Society of Civil Engineers (ASCE) otra versión de este método "iterativo" al que llama "método de distribución de momentos", en el que se resuelve la estructura nudo a nudo. El método de Cross fue muy popular en América y Europa, ya que permitía el cálculo manual de pórticos de forma sistemática.

Con la generalización a finales del siglo XX de los ordenadores digitales, estos métodos quedaron obsoletos. En la actualidad, el *método directo de rigidez,* formulado para su aplicación automática en programas de ordenador, constituye la forma práctica de calcular estructuras, tanto de barras como de otras tipologías. Se muestra en este Capítulo la aplicación del método de rigidez a la resolución de estructuras articuladas y reticuladas planas.

7.2 El Método de Rigidez

El método de rigidez es un método general de análisis de estructuras, que puede aplicarse para resolver tanto estructuras isostáticas como hiperestáticas.

El método consiste en identificar el número de movimientos incógnita que determinan la deformación de la estructura, satisfaciendo *a priori* las condiciones de compatibilidad de movimientos en los nudos de la estructura. El número de incógnitas del problema es, pues, igual al grado de indeterminación cinemática del problema. En principio, el número de éstas es:

$$\mathrm{k} = gl \cdot nn - ca \tag{7.1}$$

donde gl es el número de grados de libertad a considerar por nudo, nn es el número de nudos de la estructura y ca es el número de grados de libertad prescritos por las condiciones de apoyo. Consideraciones adicionales, tales como la inextensibilidad de las barras en las estructuras reticuladas, pueden reducir el número de incógnitas.

El hecho de elegir estas incógnitas implica liberar, en principio, ciertas condiciones de equilibrio que deben satisfacerse en los nudos de la estructura original. Por otro lado, satisfaciendo las condiciones de compatibilidad en las piezas individuales, éstas están cinemáticamente determinadas; por tanto, se pueden calcular, en función de las incógnitas cinemáticas, los esfuerzos que actúan sobre las barras y, en particular, los valores de éstos en los extremos de las piezas. Entonces, se pueden imponer *a posteriori* las condiciones de equilibrio en los nudos en que concurren diferentes barras y en los apoyos. El problema se resuelve imponiendo las condiciones de equilibrio en los nudos esto proporciona $gl \cdot nn$ ecuaciones, de las que se obtienen los k movimientos incógnita y la ca reacciones desconocidas ($gl \cdot nn = \mathrm{k} + ca$).

Este esquema de resolución se muestra en la Figura 7.1. Como se observa, el proceso secuencial consiste en, a partir de la geometría de la estructura y de la definición de las acciones:

1. identificar el número mínimo de movimientos incógnita que determinan la deformación de la estructura, a base de considerar las correspondientes condiciones de compatibilidad en los nudos,

2. resolver las piezas individuales, en función de las incógnitas cinemáticas, a base de satisfacer las condiciones de compatibilidad en las piezas,

3. determinar las incógnitas cinemáticas, a base de imponer las necesarias condiciones de equilibrio en los nudos,

4. determinar los movimientos, esfuerzos y reacciones en la estructura.

Tradicionalmente, el procedimiento descrito recibe el nombre de *método de los movimientos* (por la naturaleza de las incógnitas seleccionadas) o *método de equilibrio* (por las ecuaciones que se plantean y resuelven). Sin embargo, señalamos de nuevo que todos los métodos de análisis de estructuras satisfacen tanto las condiciones de compatibilidad como las de equilibrio, y que, para hacerlo, trabajan tanto con las fuerzas (y esfuerzos) como con los movimientos (y deformaciones). En este libro, llamaremos al procedimiento descrito *método de rigidez*, ya que los coeficientes que aparecen en su planteamiento son de rigidez, y porque la forma actual de plantearlo se llama *método directo de rigidez* (Capítulos 8 y 9).

Dado que hay que plantear y resolver tantas ecuaciones de equilibrio como incógnitas cinemáticas hay en el problema, este método es idóneo para estructuras con bajo grado de traslacionalidad. De hecho, existen diferentes versiones simplificadas para resolver estructuras intraslacionales. Su principal ventaja consiste en que la forma de seleccionar las incógnitas cinemáticas de un problema dado es única y esto permite un planteamiento sistemático del método. Esto lo hace particularmente adecuado para el cálculo de estructuras por ordenador.

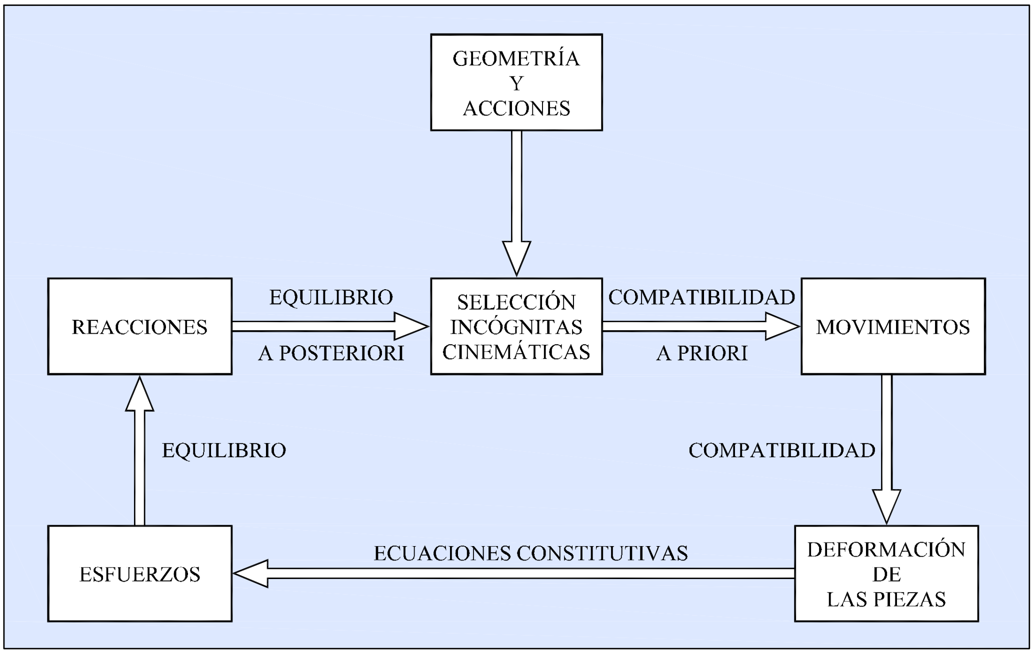


Fig. 7.1: Resolución de estructuras por el método de rigidez

7.3 Estructuras articuladas planas

Consideremos una estructura articulada plana como la de la Figura 7.2a. Por simplicidad, supondremos que soporta cargas sólo en los nudos. Una barra genérica de la estructura, tal como la AB, puede considerarse aisladamente (Figura 7.2b). Los únicos esfuerzos que se transmiten en los extremos de la barra son los axiles F_A y F_B, iguales y opuestos. Los movimientos que dichos esfuerzos producen dichos extremos son los desplazamientos u_A y u_B, medidos en la dirección de la barra, eje x.

En la Sección 3.6 del Capítulo 3 se han obtenido las *ecuaciones elásticas* de una pieza recta como la AB, que permiten expresar los axiles F_A y F_B de la forma:

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{EA}{l}(u_A - u_B) \\ F_B &= -\frac{EA}{l}(u_A - u_B) \end{aligned} \tag{7.2}$$

donde EA/l es la *rigidez axial* de la pieza.

Por tanto, las ecuaciones elásticas de las piezas de la estructura se pueden escribir en función de las incógnitas cinemáticas del problema. En estructuras articuladas planas el número de grados de libertad por nudo es $gl = 2$, dos desplazamientos en el plano de la estructura. Así, la estructura de la Figura 7.2a tiene, en principio, k$= 2\cdot 7 - 2\cdot 2 = 10$ incógnitas cinemáticas.

El problema se resuelve imponiendo las condiciones de equilibrio de fuerzas en los nudos, lo que proporciona $2 \cdot 7$ ecuaciones, de las que se obtienen los 10 movimientos libres incógnita y las 4 reacciones incógnita en los apoyos $(2 \cdot 7 = 10 + 4)$.

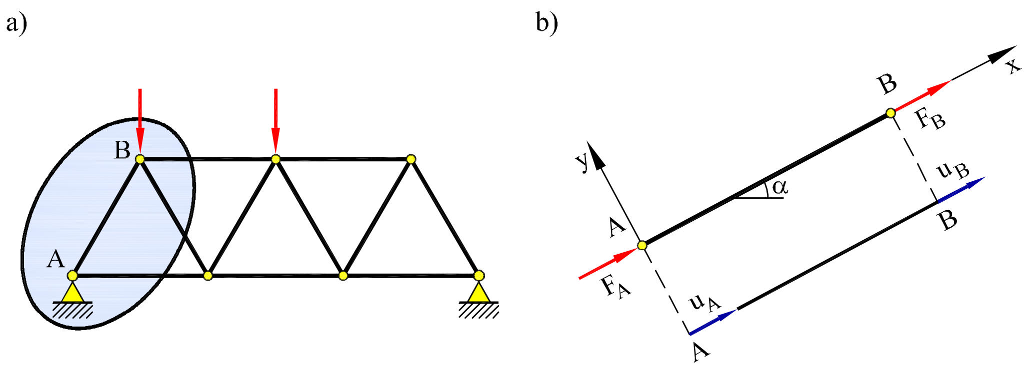


Fig. 7.2: (a) Estructura articulada (b) barra aislada

Ejemplo 7.3.1

La estructura de la Figura 7.3a está formada por cinco barras articuladas del mismo material e idéntica sección. Para las cargas verticales P que se indican, determinar los axiles actuantes en cada barra y las reacciones en los apoyos.
Datos: $l = 8$ m, $A = 10$ cm^2, $P = 100\,$kN y $E = 200$ GPa.

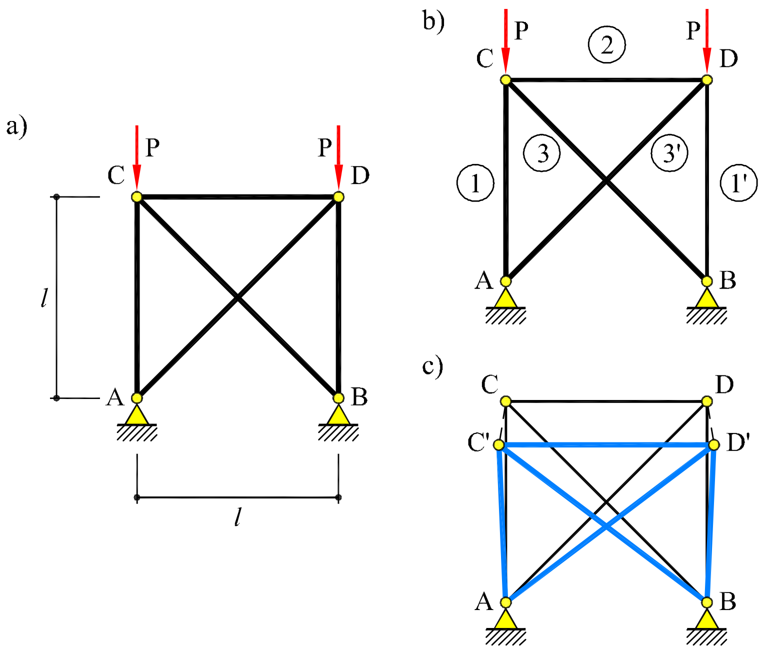


Fig. 7.3: Estructura del Ejemplo 7.3.1

En la Figura 7.3b se muestra la numeración elegida para las barras. Por simetría de la estructura y de la carga, los movimientos de los nudos C y D deben ser simétricos, por esta razón el grado de indeterminación cinemática de la estructura se reduce a 2. Se consideran como incógnitas los movimientos del nudo C: el desplazamiento horizontal u_C (positivo hacia la izquierda) y el vertical v_C (positivo hacia abajo).

Los alargamientos de las barras expresados en función de los movimientos del nudo C (ver Sección 3.5) son:

$$\delta_1 = -v_C \qquad \delta_2 = 2u_C \qquad \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(u_C - v_C)$$

Las alargamientos de las barras $1'$ y $3'$ son simétricos a los correspondientes a la barras 1 y 3, respectivamente.

Los axiles de las barras en función de los movimientos incógnitas, es decir, las *ecuaciones elásticas de las barras*, son:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{EA}{l}\delta_1 && = -kv_C \\
N_2 &= \frac{EA}{l}\delta_2 && = -ku_C \\
N_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{EA}{l}\delta_3 && = \frac{k}{2}\left(u_C - v_C\right)
\end{aligned}
$$

donde $k = EA/l$ es la rigidez de la barra a axil. Por simetría, $N_{1'} = N_1$ y $N_{3'} = N_3$.

Por equilibrio de fuerzas en el nudo C se tiene:

$$
\begin{aligned}
N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 &= 0 \\
N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 &= -P
\end{aligned}
$$

Sustituyendo los valores de los axiles en función de los movimientos incógnita, se tiene:

$$
k\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2 & -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} & -\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 1\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}
$$

Resolviendo, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
u_C &= 0,1155\frac{P}{k} \qquad (\leftarrow) \\
v_C &= 0,7689\frac{P}{k} \qquad (\downarrow)
\end{aligned}
$$

Conocidos los movimientos de la estructura, los axiles pueden calcularse en función de los mismos:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= -0,769\ P \\
N_2 &= 0,231\ P \\
N_3 &= -0,327\ P
\end{aligned}
$$

Las reacciones son:

$$H_A = \frac{\sqrt{2}}{2} N_{3'} = 0,231P \qquad (\rightarrow)$$

$$V_A = -\left(N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{3'} \right) = P \qquad (\uparrow)$$

En la Figura 7.3c se muestra la deformada de la estructura.

Ejemplo 7.3.2

La grúa de la Figura 7.4a está formada por barras del mismo material y diferente sección. Para la carga P que se indica, determinar los axiles correspondientes a cada barra. La numeración de las barras se muestra en la Figura 7.4b.
Datos: $L = 5$ m, $P = 10\,\text{kN}$ y $E = 200$ GPa. Las secciones de las barras son:

$$\begin{array}{lll} A_1 = \sqrt{2}A & A_3 = A & A_5 = 4\ A \\ A_2 = 1,118\ A & A_4 = 2,236\ A & \end{array}$$

con $A = 5\,\text{cm}^2$. Las longitudes de las barras son:

$$\begin{array}{lll} l_1 = \sqrt{2}L & l_3 = L & l_5 = 2\sqrt{2}L \\ l_2 = 1,118\ L & l_4 = 2,236\ L & \end{array}$$

La estructura es una vez hiperestática y el grado de indeterminación cinemática es igual a cuatro. Los movimientos incógnita son los desplazamientos vertical y horizontal de los nudos D y E.

Se consideran desplazamientos horizontales positivos hacia la derecha y desplazamientos verticales positivos ascendentes.

Los alargamientos de las barras, en función de los movimientos incógnita (ver Sección 3.5), son:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(u_D + v_D\right) \\ \delta_2 &= 0,4472\left(u_D + 2v_D\right) \\ \delta_3 &= v_D \\ \delta_4 &= 0,4472\left[2\left(u_E - u_D\right) + \left(v_E - v_D\right)\right] \\ \delta_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(u_E + v_E\right) \end{aligned}$$

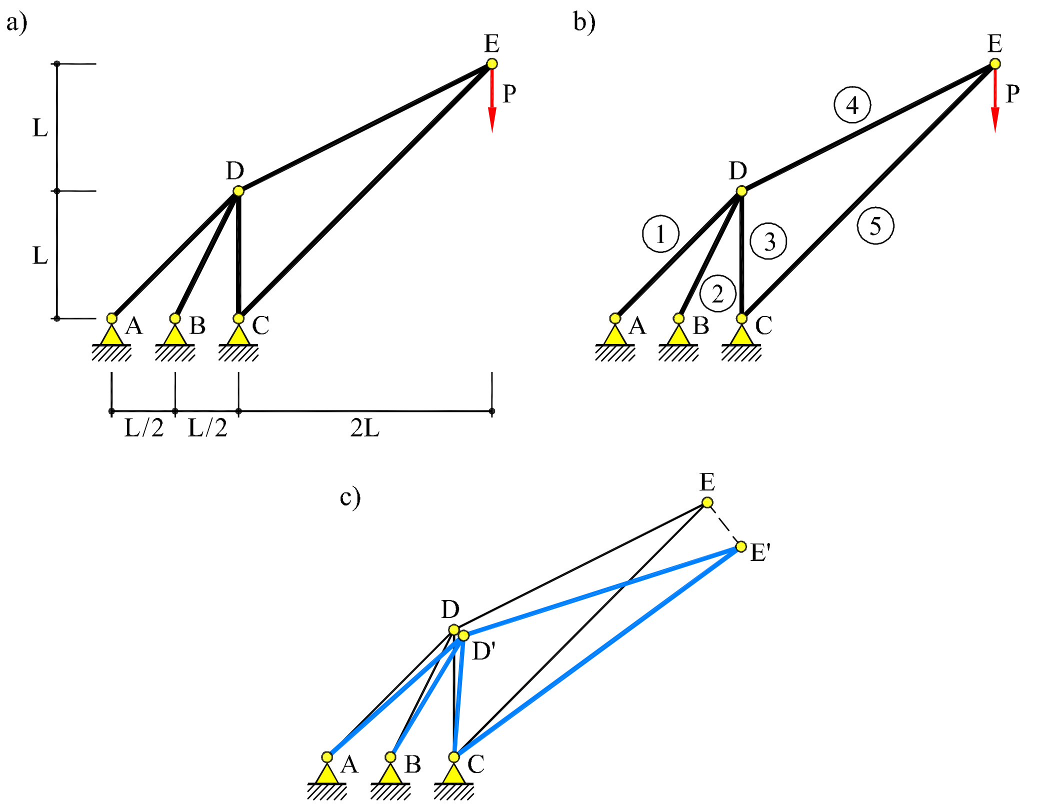


Fig. 7.4: Grúa del Ejemplo 7.3.2

Tomando $k = EA/l = 2 \cdot 10^4$ kN/m, las rigideces de las barras son:

$$k_1 = \frac{E \cdot \sqrt{2}A}{\sqrt{2}L} = k \qquad k_2 = \frac{E \cdot 1,118\ A}{1,118\ L} = k \qquad k_3 = k$$
$$k_4 = \frac{E \cdot 2,236\ A}{2,236\ L} = k \qquad k_5 = \frac{E \cdot 4\ A}{2\sqrt{2}\ L} = \sqrt{2}k$$

Las ecuaciones elásticas de las barras son:

$$\begin{aligned}
N_1 &= k\delta_1 &&= \frac{\sqrt{2}}{2}k\ (u_D + v_D)\\
N_2 &= k\delta_2 &&= 0,4472\ k\ (u_D + 2v_D)\\
N_3 &= k\delta_3 &&= k\ v_D\\
N_4 &= k\delta_4 &&= 0,4472\ k\ [2\,(u_E - u_D) + (v_E - v_D)]\\
N_5 &= \sqrt{2}k\delta_5 &&= k\ (u_E + v_E)
\end{aligned}$$

Planteando el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en los nudos D y E, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + 0,4472N_2 - 0,8944N_4 &= 0 \\
\frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + 0,8944N_2 + N_3 - 0,4472N_4 &= 0 \\
0,8944N_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 &= 0 \\
0,4472N_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 &= -P
\end{aligned}$$

Sustituyendo y ordenando en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 3,0 & 2,6 & -1,6 & -0,8 \\ 2,6 & 5,0 & -0,8 & -0,4 \\ -1,6 & -0,8 & 3,01 & 2,21 \\ -0,8 & -0,4 & 2,21 & 1,81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_D \\ v_D \\ u_E \\ v_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Resolviendo, los movimientos incógnita son (Figura 7.4c):

$$\begin{aligned}
u_D &= 2,31 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\rightarrow) & u_E &= 7,86 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\rightarrow) \\
v_D &= -0,69 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\downarrow) & v_E &= -9,27 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\downarrow)
\end{aligned}$$

Los axiles en las barras son:

$$\begin{aligned}
N_1 &= 22,9\,\text{kN} & N_2 &= 8,32\,\text{kN} \\
N_3 &= -13,8\,\text{kN} & N_4 &= 22,5\,\text{kN} \\
N_5 &= -28,2\,\text{kN}
\end{aligned}$$

Conocidos los axiles en la barras, se pueden calcular las reacciones en los apoyos:

$$H_A = 16,20\,\text{kN} \quad (\leftarrow) \qquad H_B = 3,73\,\text{kN} \quad (\leftarrow) \qquad H_C = 19,93\,\text{kN} \quad (\rightarrow)$$

$$V_A = 16,20\,\text{kN} \quad (\downarrow) \qquad V_B = 7,43\,\text{kN} \quad (\downarrow) \qquad V_C = 33,73\,\text{kN} \quad (\uparrow)$$

Ejemplo 7.3.3

El puente de la Figura 7.5a está formado por barras articuladas del mismo material e idéntica sección A. Para las cargas verticales P que se indican, determinar los axiles actuantes sobre cada barra. Dada la simetría de geometría y de carga, se supone que las secciones situadas sobre el eje de simetría no se desplazan horizontalmente.
Datos: $L = 6$ m, $A = 6\,\text{cm}^2$, $P = 40\,\text{kN}$ y $E = 200$ GPa.

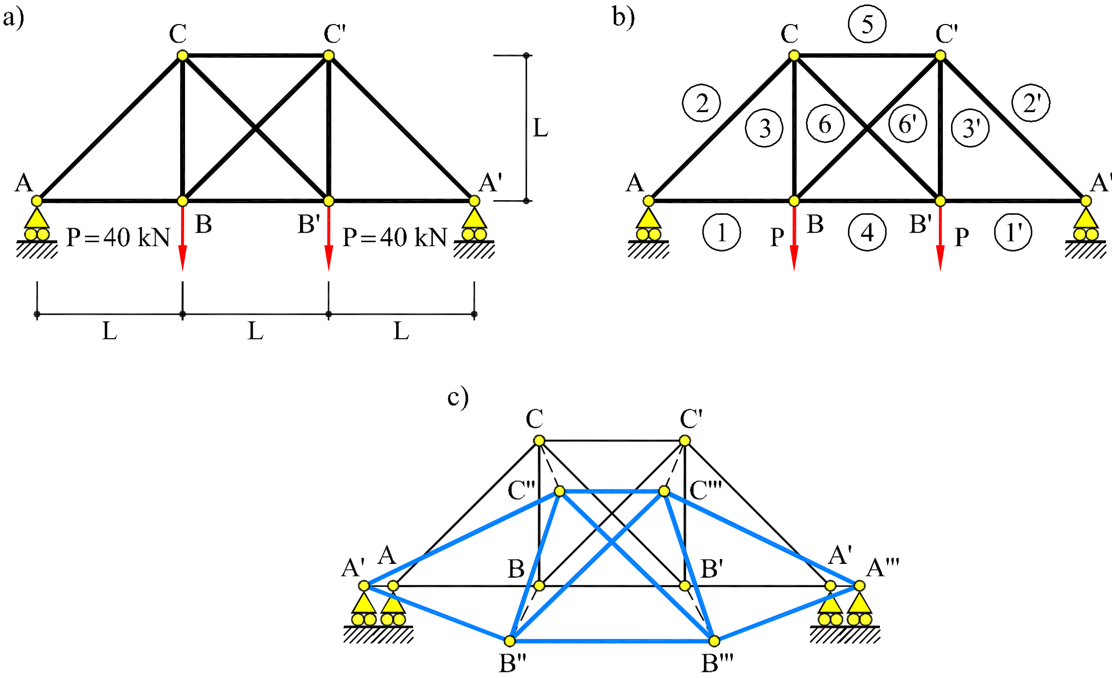


Fig. 7.5: Estructura del Ejemplo 7.3.3

Por simetría de geometría y carga, el grado de indeterminación cinemática de la estructura es 5. Los movimientos incógnita son los desplazamientos, horizontal y vertical, de los nudos B y C y el horizontal del nudo A. Los correspondientes a los nudos B', C' y A' son simétricos.

Se consideran positivos los desplazamientos horizontales hacia la derecha y los verticales ascendentes.

En la Figura 7.5b se muestra la numeración adoptada para las barras. Dada la simetría del problema se trabaja sólo con la mitad de la estructura, a la otra mitad le correponden valores simétricos.

Las longitudes de las barras son:

$$l_1 = l_3 = l_4 = l_5 = L \qquad\qquad l_2 = l_6 = \sqrt{2}L$$

Los alargamientos de cada barra, en función de los movimientos incógnitas, son:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= u_B - u_A & \delta_3 &= v_C - v_B & \delta_5 &= -2u_C \\
\delta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(u_C - u_A + v_C\right) & \delta_4 &= -2u_B & \delta_6 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-u_B - u_C - v_B + v_C\right)
\end{aligned}$$

Tomando $k = EA/L$ la rigidez de las barras es:

$$k_1 = k_3 = k_4 = k_5 = k \qquad\qquad k_2 = k_6 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} = \frac{\sqrt{2}}{2}k$$

Las ecuaciones elásticas de las barras son:

$$\begin{aligned}
N_1 &= k\delta_1 &&= k\ (u_B - u_A)\\
N_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,k\delta_2 &&= \frac{k}{2}\ (u_C - u_A + v_C)\\
N_3 &= k\ \delta_3 &&= k\ (v_C - v_B)\\
N_4 &= k\delta_4 &&= -2k\ u_B\\
N_5 &= k\delta_5 &&= -2k\ u_C\\
N_6 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,k\delta_6 &&= \frac{k}{2}\ (-u_B - u_C - v_B + v_C)
\end{aligned}$$

Planteando el equlibrio de fuerzas en los nudos A, B y C, se obtiene el sistema de ecuaciones que expresado en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 2,707 & -2,0 & 0 & -0,707 & -0,707\\ -2,0 & 6,707 & 0,707 & 0,707 & -0,707\\ 0 & 0,707 & 2,707 & 0,707 & -2,707\\ -0,707 & 0,707 & 0,707 & 5,414 & 0\\ -0,707 & -0,707 & -2,707 & 0 & 3,414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A\\ u_B\\ v_B\\ u_C\\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ -40\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Resolviendo, se tiene:

$$\begin{aligned}
u_A &= -2,79 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\leftarrow) & & \\
u_B &= -0,793 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\leftarrow) & v_B &= -11,2 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\downarrow)\\
u_C &= 1,21 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\rightarrow) & v_C &= -9,66 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \quad (\downarrow)
\end{aligned}$$

Una vez calculados los movimientos incógnita, los axiles en las barras son:

$$\begin{aligned}
N_1 &= 39,96\,\text{kN} & N_2 &= -56,60\,\text{kN}\\
N_3 &= 30,80\,\text{kN} & N_4 &= 31,72\,\text{kN}\\
N_5 &= -48,40\,\text{kN} & N_6 &= 11,23\,\text{kN}
\end{aligned}$$

Obsérvese que las barras 2, 5 y $2'$ están comprimidas, las restantes están traccionadas. En la Figura 7.5c se muestra la deformada de la estructura. Es obvio que:

$$V_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 = P \qquad (\uparrow)$$

7.4 Estructuras reticuladas

Consideremos una estructura reticulada de plano medio como la de la Figura 7.6a. Una pieza genérica de la estructura, tal como la AB, puede considerarse aisladamente, añadiendo a las cargas que inciden directamente sobre ella los momentos en los extremos, M_{AB} y M_{BA}, y las fuerzas que el resto de la estructura ejerce sobre ella a través de los nudos (Figura 7.6b). Es evidente que, conocidos estos momentos de extremidad, se pueden calcular las leyes de esfuerzos sobre la pieza y el problema estructural queda resuelto.

En la Sección 3.9 del Capítulo 3 se han obtenido las *ecuaciones elásticas* de una pieza recta unida a nudos rígidos como la AB, que permiten expresar los momentos M_{AB} y M_{BA} de la forma:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{l}(2\phi_A + \phi_B) - \frac{6EI}{l}\overline{\phi}_{AB} + M^o_{AB} \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{l}(2\phi_B + \phi_A) - \frac{6EI}{l}\overline{\phi}_{AB} + M^o_{BA} \end{aligned} \tag{7.3}$$

donde EI/l es la *rigidez a flexión* de la barra, ϕ_A y ϕ_B son los giros en los extremos A y B, respectivamente, $\overline{\phi}_{AB}$ es el giro de sólido rígido de la barra debido al desplazamiento transversal relativo de los extremos y M^o_{AB} y M^o_{BA} son los momentos de empotramiento perfecto (es decir, los momentos en los extremos de una viga biempotrada de igual luz y rigidez que soportara la misma carga).

En estas expresiones los momentos y giros se consideran positivos si son antihorarios, y negativos en caso contrario.

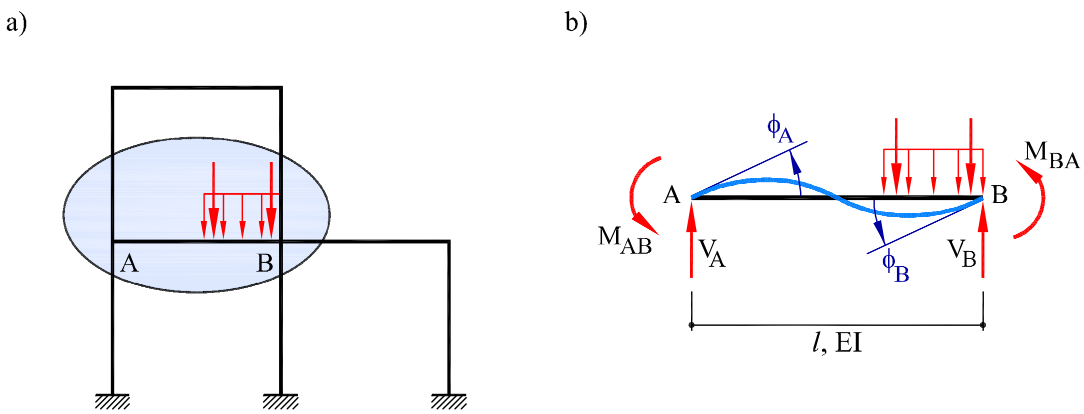


Fig. 7.6: (a) Estructura reticulada. (b) Pieza considerada aislada.

Estas ecuaciones permiten expresar los momentos de extremidad de la pieza en función de las cargas (conocidas) que actúan sobre ella y de los giros de los nudos extremos y de la barra (desconocidos). Se pueden obtener también expresiones análogas para piezas curvas y/o de inercia variable.

En estructuras reticuladas de plano medio, el número de grados de libertad por nudo es $gl = 3$, dos traslaciones en el plano de la estructura y un giro perpendicular a éste. Así, la estructura de la Figura 7.6a tiene, en principio, k= $3 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 15$ incógnitas cinemáticas.

El problema se resuelve imponiendo las condiciones de equilibrio de momentos y fuerzas en los nudos, lo cual proporciona $3 \cdot 8$ ecuaciones, de las que se obtienen los 15 movimientos incógnita y las 9 reacciones desconocidas ($3 \cdot 8 = 15 + 9$).

Este planteamiento sistemático se usa cuando el cálculo se realiza por ordenador (ver el *Método Directo de Rigidez,* Capítulo 9).

Sin embargo, la hipótesis habitual en estructuras reticuladas de despreciar la deformación debida a los esfuerzos axiles y cortantes permite una notable simplificación del análisis deformacional de las estructuras de barras rectas y nudos rígidos, ya que entonces (bajo la hipótesis de pequeños giros) las barras mantienen su longitud inicial y sus ángulos relativos. Este hecho introduce restricciones adicionales entre los movimientos de los nudos extremos de las barras que reducen el número de incógnitas cinemáticas del problema. Cada barra inextensible introduce como máximo una restricción cinemática adicional, con lo cual el grado de indeterminación cinemática se puede expresar como:

$$\mathrm{k} = gl \cdot nn - ca - ni \tag{7.4}$$

donde gl, nn y ca tienen el mismo significado que en la Ec. (9.1) y ni es el número de restricciones cinemáticas independientes. En estas condiciones (ver Sección 2.5 del Capítulo 2), el número de incógnitas cinemáticas del problema viene dado la expresión:

$$\mathrm{k} = ng + gt \tag{7.5}$$

donde ng es el número de giros de nudo desconocidos y gt es el número de movimientos *independientes* de sólido rígido de las barras (traslaciones o giros alrededor de su centro instantáneo de rotación).

Así, la estructura de la Figura 7.6a tiene, bajo estas hipótesis, $\mathrm{k} = 5 + 2 = 7$ incógnitas cinemáticas, ya que se desconocen los valores de los giros de cinco nudos y las traslaciones horizontales de los dos “pisos” (el grado de traslacionalidad es 2).

Ahora, para resolver el problema se puede imponer, de forma sistemática, el equilibrio de momentos en los nudos de giro desconocido, lo cual proporciona ng ecuaciones; además, es necesario plantear gt ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos. Estas

ecuaciones adicionales se encuentran calculando el valor de los esfuerzos cortantes en los extremos de barra, en función de los momentos de extremidad y de las cargas de la barra, y por esta razón se les llama *ecuaciones de cortante*.

Planteado y resuelto el sistema de k = ng+gt ecuaciones, se conocen los movimientos incógnita y, en función de éstos, los momentos de extremidad en todas las barras. A continuación, por equilibrio en las piezas se calculan las leyes de flectores y cortantes. Conocidos los cortantes en los extremos de las barras, se pueden calcular los axiles de extremidad por equilibrio de fuerzas en los nudos. Queda así completamente resuelto el problema estructural.

7.5 Vigas continuas

En el Capítulo anterior se ha definido la *viga continua* como una estructura hiperestática formada por varias piezas rectas alineadas, unidas entre sí por nudos rígidos apoyados, denominándose *tramo* (o *vano*) al segmento comprendido entre dos apoyos sucesivos de la viga. Consideremos en esta Sección la resolución de esta tipología estructural por el método de rigidez.

Ecuación de los tres giros

Sea una viga continua de $n + 2$ apoyos, con grado de hiperestatismo n, ya que tiene n apoyos intermedios. Consideremos tres apoyos *consecutivos*, a los que denominaremos I, J y K; consideremos también los dos vanos *contiguos* que los unen: el IJ, a la izquierda del apoyo J, y el JK, a la derecha del apoyo J (Figura 7.7a). Puesto que la estructura es intraslacional, las únicas incógnitas cinemáticas son los giros de los nudos ϕ_J.

Considerando aisladamente cada tramo se tiene el esquema estructural de la Figura 7.7b. Nótese que al tomar como únicos los valores de los giros en los nudos, idénticos para los dos vanos que se apoyan en el nudo, la condición de compatibilidad de giros en los apoyos se satisface *a priori*.

Las ecuaciones que conducen a la determinación de los giros incógnita ϕ_J son las correspondientes condiciones de suma de momentos nula en el apoyo J, es decir, de igualdad de momentos a uno y otro lado del apoyo, o sea:

$$\sum M_J = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_{JI} + M_{JK} = 0 \qquad \forall\ J \tag{7.6}$$

donde M_{JI} y M_{JK} representan los momentos del apoyo J en los tramos IJ y JK, considerados positivos si son antihorarios.

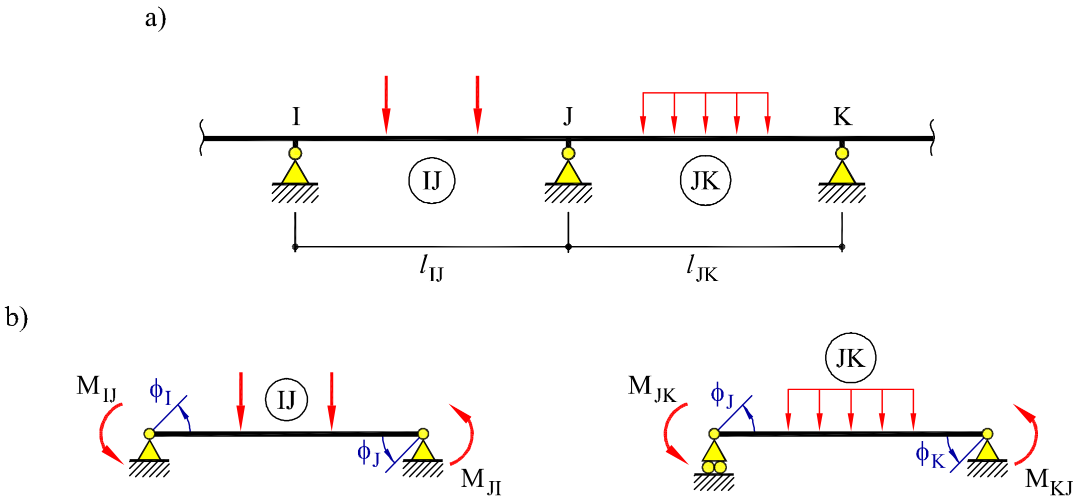


Fig. 7.7: Condición de equilibrio de momentos en un apoyo intermedio

Utilizando las correspondientes ecuaciones elásticas, se tienen las siguientes expresiones para los momentos a la izquierda y a la derecha del apoyo J, respectivamente:

$$\begin{aligned} M_{JI} &= 2K_{IJ}\,(2\phi_J + \phi_I) + M^o_{JI} \\ M_{JK} &= 2K_{JK}\,(2\phi_J + \phi_K) + M^o_{JK} \end{aligned} \tag{7.7}$$

donde los momentos M^o_{JI} y M^o_{JK} son los momentos de empotramiento perfecto del extremo J de los tramos IJ y JK debidos a las cargas directamente aplicadas sobre ellos. Las rigideces $K_{IJ} = (EI/l)_{IJ}$ y $K_{JK} = (EI/l)_{JK}$ corresponden a los vanos IJ y JK, respectivamente. Sustituyendo ahora en la ecuación de equilibrio de momentos (7.6), se tiene:

$$K_{IJ}\phi_I + 2\,[K_{IJ}+K_{JK}]\;\phi_J + K_{JK}\,\phi_K = -\frac{1}{2}\,(M^o_{JK}+M^o_{JI}) \tag{7.8}$$

Esta expresión se denomina *fórmula de los tres giros*. Si la rigidez a flexión $EI/l = K$ es constante en todos los vanos, entonces:

$$\phi_I + 4\phi_J + \phi_K = -\frac{1}{2}\frac{1}{K}\,(M^o_{JK}+M^o_{JI}) \tag{7.9}$$

Como puede observarse en las ecuaciones (7.8) y (7.9), con este método cada ecuación sólo relaciona tres giros consecutivos, con lo que el sistema de ecuaciones resultante es tridiagonal y diagonalmente dominante, es decir, de fácil solución.

Respecto a los apoyos extremos, se pueden distinguir dos situaciones:

1. *Apoyo articulado con momento exterior aplicado*: se tiene entonces que el momento de extremidad correspondiente es igual al momento exterior aplicado. Sean A el apoyo del extremo izquierdo y B el apoyo contiguo a su derecha, y sean Z el apoyo del extremo derecho e Y el apoyo contiguo a su izquierda. Se tiene que:

$$M_{AB} = M_A \qquad \text{y} \qquad M_{ZY} = M_Z \tag{7.10}$$

   Utilizando las ecuaciones (7.7), estas igualdades se pueden reescribir en la forma:

$$2\,\phi_A + \phi_B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K}\right)_{AB}(M_A - M^o_{AB}) \tag{7.11}$$

$$\phi_Y + 2\,\phi_Z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K}\right)_{YZ}(M_Z - M^o_{ZY}) \tag{7.12}$$

   respectivamente. Se tiene, por tanto, una ecuación adicional por cada extremo articulado.

2. *Apoyado empotrado*: se tiene que el correspondiente giro es nulo, con lo que se elimina una incógnita del problema.

Nótese que siempre se puede plantear una ecuación de equilibrio de momentos en cada apoyo con giro desconocido, es decir, que se pueden plantear tantas ecuaciones como giros incógnita tiene el problema.

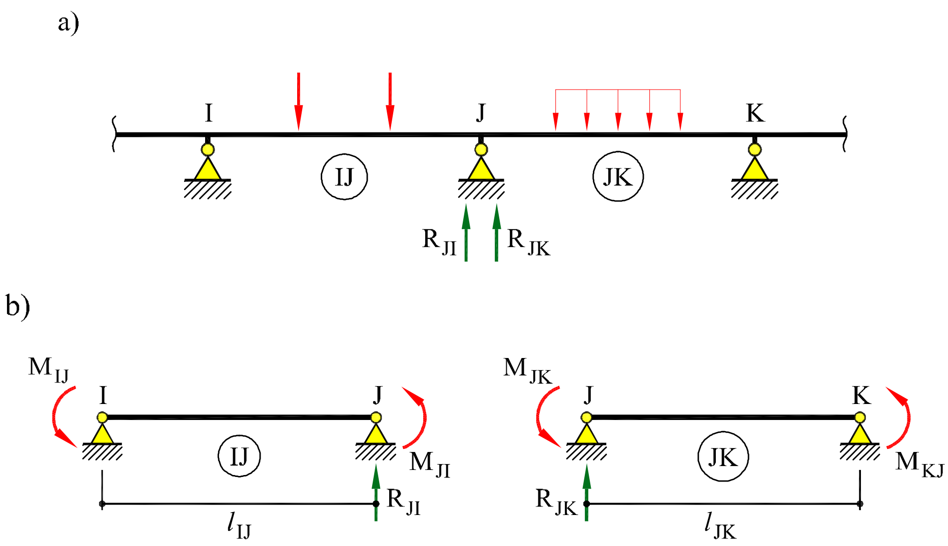


Fig. 7.8: Determinación de la reacción en un apoyo intermedio

Una vez determinado el valor de los giros en los apoyos, la sustitución de éstos en las ecuaciones elásticas (7.7) proporciona los valores de los momentos sobre los apoyos. A partir de ahí, el análisis de la viga continua se reduce al estudio de una serie de vigas simplemente apoyadas, solicitadas por las cargas directas y los momentos de extremidad. En base a ello pueden determinarse las reacciones para cada una de las vigas simplemente apoyadas. Así, por ejemplo, la reacción en el apoyo J puede calcularse a partir de las contribuciones correspondientes a los tramos IJ y JK (Figura 7.8), o sea:

$$R_J = R_{JI} + R_{JK} \tag{7.13}$$

donde R_{JI} y R_{JK} son las reacciones en el apoyo J en los tramos IJ y JK, respectivamente. Además:

$$R_{JI} = R^o_{JI} - \frac{M_{IJ} + M_{JI}}{l_{IJ}} \quad ; \quad R_{JK} = R^o_{JK} + \frac{M_{JK} + M_{KJ}}{l_{JK}} \tag{7.14}$$

siendo R^o_{JI} y R^o_{JK} las reacciones isostáticas en el apoyo J debidas a las cargas directas de los tramos IJ y JK, respectivamente. Por tanto, la reacción total del apoyo J es:

$$R_J = R^o_{JI} + R^o_{JK} - \frac{M_{IJ} + M_{JI}}{l_{IJ}} + \frac{M_{JK} + M_{KJ}}{l_{JK}} \tag{7.15}$$

Ejemplo 7.5.1

Calcular los momentos flectores en los apoyos de la viga de la Figura 7.9, aplicando la *ecuación de los tres giros* y teniendo en cuenta que la rigidez a flexión $K = EI/l$ es constante. Datos: $l = 4\,\text{m}$; $F = 20\,\text{kN}$; $p = 30\,\text{kN/m}$; $M = 120\,\text{kN·m}$.

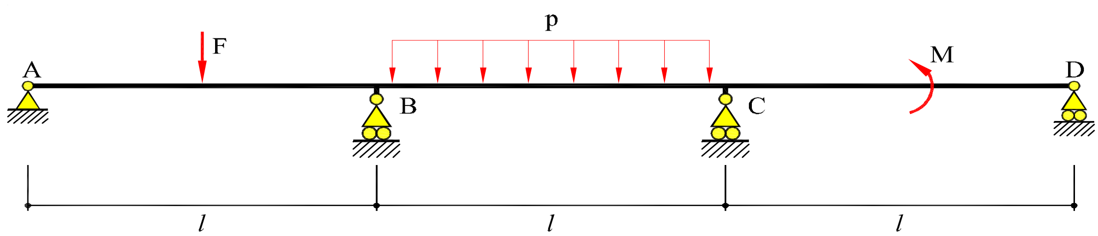


Fig. 7.9: Viga continua del Ejemplo 7.5.1

Las incógnitas del problema son los giros en los cuatro apoyos, ϕ_i $(i = A, B, C, D)$. Aplicando las ecuaciones (7.11), (7.10) y (7.12), puede escribirse:

$$
\begin{aligned}
2\phi_A + \phi_B &= \frac{1}{2}\frac{1}{K}\left(M_A - M^o_{AB}\right) && \text{(a)}\\
\phi_A + 4\phi_B + \phi_C &= -\frac{1}{2}\frac{1}{K}\left(M^o_{BC} + M^o_{BA}\right) && \text{(b)}\\
\phi_B + 4\phi_C + \phi_D &= -\frac{1}{2}\frac{1}{K}\left(M^o_{CD} + M^o_{CB}\right) && \text{(c)}\\
\phi_C + 2\phi_D &= \frac{1}{2}\frac{1}{K}\left(M_D - M^o_{DC}\right) && \text{(d)}
\end{aligned}
$$

donde puede observarse que el sistema de ecuaciones que se obtiene es tridiagonal.

En la expresión anterior, se tiene $M_A = M_D = 0$ y

$$
\begin{aligned}
M^o_{AB} &= +\frac{1}{8}Fl \quad ; \quad & M^o_{BA} &= -\frac{1}{8}Fl\\
M^o_{BC} &= +\frac{1}{12}pl^2 \quad ; \quad & M^o_{CB} &= -\frac{1}{12}pl^2\\
M^o_{CD} &= +\frac{1}{4}M \quad ; \quad & M^o_{DC} &= +\frac{1}{4}M
\end{aligned}
$$

Sustituyendo y resolviendo, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
K\,\phi_A &= +0,0 \text{ kN·m} \quad ; \quad & K\,\phi_B &= -\ 5,0 \text{ kN·m}\\
K\,\phi_C &= +5,0 \text{ kN·m} \quad ; \quad & K\,\phi_D &= -\,10,0 \text{ kN·m}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo ahora en las ecuaciones elásticas correspondientes, se tiene:

$$
\text{vano } AB \begin{cases} M_{AB} = 2K\,(2\phi_A + \phi_B) + M^o_{AB} = \quad 0\,\text{kN·m}\\ M_{BA} = 2K\,(2\phi_B + \phi_A) + M^o_{BA} = -30\,\text{kN·m}\end{cases}
$$

$$
\text{vano } BC \begin{cases} M_{BC} = 2K\,(2\phi_B + \phi_C) + M^o_{BC} = +30\,\text{kN·m}\\ M_{CB} = 2K\,(2\phi_C + \phi_B) + M^o_{CB} = -30\,\text{kN·m}\end{cases}
$$

$$
\text{vano } CD \begin{cases} M_{CD} = 2K\,(2\phi_C + \phi_D) + M^o_{CD} = +30\,\text{kN·m}\\ M_{DC} = 2K\,(2\phi_D + \phi_C) + M^o_{DC} = \quad 0\,\text{kN·m}\end{cases}
$$

Una vez calculados los momentos de extremo de barra, se calculan las reacciones en los apoyos:

$$
\begin{aligned}
R_A &= R_{AB} = \frac{F}{2} - \frac{M_{BA}}{l} = 2,5\,\text{kN} \ (\uparrow) \\
R_B &= R_{BA} + R_{BC} = \frac{F}{2} - \frac{M_{BA}}{l} + \frac{pl}{2} + \frac{M_{BC}}{l} + \frac{M_{CB}}{l} = 77,5\,\text{kN} \ (\uparrow) \\
R_C &= R_{CB} + R_{CD} = \frac{pl}{2} - \frac{M_{BC}}{l} - \frac{M_{CB}}{l} + \frac{M}{l} + \frac{M_{CD}}{l} = 97,5\,\text{kN} \ (\uparrow) \\
R_D &= R_{DC} = -\frac{M}{l} - \frac{M_{CD}}{l} = -37,5\,\text{kN} \ (\downarrow)
\end{aligned}
$$

Las leyes de esfuerzos de la viga y su deformada a estima se muestran en el Ejemplo 6.4.1 del Capítulo 6.

Se observa en este ejemplo que ha sido necesario plantear un sistema de 4 ecuaciones para obtener los giros sobre los cuatro apoyos de la viga continua.

Dada la forma tridiagonal del sistema de ecuaciones (a)-(d), se pueden utilizar las ecuaciones primera y última para obtener los giros de los apoyos extremos en función de los giros de los apoyos contiguos y de los momentos de empotramiento perfecto:

$$
\phi_A = -\frac{1}{2}\phi_B + \frac{1}{4}\frac{1}{K}\,(M_A - M^o_{AB}) \qquad \text{(a')}
$$

$$
\phi_D = -\frac{1}{2}\phi_C + \frac{1}{4}\frac{1}{K}\,(M_D - M^o_{DC}) \qquad \text{(b')}
$$

Sustituyendo éstas en las ecuaciones (b) y (c), se obtiene el sistema:

$$
\frac{7}{2}\phi_B + \phi_C = -\frac{1}{2}\frac{1}{K}\left(M^o_{BC} + M^o_{BA} + \frac{1}{2}(M_A - M^o_{AB})\right) \qquad \text{(c')}
$$

$$
\phi_B + \frac{7}{2}\phi_C = -\frac{1}{2}\frac{1}{K}\left(M^o_{CD} + M^o_{CB} + \frac{1}{2}(M_D - M^o_{DC})\right) \qquad \text{(d')}
$$

Se tiene ahora un sistema simétrico de 2 ecuaciones que sólo involucra a los giros de los apoyos intermedios. Una vez obtenidos éstos, los giros de los apoyos extremos se hayan sustituyendo en las ecuaciones (a') y (d'). Este procedimiento equivale a utilizar para los vanos extremos las ecuaciones elásticas correspondientes a piezas *empotrado-apoyadas* (ver Sección 3.9.3 del Capítulo 3).

Ejemplo 7.5.2

Resolver la viga continua de la Figura 7.10, aplicando la *ecuación de los tres giros.* La rigidez EI es constante.

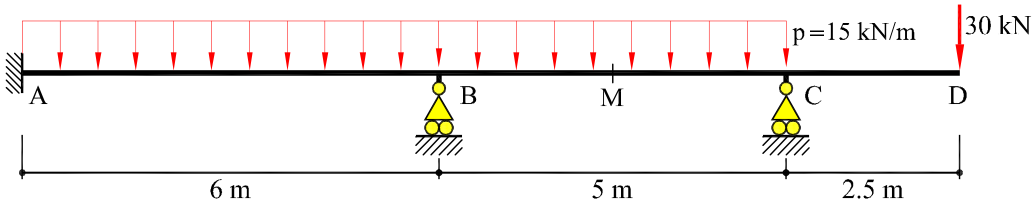


Fig. 7.10: Viga continua del Ejemplo 7.5.2

Las incógnitas del problema son los giros en los apoyos B y C, ϕ_B y ϕ_C, ya que $\phi_A = 0$. Procediendo como en el ejemplo anterior, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_{AB}}\phi_A + 2\left(\frac{1}{l_{AB}} + \frac{1}{l_{BC}}\right)\phi_B + \frac{1}{l_{AB}}\phi_C &= -\frac{1}{2}\frac{1}{EI}\left(M^o_{BC} + M^o_{BA}\right) \\ \frac{1}{l_{BC}}\phi_B + 2\frac{1}{l_{BC}}\phi_C &= \frac{1}{2}\frac{1}{EI}\left(\ M_C - M^o_{CB}\right) \end{aligned}$$

Obsérvese que en la segunda ecuación puede obtenerse ϕ_C en función de ϕ_B y resolver el problema con una única ecuación en ϕ_B. Además, el hecho de que uno de los extremos de la viga continua esté empotrado elimina una de las incógnitas cinemáticas del problema.

En las ecuaciones anteriores, se tiene que $l_{AB} = 6$ m, $l_{BC} = 5$ m, el momento en el apoyo C es $M_C = -30 \cdot 2,5 = -75$ kN.m y

$$\begin{aligned} M^o_{AB} &= +\frac{1}{12}pl^2_{AB} \quad ; \quad M^o_{BA} = -\frac{1}{12}pl^2_{AB} \\ M^o_{BC} &= +\frac{1}{12}pl^2_{BC} \quad ; \quad M^o_{CB} = -\frac{1}{12}pl^2_{BC} \end{aligned}$$

Sustituyendo y resolviendo, se obtiene:

$$EI\,\phi_B = +28,125 \text{ kN.m}^2 \quad ; \quad EI\,\phi_C = -68,750 \quad \text{kN.m}^2$$

Sustituyendo ahora en las ecuaciones elásticas correspondientes, se tiene:

$$\text{vano } AB \begin{cases} M_{AB} = 2K_{AB}\,(2\phi_A + \phi_B) + M^o_{AB} = +54,375\,\text{kN·m} \\ M_{BA} = 2K_{AB}\,(2\phi_B + \phi_A) + M^o_{BA} = -26,250\,\text{kN·m} \end{cases}$$

$$\text{vano } BC \begin{cases} M_{BC} = 2K_{BC}\,(2\phi_B + \phi_C) + M^o_{BC} = +26,250\,\text{kN·m} \\ M_{CB} = 2K_{BC}\,(2\phi_C + \phi_B) + M^o_{CB} = -75,000\,\text{kN·m} \end{cases}$$

Las correspondientes leyes de flectores y cortantes y la deformada se muestran en la Figura 7.11.

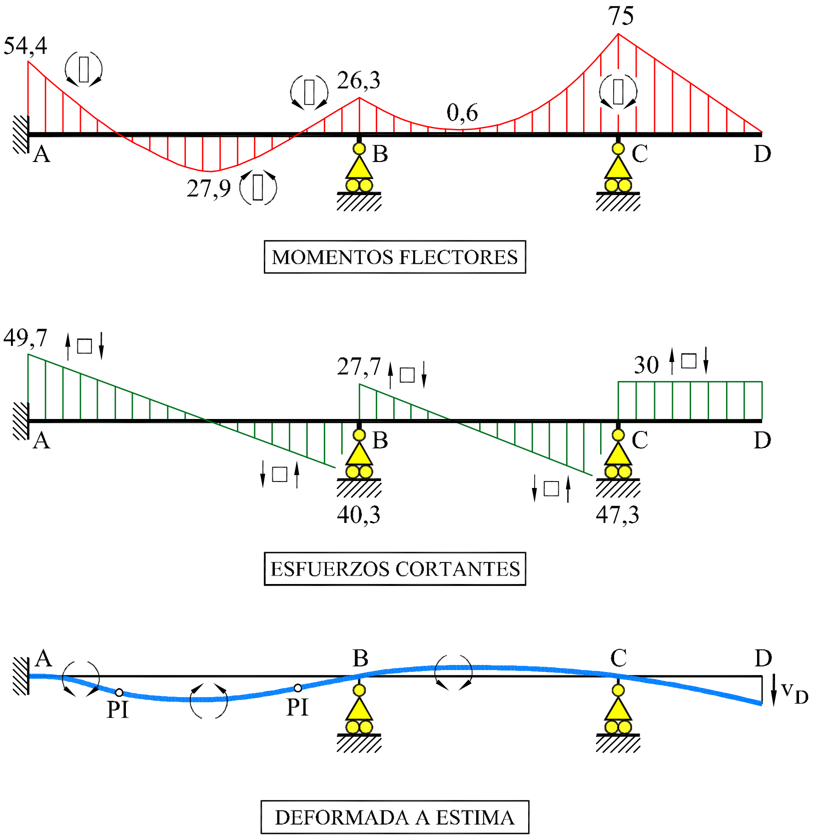


Fig. 7.11: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 7.5.2

Deformaciones impuestas

Como se indicó en Capítulo 2 (Sección 2.7), las deformaciones impuestas producen, en general, reacciones y esfuerzos en las estructuras hiperestáticas, y tal es el caso de las vigas continuas. Consideramos aquí el caso de las deformaciones de origen térmico, como ejemplo de acción habitual sobre esta tipología estructural.

Supondremos en lo que sigue que sólo uno de los apoyos de la viga continua tiene impedido el movimiento horizontal. Con esta disposición de los apoyos los cambios térmicos uniformes a través del espesor de las piezas no producen ningún tipo de esfuerzo. No ocurre lo mismo con las variaciones térmicas no uniformes a través del espesor, que producen un alargamiento diferencial de las diferentes fibras de la sección y, por lo tanto, curvaturas impuestas y giros en los apoyos. Se resuelve a continuación un ejemplo de este tipo de solicitación.

Ejemplo 7.5.3

Resolver la viga continua simétrica de la Figura 7.12, cuando el intradós y el trasdós sufren incrementos de temperatura Δt_1 y Δt_2, respectivamente ($\Delta t_2 > \Delta t_1$), con una variación lineal de temperatura a través del canto h de la pieza. Suponer sección rectangular constante a lo largo de la pieza.

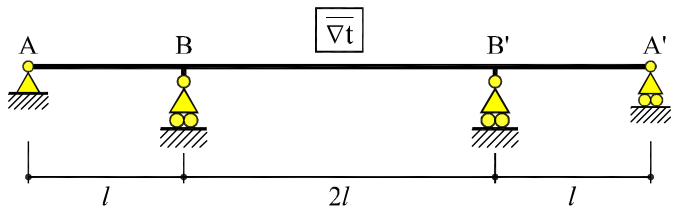


Fig. 7.12: Viga continua del Ejemplo 7.5.3

Supondremos que la dilatación longitudinal es libre y que sólo la curvatura de origen térmico produce esfuerzos hiperestáticos. El valor de ésta es

$$d\phi = -\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{h}\alpha ds = -\overline{\nabla t}\,\alpha ds$$

Dada la simetría de la viga y de la solicitación, los giros de los apoyos son simétricos dos a dos, $\phi_A = -\phi_{A'}$ y $\phi_B = -\phi_{B'}$ son iguales. Por tanto, la estructura se resuelve imponiendo que el momento en A sea nulo y planteando el equilibrio de momentos en B:

$$\begin{aligned}
2\frac{1}{l}\phi_A \qquad\qquad + \frac{1}{l}\phi_B &= \frac{1}{2}\frac{1}{EI}\;(\;M_A - M^o_{AB}) \\
\frac{1}{l}\phi_A + 2\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{2l}\right)\phi_B + \frac{1}{2l}\phi_{B'} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{EI}\;(M^o_{BB'} + M^o_{BA})
\end{aligned}$$

En la expresión anterior, se tiene $M_A = 0$ y, según los resultados del Ejemplo 3.9.2 del Capítulo 3:

$$M^o_{AB} = -EI\,\overline{\nabla t}\,\alpha \quad ; \quad M^o_{BA} = +EI\,\overline{\nabla t}\,\alpha \quad ; \quad M^o_{BB'} = -EI\,\overline{\nabla t}\,\alpha$$

Sustituyendo, con $K = EI/l$, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}
2\phi_A + \quad \phi_B &= \frac{1}{2}\frac{1}{K}\,\overline{\nabla t}\,\alpha \\
\phi_A + \frac{5}{2}\phi_B &= 0
\end{aligned}$$

que resuelto proporciona los valores:

$$\phi_A = -\phi_{A'} = +\frac{5}{16}\,\overline{\nabla t}\,\alpha\,l \qquad ; \qquad \phi_B = -\phi_{B'} = -\frac{1}{8}\,\overline{\nabla t}\,\alpha\,l$$

Sustituyendo, ahora en las ecuaciones elásticas correspondientes, se tiene:

$$\text{vano } AB \left\{ \begin{aligned} M_{AB} &= 2K\,(2\phi_A + \phi_B)\; + M^o_{AB} &&= 0 \\ M_{BA} &= 2K\,(2\phi_B + \phi_A)\; + M^o_{BA} &&= -\frac{9}{8}\,EI\,\overline{\nabla t}\,\alpha \end{aligned} \right.$$

$$\text{vano } BB' \left\{ \begin{aligned} M_{BB'} &= K\,(2\phi_B + \phi_{B'}) + M^o_{BB'} &&= +\frac{9}{8}\,EI\,\overline{\nabla t}\,\alpha \\ M_{B'B} &= K\,(2\phi_{B'} + \phi_B) + M^o_{B'B} &&= -\frac{9}{8}\,EI\,\overline{\nabla t}\,\alpha \end{aligned} \right.$$

Las correspondientes leyes de flectores y cortantes y la deformada se muestran en la Figura 7.13.

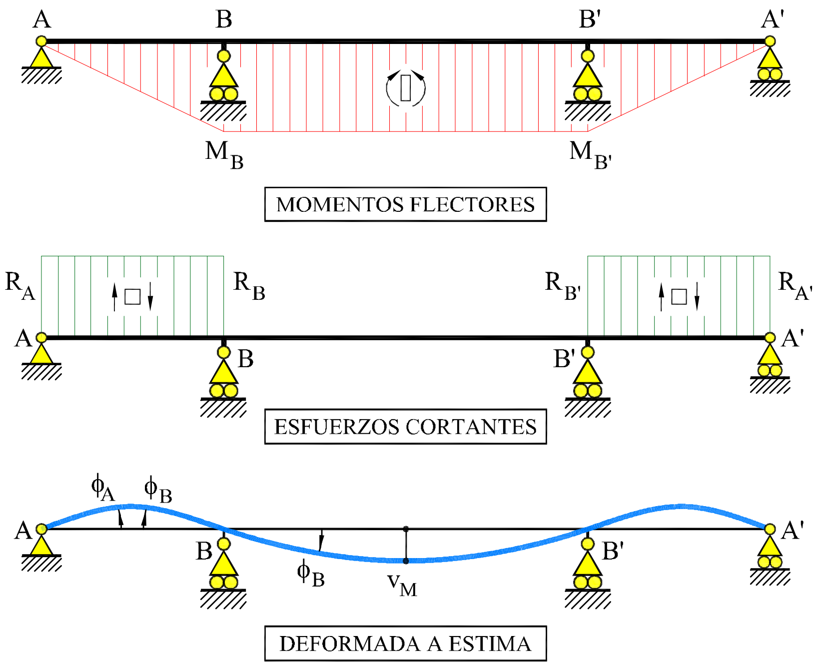


Fig. 7.13: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 7.5.3

Descenso de apoyos

Consideremos ahora la eventualidad de que los $n+2$ apoyos de una viga continua puedan sufrir descensos de valor conocido. Llamemos v_J al descenso (considerado positivo descendente) que experimenta un apoyo genérico J; los tramos contiguos a dicho apoyo están sujetos a giros de sólido rígido de valor (Figura 7.14):

$$\overline{\phi}_{JI} = -\frac{v_J - v_I}{l_{IJ}} \qquad ; \qquad \overline{\phi}_{JK} = -\frac{v_K - v_J}{l_{JK}} \tag{7.16}$$

donde las longitudes l_{IJ} y l_{JK} son las longitudes de los vanos IJ y JK, respectivamente.

Estos giros de las piezas deben tenerse en cuenta en las respectivas ecuaciones elásticas, que ahora se escriben:

$$\begin{aligned} M_{JI} &= 2K_{IJ} \quad (2\phi_J + \phi_I) - 6K_{IJ} \ \overline{\phi}_{JI} \ + M^o_{JI} \\ M_{JK} &= 2K_{JK}\,(2\phi_J + \phi_K) - 6K_{JK}\,\overline{\phi}_{JK} + M^o_{JK} \end{aligned} \tag{7.17}$$

donde los giros $\overline{\phi}_{JI}$ y $\overline{\phi}_{JK}$ son los giros de sólido rígido debidos a los descensos de apoyo.

Introduciendo estos términos adicionales, la ecuación de los tres giros (7.8) queda de la forma:

$$\begin{aligned} K_{IJ}\phi_I + 2\left[K_{IJ}+K_{JK}\right]\phi_J + K_{JK}\,\phi_K = \\ = -\frac{1}{2}\left[(M^o_{JK}+M^o_{JI}) - 6\left(K_{JK}\overline{\phi}_{JK} + K_{IJ}\overline{\phi}_{JI}\right)\right] \end{aligned} \tag{7.18}$$

En la expresión anterior, el último término del segundo miembro es el correspondiente a los descensos de los apoyos.

En el caso de apoyos extremos articulados, las ecuaciones (7.11) y (7.12) deben modificarse adecuadamente. Sean A el apoyo del extremo izquierdo y B el apoyo

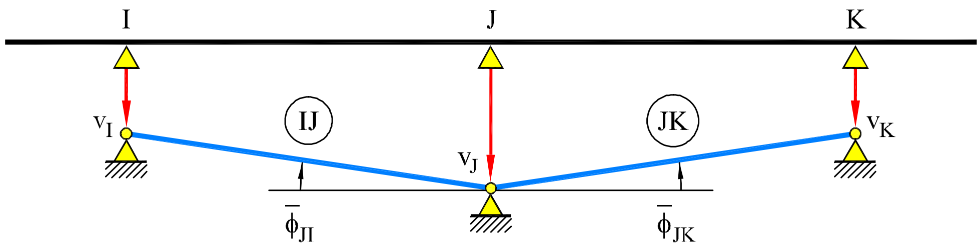


Fig. 7.14: Descenso de apoyos intermedios de una viga continua

contiguo a su derecha, y sean Z el apoyo del extremo derecho e Y el apoyo contiguo a su izquierda. Las ecuaciones modificadas correspondientes a los apoyos extremos A y Z son, respectivamente:

$$2\phi_A + \phi_B = \frac{1}{2}\frac{1}{K_{AB}}(M_A - M^o_{AB}) + 3\overline{\phi}_{AB} \tag{7.19}$$

$$\phi_Y + 2\phi_Z = \frac{1}{2}\frac{1}{K_{YZ}}(M_Z - M^o_{ZY}) + 3\overline{\phi}_{YZ} \tag{7.20}$$

donde $\overline{\phi}_{AB}$ y $\overline{\phi}_{YZ}$ son los giros de los vanos extremos, AB e YZ, debidos a los descensos de apoyos.

Ejemplo 7.5.4

Resolver la viga continua de la Figura 7.15 aplicando el método de rigidez, teniendo en cuenta que EI es constante y que el apoyo C sufre un descenso $v_C = 480/EI$ m $= 4,8 \cdot 10^{-3}$ m.

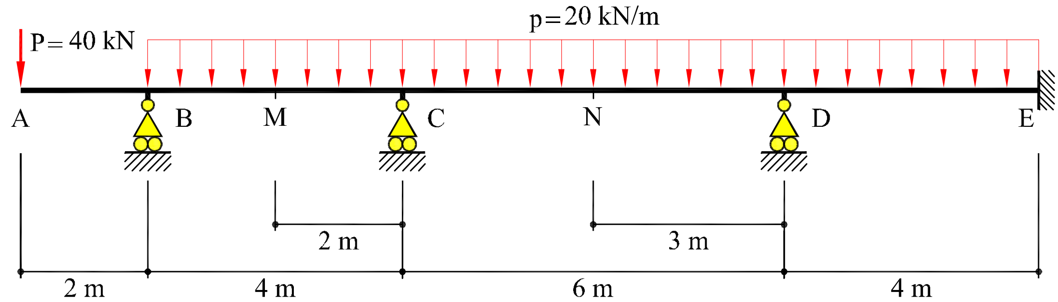


Fig. 7.15: Viga continua del Ejemplo 7.5.4

Las incógnitas del problema son los giros en los tres apoyos, ϕ_B, ϕ_C y ϕ_D, ya que $\phi_E = 0$. Aplicando las ecuaciones (7.19) y (7.18), puede escribirse:

$$2\frac{1}{l_{BC}}\phi_B + \frac{1}{l_{BC}}\phi = \frac{1}{2}\frac{1}{EI}\left(M_B - M^o_{BA}\right) + 3\frac{1}{l_{BC}}\overline{\phi}_{BC}$$

$$\frac{1}{l_{BC}}\phi_B + 2\left(\frac{1}{l_{BC}} + \frac{1}{l_{CD}}\right)\phi_C + \frac{1}{l_{CD}}\phi_D = -\frac{1}{2}\frac{1}{EI}\left(M^o_{CD} + M^o_{CB}\right) + +3\left[\frac{1}{l_{CD}}\overline{\phi}_{CD} + \frac{1}{l_{BC}}\overline{\phi}_{CB}\right]$$

$$\frac{1}{l_{CD}}\phi_C + 2\left(\frac{1}{l_{CD}} + \frac{1}{l_{DE}}\right)\phi_D + \frac{1}{l_{DE}}\phi_E =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{EI}\,(M^o_{DE} + M^o_{DC}) + 3\frac{1}{l_{CD}}\,\overline{\phi}_{DC}$$

donde puede observarse que el sistema de ecuaciones que se obtiene es tridiagonal y simétrico. En la expresión anterior se tiene $l_{BC} = 4$ m, $l_{CD} = 6$ m, $l_{DE} = 4$ m, $M_B = +40 \cdot 2 = -80$ kN·m y:

$$M^o_{BC} = +\frac{1}{12}pl^2_{BC} \quad ; \quad M^o_{CB} = -\frac{1}{12}pl^2_{BC}$$

$$M^o_{CD} = +\frac{1}{12}pl^2_{CD} \quad ; \quad M^o_{DC} = -\frac{1}{12}pl^2_{CD}$$

$$M^o_{DE} = +\frac{1}{12}pl^2_{DE} \quad ; \quad M^o_{ED} = -\frac{1}{12}pl^2_{DE}$$

Los giros $\overline{\phi}_{BC} = \overline{\phi}_{CB}$ y $\overline{\phi}_{CD} = \overline{\phi}_{DC}$ son los giros de los tramos AB y CD, respectivamente, debidos al descenso del apoyo C (Figura 7.16):

$$\overline{\phi}_{BC} = \overline{\phi}_{CB} = -\frac{v_C}{l_{BC}} \quad ; \quad \overline{\phi}_{CD} = \overline{\phi}_{DC} = +\frac{v_C}{l_{CD}}$$

Sustituyendo y resolviendo, se obtiene:

$$EI\,\phi_B = -92,345 \text{ kN·m}^2 \quad ; \quad EI\,\phi_C = -92,666 \text{ kN·m}^2 \quad ; \quad EI\,\phi_D = +81,728 \text{ kN·m}^2$$

Sustituyendo ahora en las ecuaciones elásticas de los vanos BC, CD y DE, se tiene:

$$BC \begin{cases} M_{BC} = 2K_{BC}\,(2\phi_B + \phi_C) - 6K_{BC}\overline{\phi}_{BC} + M^o_{BC} = +80,00\,\text{kN·m} \\ M_{CB} = 2K_{BC}\,(2\phi_B + \phi_C) - 6K_{BC}\overline{\phi}_{CB} + M^o_{CB} = +38,50\,\text{kN·m} \end{cases}$$

$$CD \begin{cases} M_{CD} = 2K_{CD}\,(2\phi_C + \phi_D) - 6K_{CD}\overline{\phi}_{CD} + M^o_{CD} = -38,50\,\text{kN·m} \\ M_{DC} = 2K_{CD}\,(2\phi_D + \phi_C) - 6K_{CD}\overline{\phi}_{DC} + M^o_{DC} = -108,4\,\text{kN·m} \end{cases}$$

$$DE \begin{cases} M_{DE} = 2K_{DE}\,(2\phi_D + \phi_E) + M^o_{DE} = +108,4\,\text{kN·m} \\ M_{ED} = 2K_{DE}\,(2\phi_E + \phi_D) + M^o_{ED} = +14,20\,\text{kN·m} \end{cases}$$

Las leyes de esfuerzos de la viga continua y su deformada a estima se muestran en la Figura 7.17.

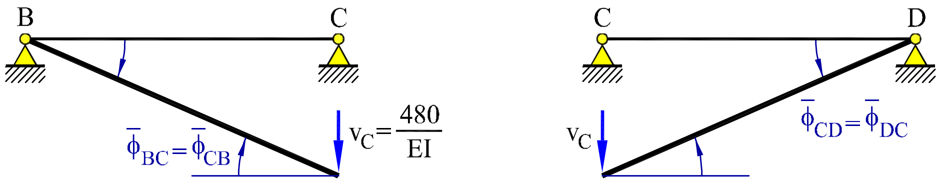


Fig. 7.16: Giros de sólido rígido debidos al descenso de apoyo en Ejemplo 7.5.4

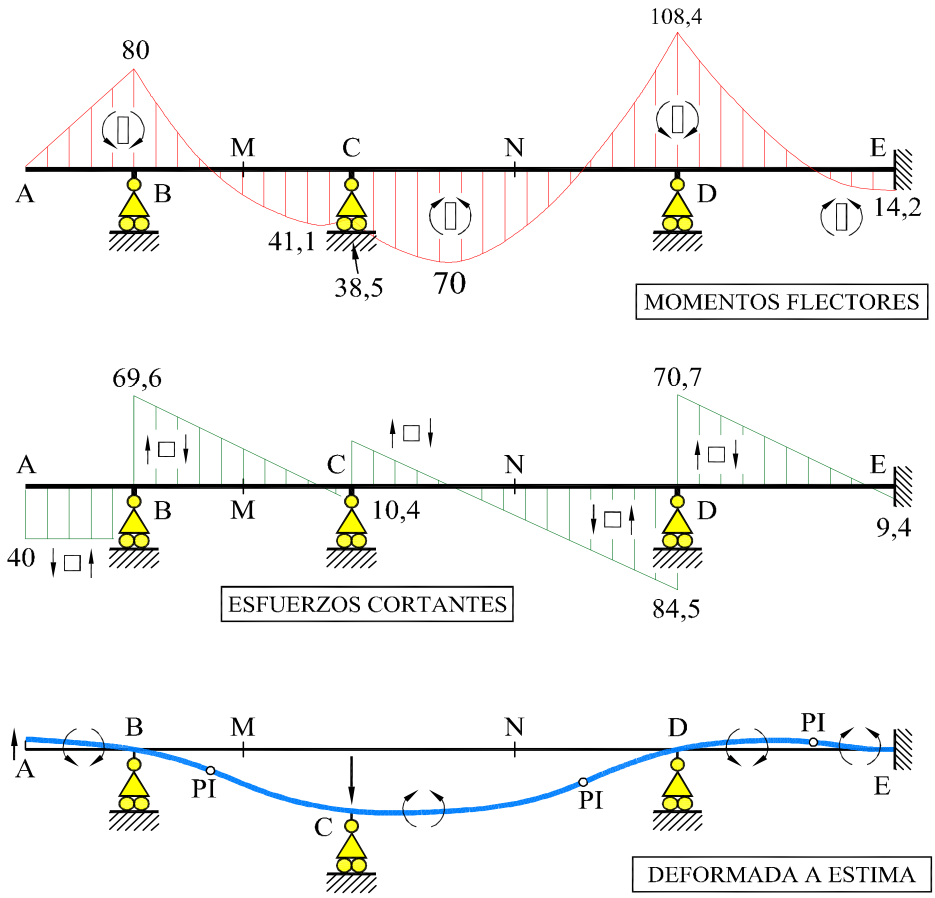


Fig. 7.17: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 7.5.4

7.6 Pórticos

Como se definió en el Capítulo anterior, se llama *pórtico* o *estructura porticada* a las estructuras reticuladas de plano medio formadas a base de soportes y dinteles. Cuando las piezas de estas estructuras forman células cerradas se les llama *marcos*.

En lo que sigue se muestran ejemplos ilustrativos de la resolución de pórticos hiperestáticos por el método de equilibrio. Como es habitual en la resolución de estructuras reticuladas, se desprecia la deformación por axil y cortante frente a la de flexión; esto, como veremos, simplifica notablemente la resolución por métodos "manuales" de estas estructuras. Asimismo, se hará uso, cuando la simetría de la geometría lo permita, de las simplificaciones pertinentes.

7.6.1 Pórticos intraslacionales

En los *pórticos intraslacionales*, los únicos movimientos incógnita son los giros de los nudos. Conocidos los giros, se pueden calcular los momentos extremos de barras y, conocidos éstos, todos los esfuerzos en la estructura. Resolvemos este tipo de problema utilizando las ecuaciones elásticas sin término debido al giro de las barras. Así, se puede estudiar aisladamente cualquier barra AB de una estructura intraslacional considerándola como biapoyada, con tal de tener en cuenta los giros ϕ_A y ϕ_B que tienen los nudos A y B en la estructura real. Llamando $K = EI/l$ a la rigidez de la barra, los momentos M_{AB} y M_{BA} en los extremos de la barra pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2K\,(2\phi_A + \phi_B) + M^o_{AB} \\ M_{BA} &= 2K\,(2\phi_B + \phi_A) + M^o_{BA} \end{aligned} \tag{7.21}$$

siendo ϕ_A, ϕ_B los giros en los extremos A y B de la barra, y M^o_{AB}, M^o_{BA} los momentos de empotramiento perfecto debidos a las cargas que actúan en la barra (es decir, los momentos que se producen para $\phi_A = \phi_B = 0$).

Si la barra AB tiene uno de sus extremos articulados, por ejemplo el B, se puede imponer que $M_{BA} = 0$, y usar las expresiones alternativas:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 3K\,\phi_A + \widehat{M}^o_{AB} \\ \phi_B &= -\frac{1}{2}\phi_A - \frac{1}{4}\frac{1}{K}M^o_{BA} \end{aligned} \tag{7.22}$$

donde $\widehat{M}^o_{AB} = M^o_{AB} - (1/2)M^o_{BA}$, tal como se indicó en el Capítulo 3.

Ejemplo 7.6.1.1

Resolver la estructura de la Figura 7.18 para carga uniforme p actuando sobre el dintel. La rigidez a flexión $K = EI/l$ es igual para todas las barras.

La estructura es simétrica de forma y de carga. Por simetría, el giro del nudo B es de igual magnitud y opuesto al del nudo A, luego $\phi_B = -\phi_A$. Análogamente, $\phi_D = -\phi_C$. Además, como el nudo C está articulado, el giro ϕ_C puede calcularse a posteriori, imponiendo que el momento $M_{CA} = 0$. Por simetría, no hay desplazamiento lateral del pórtico y, por tanto, no hay desplazamiento transversal relativo entre los nudos de las barras. La estructura es, por consiguiente, intraslacional, y la única incógnita en movimientos necesaria para resolver el problema es ϕ_A.

Definiendo $K = (EI/l)$, se escriben las ecuaciones elásticas de las barras:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2K(2\phi_A + \phi_B) + M^o_{AB} = +2K\phi_A + \frac{pl^2}{12} \\ M_{BA} &= 2K(\phi_A + 2\phi_B) + M^o_{BA} = -2K\phi_A - \frac{pl^2}{12} \\ M_{AC} &= 3K\phi_A \\ M_{BD} &= 3K\phi_B = -3K\phi_A \end{aligned}$$

Nótese que en las barras AC y BD se han usado las ecuaciones correspondientes a barras empotrado-articuladas.

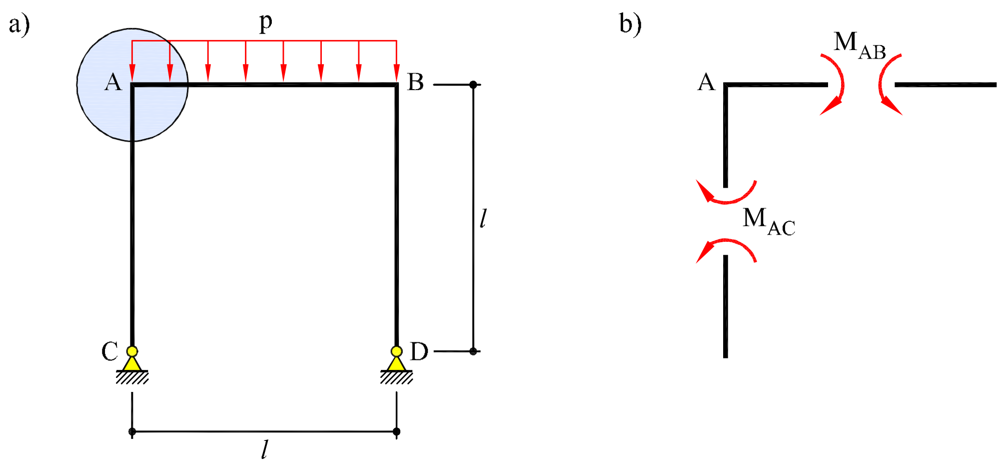


Fig. 7.18: Pórtico del Ejemplo 7.6.1.1

La ecuación de equilibrio de momentos en A, que resuelve el problema, es:

$$\sum M_A = 0 = M_{AB} + M_{AC}$$

La ecuación de equilibrio de momentos en B resulta en la misma ecuación, por simetría. Sustituyendo las ecuaciones elásticas correspondientes y resolviendo la ecuación de equilibrio resultante:

$$5K\phi_A + \frac{pl^2}{12} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_A = -\frac{1}{60}\frac{pl^2}{K}$$

y el problema queda resuelto. Sustituyendo el valor de ϕ_A en las ecuaciones elásticas, se tienen los momentos de extremo de barra:

$$M_{AB} = +\frac{1}{20}\,pl^2 \quad ; \quad M_{BA} = -M_{AB} = -\frac{1}{20}\,pl^2$$
$$M_{AC} = -\frac{1}{20}\,pl^2 \quad ; \quad M_{BD} = -M_{AC} = +\frac{1}{20}\,pl^2$$

Las leyes de momentos flectores, esfuerzos axiles y cortantes y la deformada a estima pueden verse en la Figura 7.19. Las reacciones en los apoyos C y D se deducen de los esfuerzos correspondientes.

El giro en las articulaciones se puede calcular imponiendo que el momento en dichos extremos es nulo y resulta:

$$\phi_C = -\frac{1}{2}\phi_A = \frac{1}{120}\frac{pl^2}{K} \qquad ; \qquad \phi_D = -\phi_C$$

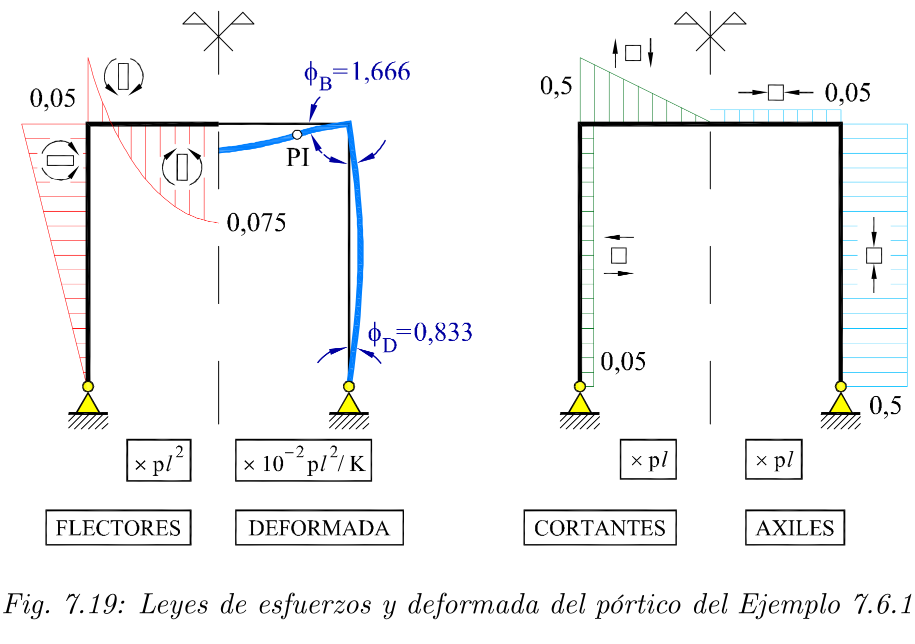


Fig. 7.19: Leyes de esfuerzos y deformada del pórtico del Ejemplo 7.6.1.1

Ejemplo 7.6.1.2

Resolver la estructura de la Figura 7.20 sometida a la acción de una carga uniformemente repartida $p = 15$ kN/m.

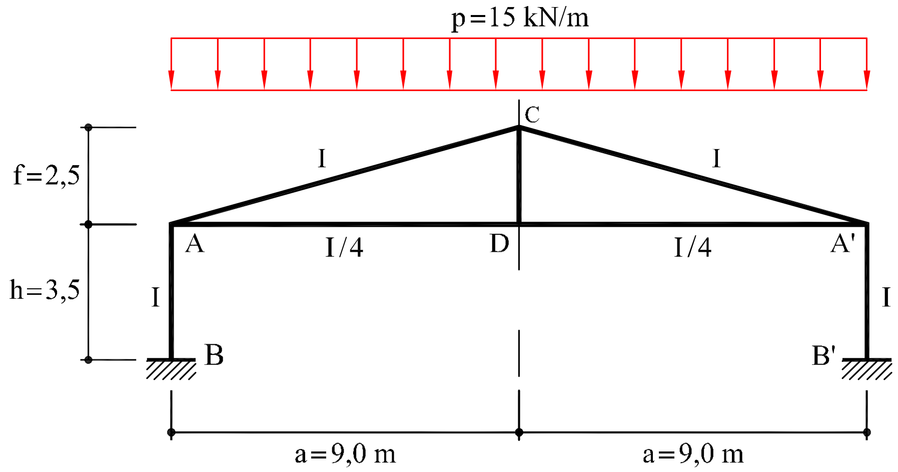


Fig. 7.20: Pórtico del Ejemplo 7.6.1.2

La estructura es simétrica de forma, y también lo es el caso de carga que se estudia, por lo que se considera sólo la mitad izquierda de cara a su resolución. La estructura es intraslacional para este tipo de carga, aunque no lo sea para otros tipos. En efecto, el triángulo ADC no se puede mover, ya que los puntos C y D no se pueden desplazar horizontalmente, por simetría, y el punto A no puede moverse verticalmente sin acortar o alargar la barra AB. Por simetría, los giros de los nudos C y D son nulos, $\phi_C = \phi_D = 0$:

Debido a la simetría, la estructura es hiperestática de grado 5 (Figura 7.21a). Sin embargo, al ser intraslacional, por el método de equilibrio se puede resolver con una sóla incógnita: el giro del nudo A, ϕ_A.

Se definen, en primer lugar, las rigideces de las barras. Tomando $K_{AB} = (EI/3,5) = K$, se tiene:

$$K_{AC} = \frac{EI}{\sqrt{(9,0)^2 + (2,5)^2}} = 0,375\,K \qquad ; \qquad K_{AD} = \frac{EI/4}{9} = 0,098\,K$$

Escribimos a continuación las ecuaciones elásticas pertinentes, recordando que

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= 2K_{AB}\,(2\phi_A + \phi_B) + M^o_{AB} &= 4K_{AB}\,\phi_A \\
M_{BA} &= 2K_{AB}\,(2\phi_B + \phi_A) + M^o_{BA} &= 2K_{AB}\,\phi_A \\
M_{AC} &= 2K_{AC}\,(2\phi_A + \phi_C) + M^o_{AC} &= 4K_{AC}\,\phi_A + M^o_{AC} \\
M_{CA} &= 2K_{AC}\,(2\phi_C + \phi_A) + M^o_{CA} &= 2K_{AC}\,\phi_A + M^o_{CA} \\
M_{AD} &= 2K_{AD}\,(2\phi_A + \phi_D) + M^o_{AD} &= 4K_{AD}\,\phi_A \\
M_{DA} &= 2K_{AD}\,(2\phi_D + \phi_A) + M^o_{DA} &= 2K_{AD}\,\phi_A
\end{aligned}$$

Por equilibrio de momentos en el nudo A, debe ser:

$$M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} = 0$$

y sustituyendo las ecuaciones anteriores:

$$4\phi_A\,(K_{AB} + K_{AC} + K_{AD}) = -M^o_{AC} \qquad \Rightarrow \qquad \phi_A = -\frac{M^o_{AC}}{4\sum_J K_{AJ}}$$

y entonces:

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= -\left(\frac{K_{AB}}{\sum_J K_{AJ}}\right) M^o_{AC} \\
M_{AC} &= -\left(\frac{K_{AC}}{\sum_J K_{AJ}}\right) M^o_{AC} + M^o_{AC} \\
M_{AD} &= -\left(\frac{K_{AD}}{\sum_J K_{AJ}}\right) M^o_{AC}
\end{aligned}$$

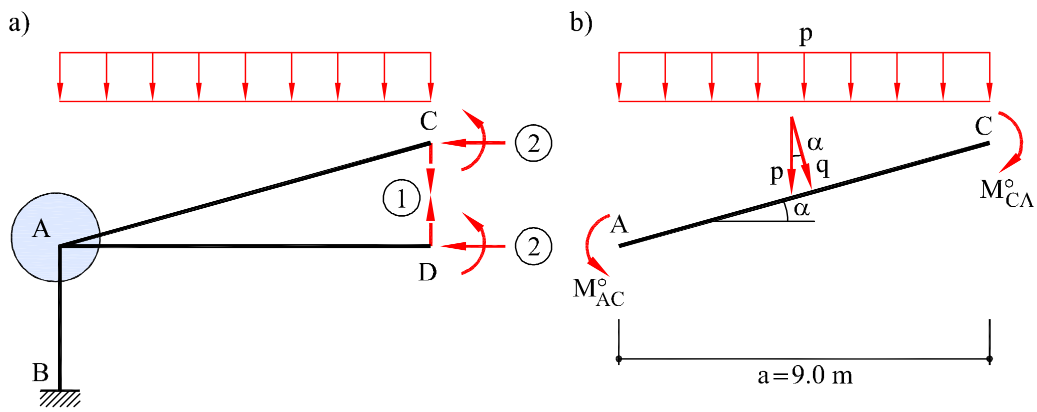


Fig. 7.21: Ejemplo 7.6.1.2: (a) Grado de hiperestatismo. (b) Carga sobre barra

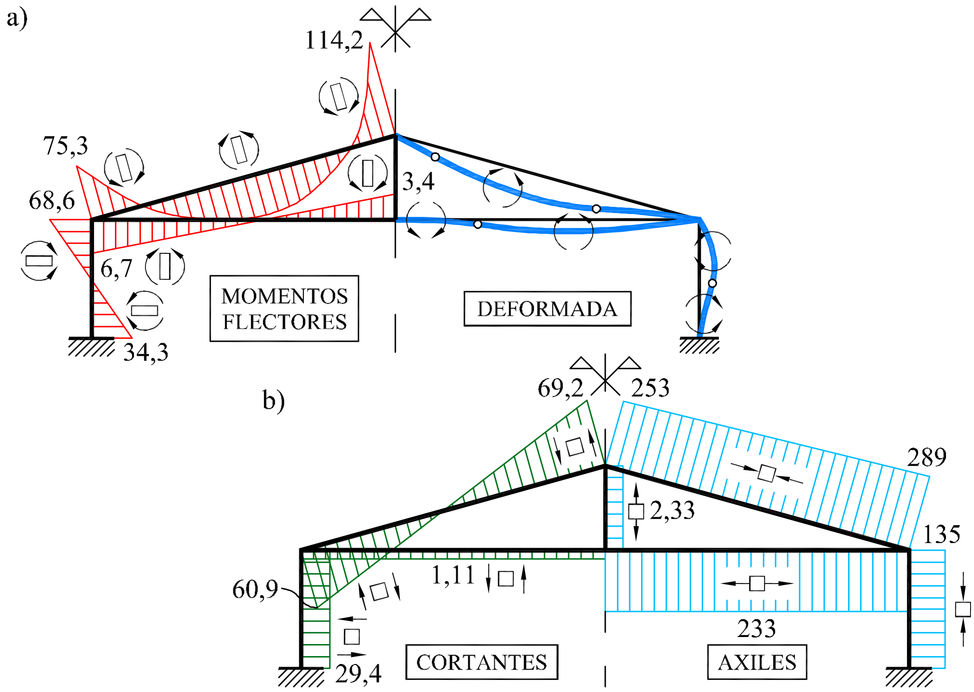


Fig. 7.22: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 7.6.1.2

Se observa que el momento de empotramiento perfecto en el nudo A se reparte proporcionalmente a la rigidez de cada barra que concurre en dicho nudo. Este resultado es la base de un método clásico de resolución de pórticos: el *Método de Cross* (1932).

De las expresiones anteriores también puede deducirse un enunciado general de interés: *en una estructura intraslacional que soporte exclusivamente fuerzas aplicadas en los nudos, los momentos en extremo de barra son nulos y, por lo tanto, la estructura trabaja sólo a esfuerzo axil.* En efecto, de las expresiones obtenidas se desprende que si $M^o_{IJ} = 0$ para todas las barras, esto implica necesariamente que $M_{IJ} = 0$ para todas las barras. Este enunciado *no es válido* para estructuras traslacionales.

Determinaremos ahora el valor del momento de empotramiento perfecto M^o_{AC}. Según la Figura 7.21b, llamando p a la carga repartida vertical (definida por unidad de proyección horizontal) y siendo q la correspondiente componente perpendicular a la pieza (definida por unidad de longitud de barra), se tiene:

$$q \;= \frac{pa\,\cos\alpha}{l_{AC}} = \frac{pa\,\cos\alpha}{a/\cos\alpha} = p\,\cos^2\alpha$$

de donde:

$$
\begin{aligned}
M^o_{AC} &= +\frac{1}{12}q\,l^2_{AC} &= +\frac{1}{12}pa^2 &= +\frac{15\cdot 9^2}{12} \quad \text{kN·m}\\
M^o_{CA} &= -\frac{1}{12}q\,l^2_{AC} &= -\frac{1}{12}pa^2 &= -\frac{15\cdot 9^2}{12} \quad \text{kN·m}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo valores en las expresiones anteriores, se obtiene:

$$K\phi_A = -1,7184 \quad \text{kN·m}$$

y por tanto:

$$
\begin{aligned}
M_{AB} &= -68,6\,\text{kN·m} & M_{AC} &= +75,3\,\text{kN·m} & M_{AD} &= -6,7\ \text{kN·m}\\
M_{BA} &= -34,3\,\text{kN·m} & M_{CA} &= -114,2\,\text{kN·m} & M_{DA} &= -3,4\,\text{kN·m}
\end{aligned}
$$

La ley de momentos flectores y la deformada a estima de la estructura pueden verse en la Figura 7.22, donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

7.6.2 Pórticos traslacionales

En una estructura traslacional, los nudos pueden girar y desplazarse. Por tanto, los nudos extremos de una barra AB pueden sufrir un desplazamiento transversal relativo y hay que incluir los términos correspondientes en las ecuaciones elásticas. Llamando $K = EI/l$ a la rigidez de la barra, los momentos M_{AB} y M_{BA} en los extremos de la barra pueden expresarse como:

$$
\begin{aligned}
M_{AB} &= 2K\,(2\phi_A + \phi_B) - 6K\,\overline{\phi}_{AB} + M^o_{AB}\\
M_{BA} &= 2K\,(2\phi_B + \phi_A) - 6K\,\overline{\phi}_{AB} + M^o_{BA}
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

siendo ϕ_A, ϕ_B los giros en los extremos A y B de la barra, $\overline{\phi}_{AB}$ el giro de sólido rígido de la barra y M^o_{AB}, M^o_{BA} los momentos de empotramiento perfecto debidos a las cargas que actúan en la barra (es decir, los momentos que se producen para $\phi_A = \phi_B = 0$).

Si la barra AB tiene uno de sus extremos articulados, por ejemplo el B, se puede imponer que $M_{BA} = 0$, y usar las expresiones alternativas:

$$
\begin{aligned}
M_{AB} &= 3K\,\phi_A - 3K\,\overline{\phi}_{AB} + \widehat{M}^o_{AB}\\
\phi_B &= -\frac{1}{2}\phi_A + \frac{3}{2}\overline{\phi}_{AB} - \frac{1}{4}\frac{1}{K}M^o_{BA}
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

donde $\widehat{M}^o_{AB} = M^o_{AB} - (1/2)M^o_{BA}$, tal como se indicó en el Capítulo 3.

La mayor dificultad a la hora de resolver estructuras traslacionales por el método de equilibrio consiste en que, para resolver el problema, son necesarias tantas ecuaciones adicionales de equilibrio de fuerzas como número de *movimientos independientes* de sólido rígido de barras haya que determinar. Este número mínimo de movimientos independientes que definen la deformación de la estructura (despreciando la deformación por axil y cortante) es, por definición, el *grado de traslacionalidad* de la estructura. Plantear estas ecuaciones, llamadas *ecuaciones de equilibrio de cortantes*, requiere determinar cómo se mueve la estructura y cómo interaccionan entre sí las diferentes barras. Se muestran, en lo que sigue, varios ejemplos de este procedimiento.

Ejemplo 7.6.2.1

Resolver la estructura de la Figura 7.23a con carga uniforme p actuando sobre el dintel. La rigidez a flexión EI es idéntica para todas las barras.

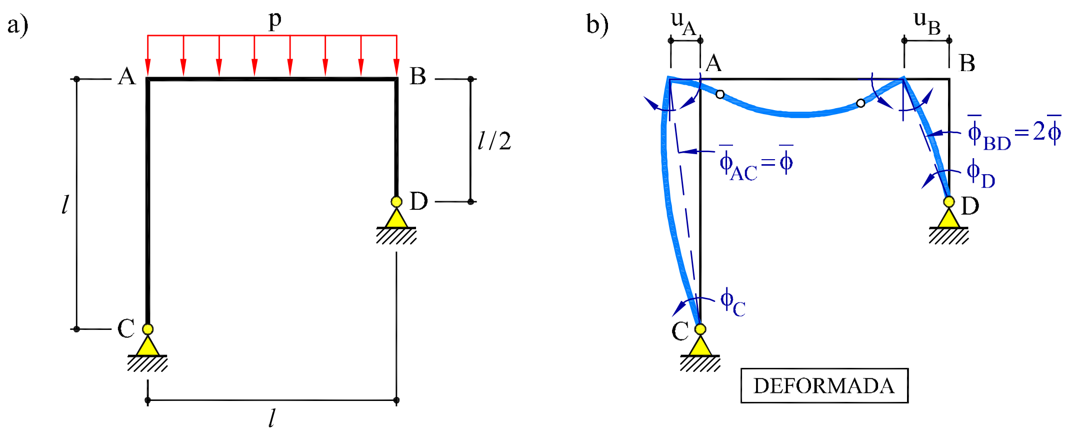


Fig. 7.23: (a) Pórtico del Ejemplo 7.6.2.1 (b) deformada

Al estar articulados los nudos C y D, los correspondientes giros ϕ_C y ϕ_D no aparecen en las ecuaciones elásticas, ya que pueden calcularse *a posteriori*. Se toman, por tanto, como giros incógnitas ϕ_A y ϕ_B. Además, debido a la asimetría de la geometría, la barra AB sufrirá un desplazamiento horizontal desconocido de valor $u_A = u_B$ (Figura 7.23b).

Se define el giro en la barra AC debido a este desplazamiento como:

$$\overline{\phi}_{AC} = \frac{u_A}{l} = \overline{\phi}$$

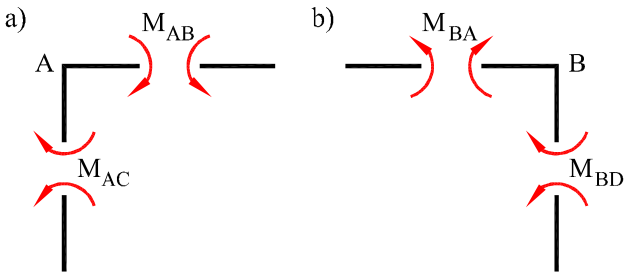


Fig. 7.24: Equilibrio de momentos en los nudos A y B

y, análogamente, el giro de la barra BD debido al desplazamiento lateral:

$$\overline{\phi}_{BD} = \frac{u_B}{l/2} = 2\overline{\phi}$$

Además, se definen las rigideces de las barras:

$$K_{AC} = K_{AB} = \frac{EI}{l} = K \qquad\qquad K_{BD} = \frac{EI}{l/2} = 2K$$

Las ecuaciones elásticas de las barras son:

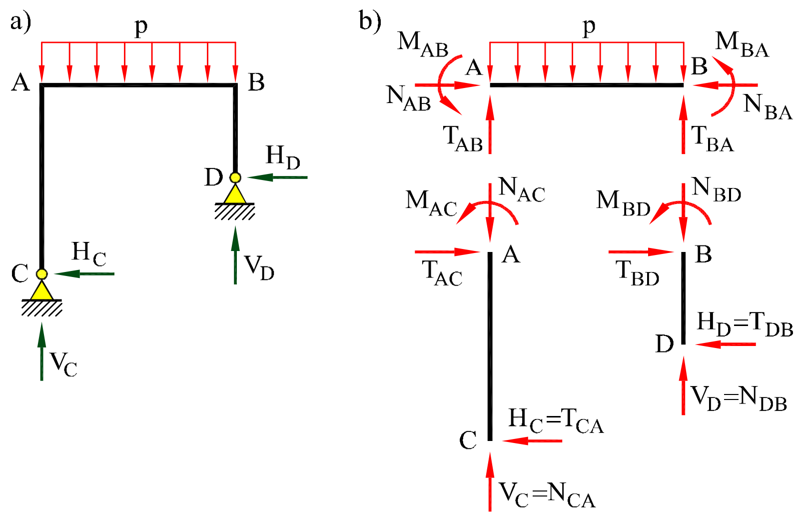


Fig. 7.25: Equilibrio de fuerzas y momentos en el Ejemplo 7.6.2.1

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= 2K(2\phi_A+\phi_B)+M^o_{AB} &&= 4K\phi_A+2K\phi_B+\frac{pl^2}{12}\\
M_{BA} &= 2K(\phi_A+2\phi_B)+M^o_{BA} &&= 2K\phi_A+4K\phi_B-\frac{pl^2}{12}\\
M_{AC} &= 3K\phi_A-3K\overline{\phi}\\
M_{BD} &= 3(2K)\phi_B-3(2K)\left(2\overline{\phi}\right) &&= 6K\phi_B-12K\overline{\phi}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio que se plantean son (Figura 7.24):

(a) Equilibrio de momentos en A: $\sum M_A=0=M_{AC}+M_{AB}$

$$7K\phi_A+2K\phi_B-3K\overline{\phi}=-\frac{pl^2}{12} \tag{a3}$$

(b) Equilibrio de momentos en B: $\sum M_B=0=M_{BA}+M_{BD}$

$$2K\phi_A+10K\phi_B-12K\overline{\phi}=\frac{pl^2}{12} \tag{b3}$$

(c) Equilibrio de fuerzas horizontales (Figura 7.25a):

$$\begin{aligned}
0 &= H_C+H_D = \frac{M_{AC}}{l}+\frac{M_{BD}}{l/2}\\
0 &= M_{AC}+2M_{BD}\\
0 &= 3K\phi_A+12K\phi_B-27K\overline{\phi} \qquad \text{(c3)}
\end{aligned}$$

El sistema formado por las ecuaciones (a3), (b3) y (c3) es un sistema simétrico que se resuelve para dar:

$$\begin{aligned}
\phi_A &= -\frac{1}{69}\frac{pl^2}{K} \quad ; \quad \phi_B = \frac{11}{552}\frac{pl^2}{K}\\
\overline{\phi} &= \frac{1}{138}\frac{pl^2}{K} \quad ; \quad u_A = u_B = \overline{\phi}\,l
\end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones elásticas, se tiene:

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= +\frac{3}{46}pl^2 \quad ; \quad M_{AC} = -M_{AB}\\
M_{BA} &= -\frac{3}{92}pl^2 \quad ; \quad M_{BD} = -M_{BA}
\end{aligned}$$

Pueden calcularse también los giros en las articulaciones imponiendo que el momento en dichos extremos sea nulo:

$$\begin{aligned}\phi_C &= -\frac{1}{2}\phi_A + \frac{3}{2}\overline{\phi} &= \frac{5}{276}\frac{pl^2}{K} \\ \phi_D &= -\frac{1}{2}\phi_B + \frac{3}{2}2\overline{\phi} &= \frac{13}{1104}\frac{pl^2}{K}\end{aligned}$$

Las reacciones son (Figura 7.26 para nomenclatura y sentidos):

$$H_C = H_D = \frac{M_{BD}}{l/2} = \frac{3}{46}\,pl$$

$$V_C = \frac{49}{92}\,pl \quad ; \quad V_D = \frac{43}{92}\,pl$$

Las leyes de momentos flectores, esfuerzos axiles y cortantes y la deformada de la estructura pueden verse en la Figura 7.26.

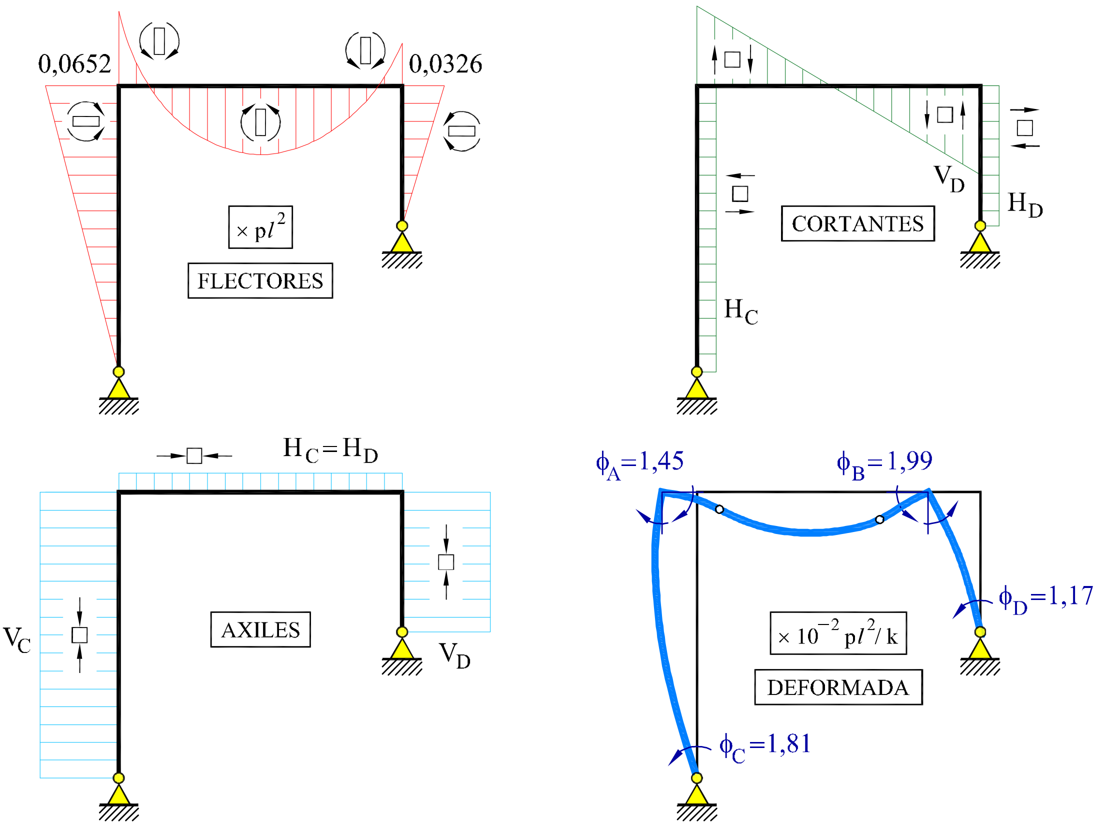


Fig. 7.26: Leyes de esfuerzos y deformada del pórtico del Ejemplo 7.6.2.1

Ejemplo 7.6.2.2

Resolver el pórtico doble de la Figura 7.27 mediante el método de rigidez.

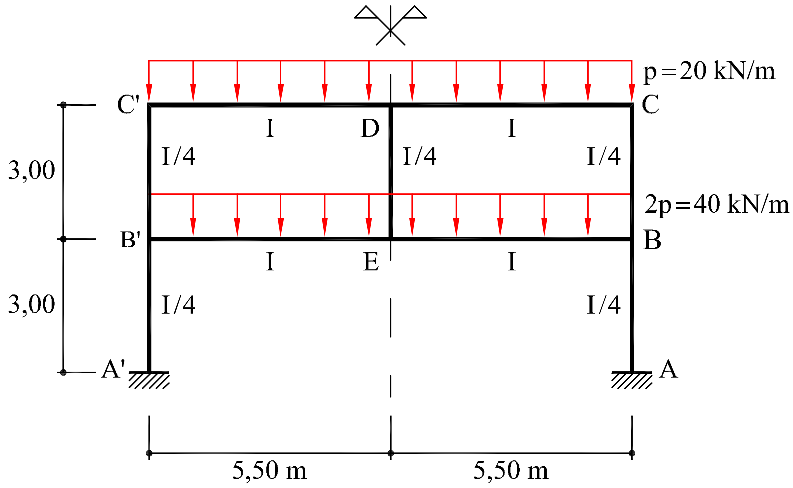


Fig. 7.27: Pórtico del Ejemplo 7.6.2.2

Teniendo en cuenta la simetría, el grado de hiperestatismo de la estructura es 5 (Figura 7.28a). Si se resuelve por el método de equilibrio son necesarias 3 incógnitas: los giros ϕ_B y ϕ_C de los nudos B y C y el descenso v de los nudos D y E (que es idéntico, en virtud de la hipótesis de inextensibilidad de la barra DE). Por simetría, los nudos D y E no giran.

Llamaremos $K = (EI/5,5)$ a la rigidez de los dinteles y $K' = (EI/4)/3,0$ a la rigidez de los soportes. Llamaremos $\overline{\phi} = (v/5,5)$ al giro de sólido rígido de los dinteles. Los momentos en los extremos de las barras son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
M_{AB} &= 2K'(2\phi_A + \phi_B) &= 0,916\, K\phi_B \\
M_{BA} &= 2K'(2\phi_B + \phi_A) &= 1,833\, K\phi_B \\
M_{BC} &= 2K'(2\phi_B + \phi_C) &= 1,833\, K\phi_B + 0,916\, K\phi_C \\
M_{CB} &= 2K'(2\phi_C + \phi_B) &= 0,916\, K\phi_B + 1,833\, K\phi_C
\end{aligned}
$$

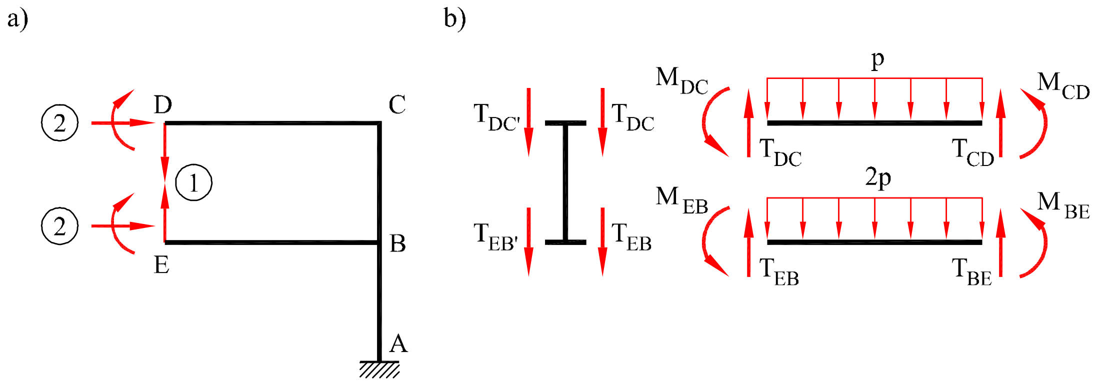


Fig. 7.28: Ejemplo 7.6.2.2: (a) Grado de hiperestatismo. (b) Ecuación de cortantes

$$
\begin{aligned}
M_{CD} &= 2K(2\phi_C + \phi_D) - 6K\overline{\phi} - 20\frac{(5,5)^2}{12} &= 4K\phi_C - 6K\overline{\phi} - 50,4 \\
M_{DC} &= 2K(2\phi_D + \phi_E) - 6K\overline{\phi} + 20\frac{(5,5)^2}{12} &= 2K\phi_C - 6K\overline{\phi} + 50,4 \\
M_{BE} &= 2K(2\phi_B + \phi_E) - 6K\overline{\phi} - 40\frac{(5,5)^2}{12} &= 4K\phi_B - 6K\overline{\phi} - 100,8 \\
M_{EB} &= 2K(2\phi_E + \phi_B) - 6K\overline{\phi} + 40\frac{(5,5)^2}{12} &= 2K\phi_B - 6K\overline{\phi} + 100,8
\end{aligned}
$$

Se pueden escribir ahora las ecuaciones de equilibrio necesarias:

(a) Equilibrio en el nudo B: $\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = 0$

$$7,666\,K\phi_B + 0,9166K\phi_C - 6\,K\overline{\phi} = 100,8 \qquad \text{(a4)}$$

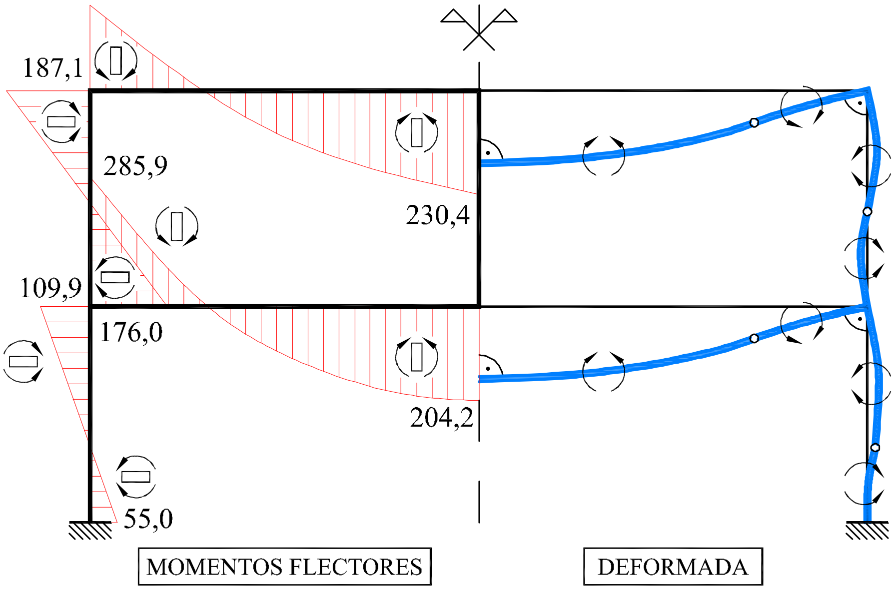
(b) Equilibrio en el nudo C: $\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD} = 0$

$$0,9166\,K\phi_B + 5,833\,K\phi_C - 6\,K\overline{\phi} = 50,4 \qquad \text{(b4)}$$

(c) Equilibrio de esfuerzos cortantes (Figura 7.28b), teniendo en cuenta que, por simetría, $T_{DC'} = T_{DC}$ y $T_{EB'} = T_{EB}$:

$$
\begin{aligned}
T_{DC} + T_{EB} &= 0 \\
\left(\frac{1}{2}\,(5,5\cdot 20) + \frac{M_{DC}+M_{CD}}{5,5}\right) + \left(\frac{1}{2}\,(5,5\cdot 40) + \frac{M_{EB}+M_{BE}}{5,5}\right) &= 0 \\
-6\,K\phi_B - 6\,K\phi_C + 24\,K\overline{\phi} &= 907,5 \qquad \text{(c4)}
\end{aligned}
$$

a)



b)

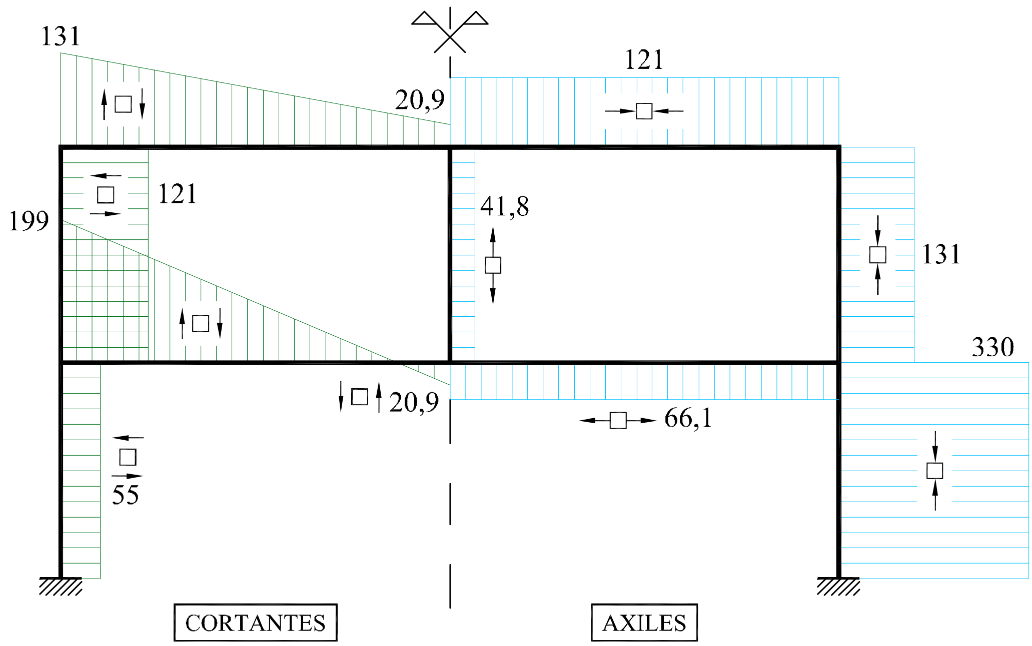


Fig. 7.29: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 7.6.2.2

Resolviendo las ecuaciones (a4), (b4) y (c4) (obsérvese que el sistema de ecuaciones obtenido es simétrico) se tiene:

$$K\,\phi_B = 59,95 \text{ kN·m} \quad ; \quad K\,\phi_C = 72,06 \text{ kN·m} \quad ; \quad K\,\overline{\phi} = 70,82 \text{ kN·m}$$

Los valores de los momentos de extremidad son iguales a:

$$\begin{array}{rclcrcl} M_{AB} & = & +55,0 \text{ kN·m} & ; & M_{BA} & = & +109,9 \text{ kN·m} \\ M_{BC} & = & +176,0 \text{ kN·m} & ; & M_{CB} & = & +187,1 \text{ kN·m} \\ M_{CD} & = & -187,1 \text{ kN·m} & ; & M_{DC} & = & -230,4 \text{ kN·m} \\ M_{BE} & = & -285,9 \text{ kN·m} & ; & M_{EB} & = & -204,2 \text{ kN·m} \end{array}$$

Con estos resultados, se tiene que $T_{EB} = -T_{DC} = 20,91$ kN. Por lo tanto, la barra DE trabaja a un axil de *tracción* de $N_{DE} = 20,91 \cdot 2 = 41,82$ kN.

Las leyes de esfuerzos y la deformada a estima de la estructura se muestran en la Figura 7.29.

Ejemplo 7.6.2.3

Resolver por el método de rigidez la pasarela de la Figura 7.30a sometida a la acción de una carga puntual P en el nudo B.

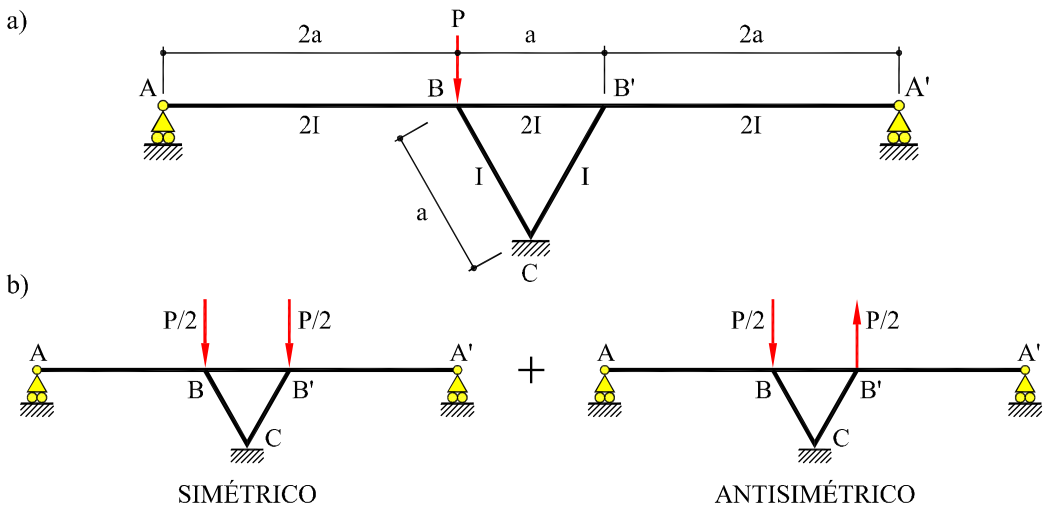


Fig. 7.30: (a) Pasarela del Ejemplo 7.6.2.3 (b) Descomposición del estado de carga

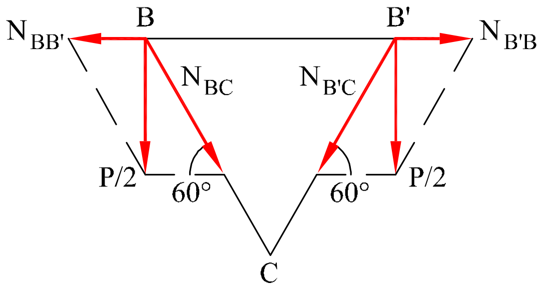


Fig. 7.31: Axiles en el estado simétrico del Ejemplo 7.6.2.3

La estructura es simétrica de forma y, por tanto, el estado de carga puede descomponerse en suma de un estado simétrico y uno antisimétrico (Figura 7.30b).

El estado simétrico es intraslacional y con cargas sólo en los nudos, luego admite una solución en la que aparecen sólo axiles (Figura 7.31).

$$N_{BA} = 0$$

$$N_{BC} = \frac{P}{2}\frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{P}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{P}{\sqrt{3}} \qquad \text{(compresión)}$$

$$N_{BB'} = \frac{P}{2}\frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{P}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{P}{2\sqrt{3}} \qquad \text{(tracción)}$$

En la solución del estado antisimétrico pueden utilizarse las simplificaciones pertinentes para analizar sólo media estructura. La estructura a resolver se muestra en la Figura 7.32. Se observa que, al ser móviles los apoyos en A y O, no hay en ellos reacción horizontal alguna; esto quiere decir que, para cargas verticales, la fuerza reacción en C tiene sólo componente vertical.

Como puede observarse, la estructura es una vez traslacional, ya que el nudo B pude sufrir un desplazamiento d, en la dirección perpendicular a la barra BC. Los desplazamientos horizontales de los nudos A y O son iguales a la proyección horizontal de d, es decir, $u_A = u_O = d \cos 30 = \left(\sqrt{3}/2\right) d$.

Al estar articulados los nudos A y O, los correspondientes giros ϕ_A y ϕ_O no aparecen en las ecuaciones elásticas, ya que pueden calcularse *a posteriori*. Se toma, por tanto, como único giro incógnita ϕ_B. Además, se toma como incógnita el giro $\overline{\phi}_{BC} = \overline{\phi} = d/a$.

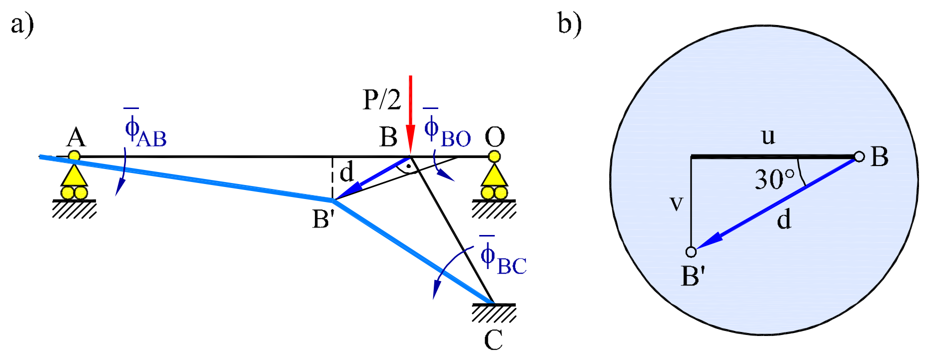


Fig. 7.32: (a) Movimientos de la pasarela del Ejemplo 7.6.2.3 (b) detalle

Como se ve en la Figura 7.32a, debido al desplazamiento del nudo B, las tres barras sufren giros de sólido rígido de valores:

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}_{AB} &= -\frac{v_B}{2a} = -\frac{d\sin 30}{2a} = -\frac{1}{4}\overline{\phi} \\
\overline{\phi}_{BC} &= +\frac{d}{a} = +\overline{\phi} \\
\overline{\phi}_{BO} &= +\frac{v_B}{a/2} = +\frac{d\sin 30}{a/2} = +\overline{\phi}
\end{aligned}$$

Además, se definen las rigideces de las barras:

$$K_{AB} = \frac{E2I}{2a} = K \qquad K_{BC} = \frac{EI}{a} = K \qquad K_{BO} = \frac{E2I}{a/2} = 4K$$

Las ecuaciones elásticas de las barras son:

$$\begin{aligned}
M_{BA} &= 3K\,\phi_B - 3K\,\overline{\phi}_{AB} = 3K\,\phi_B + \frac{3}{4}K\,\overline{\phi} \\
M_{BC} &= 2K\,(2\phi_B) - 6K\,\overline{\phi}_{BC} = 4K\,\phi_B - 6K\,\overline{\phi} \\
M_{CB} &= 2K\,\phi_B - 6K\,\overline{\phi}_{BC} = 2K\,\phi_B - 6K\,\overline{\phi} \\
M_{BO} &= 3\,(4K\,)\,\phi_B - 3\,(4K\,)\,\overline{\phi}_{BO} = 12K\,\phi_B - 12K\,\overline{\phi}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio que se plantean son:

(a) Equilibrio de momentos en B: $\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC} + M_{BO}$

$$19K\phi_B - \frac{69}{4}K\,\overline{\phi} = 0$$

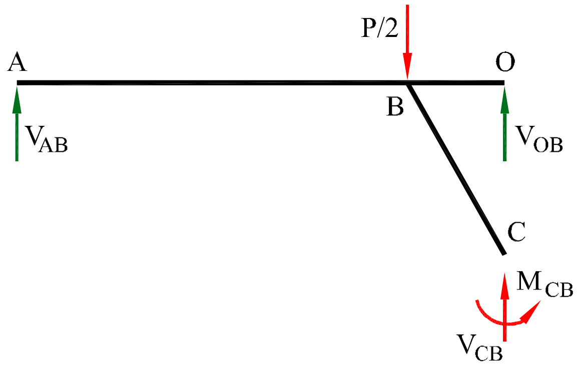


Fig. 7.33: Fuerzas y momentos sobre la pasarela del Ejemplo 7.6.2.3

(b) Equilibrio de fuerzas verticales (Figuras 7.33 y 7.34):

$$\begin{aligned}\frac{P}{2} &= V_{AB} + V_{CB} + V_{OB} \\ &= \frac{M_{BA}}{2a} - \frac{M_{BC} + M_{CB}}{a/2} - \frac{M_{BO}}{a/2}\end{aligned}$$

de donde:

$$-\frac{69}{4}K\phi_B + \frac{387}{16}K\overline{\phi} = \frac{Pa}{4} \qquad \text{(b5)}$$

El sistema formado por las ecuaciones (a5) y (b5) es un sistema simétrico que se

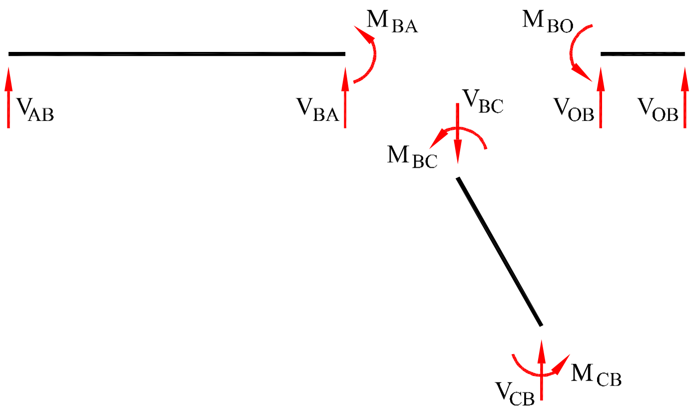


Fig. 7.34: Fuerzas y momentos en las piezas del Ejemplo 7.6.2.3

resuelve para dar:

$$\phi_B = \frac{23}{864}\frac{Pa}{K} \qquad ; \qquad \overline{\phi} = \frac{19}{648}\frac{Pa}{K}$$

Sustituyendo en las ecuaciones elásticas, se tiene:

$$\begin{array}{rclcrcl} M_{BA} & = & +0,1018\,Pa & ; & M_{BC} & = & -0,0694\,Pa \\ M_{CB} & = & -0,1228\,Pa & ; & M_{BO} & = & -0,0324\,Pa \end{array}$$

Pueden calcularse también los giros en las articulaciones imponiendo que el momento en dichos extremos sea nulo:

$$\begin{array}{rclcl} \phi_A & = & -\frac{1}{2}\phi_B + \frac{3}{2}\overline{\phi}_{AB} & = & -0,0243\,\frac{Pa}{K} \\ \phi_O & = & -\frac{1}{2}\phi_B + \frac{3}{2}\overline{\phi}_{BO} & = & +0,0307\,\frac{Pa}{K} \end{array}$$

Las leyes de esfuerzos y la deformada a estima de la estructura pueden verse en la Figuras 7.35 y 7.36. Obsérvese que las leyes de esfuerzos se obtienen superponiendo las correspondientes a los estados simétrico y antisimétrico supuestos.

Dado que la estructura que se resuelve es una vez traslacional, para resolverla es necesario plantear una ecuación de equilibrio de fuerzas o *ecuación de cortantes*. En este caso, se ha planteado el equilibrio de fuerzas verticales sobre el dintel (barras AB y BO), para obtener la Ec. (b5). Naturalmente, la selección de esta ecuación de cortantes no es única. A partir de la Figura 7.33, pueden plantearse otras ecuaciones de equilibrio; así, por ejemplo:

(b5.1) Equilibrio de momentos respecto del punto A:

$$M_{CB} + (V_{CB} + V_{OB})\,\frac{5a}{2} = \frac{P}{2}2a$$

(b5.2) Equilibrio de momentos respecto del punto C:

$$M_{CB} = V_{AB}\frac{5a}{2} - \frac{P}{2}\frac{a}{2}$$

Se puede comprobar que la solución obtenida utilizando las ecuaciones de cortantes anteriores es, naturalmente, idéntica a la obtenida utilizando la Ec. (b5).

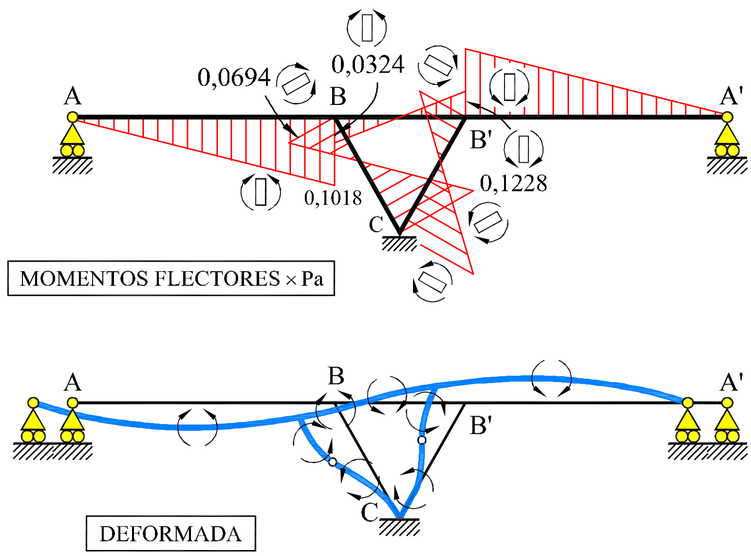


Fig. 7.35: Ley de flectores y deformada del Ejemplo 7.6.2.3

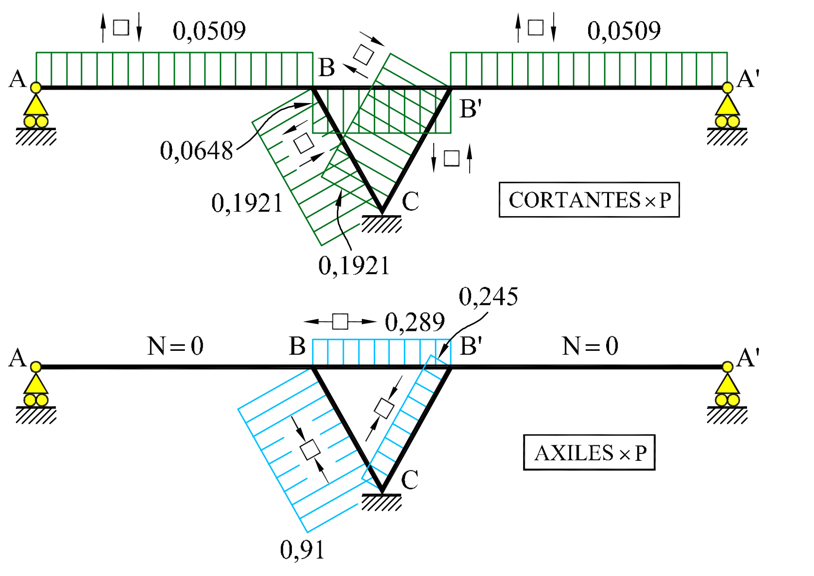


Fig. 7.36: Leyes de: (a) cortantes y (b) axiles del Ejemplo 7.6.2.3

Ejemplo 7.6.2.4

Resolver la estructura de la Figura 7.37 sometida a la carga uniformemente repartida $p = 15\,\mathrm{kN/m}$. La rigidez EI es igual para todas las barras.

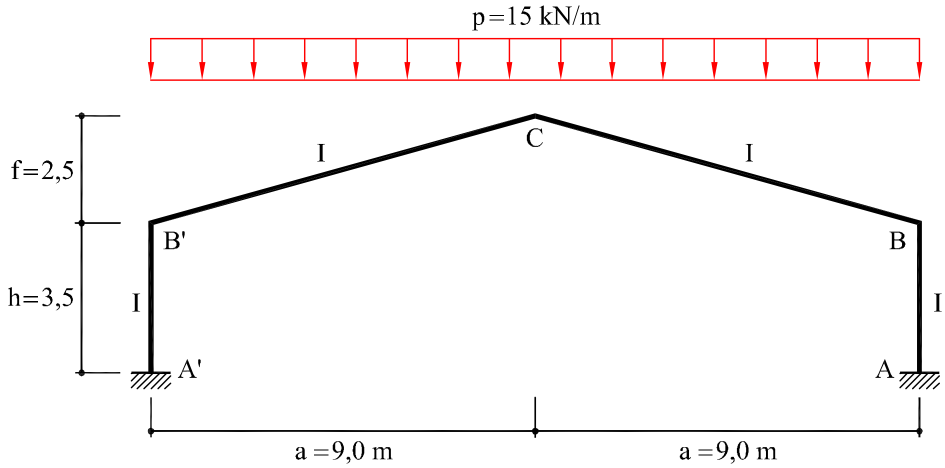


Fig. 7.37: Pórtico del Ejemplo 7.6.2.4

La estructura es simétrica de forma y también lo es el caso de carga aplicado, por lo que se considera sólo la mitad derecha de cara a la resolución. Al estar el punto A empotrado, $\phi_A = 0$. Además, por simetría, $\phi_C = 0$. Por tanto, el único giro de nudo incógnita es el del nudo B, ϕ_B.

Por efecto del empuje que las barras inclinadas hacen sobre los soportes, los extremos superiores de éstos experimentan un desplazamiento horizontal $BB_1 = u_B$, mientras que el nudo C sufre sólo un desplazamiento vertical (por simetría) $CC_1 = v_C$. Estos dos movimientos están relacionados por la condición de inextensibilidad de la barra BC, tal como se muestra en la Figura 7.38.

En efecto, la barra BC gira alrededor de un punto O que es el centro instantáneo de rotación de la barra. El punto O se halla trazando la perpendicular al movimiento CC_1 por C y la perpendicular al movimiento BB_1 por B. Por definición de centro instantáneo de rotación, el ángulo $\widehat{COC_1} = \overline{\phi}$ y el ángulo $\widehat{BOB_1} = \overline{\phi}$ son iguales, y por tanto, la barra BC gira un ángulo $\overline{\phi}$. Por su parte, debido al desplazamiento del nudo B, la barra AB gira un ángulo $\overline{\varphi} = -\left(u_B/h\right) = -\left(f/h\right)\overline{\phi}$; por tanto, basta tomar $\overline{\phi}$ como incógnita debida a la traslacionalidad de la estructura.

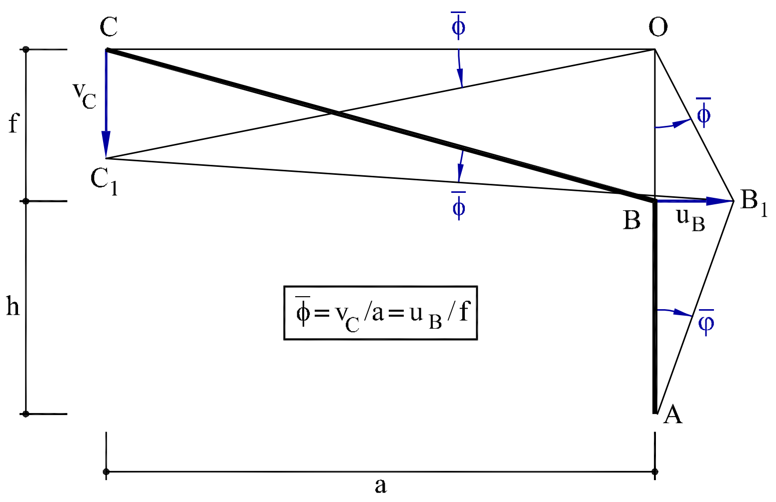


Fig. 7.38: Ejemplo 7.6.2.4: traslacionalidad

En resumen, todos los momentos en los extremos de las barras se pueden poner en función del giro del nudo B, ϕ_B, y del citado ángulo $\overline{\phi}$:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2K_{AB}\,\phi_B - 6K_{AB}\left(-\frac{f}{h}\overline{\phi}\right) \\ M_{BA} &= 2K_{AB}(2\phi_B) - 6K_{AB}\left(-\frac{f}{h}\overline{\phi}\right) \\ M_{BC} &= 2K_{BC}(2\phi_B) - 6K_{BC}\overline{\phi} + M^o_{BC} \\ M_{CB} &= 2K_{BC}\,\phi_B - 6K_{BC}\overline{\phi} + M^o_{CB} \end{aligned}$$

Llamando $K_{AB} = K$; $K_{BC} = 0{,}375\,K$ y $M^o_{CB} = -M^o_{BC} = \left(pa^2/12\right) = 101{,}25\,\text{kN·m}$, se tiene:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2{,}00\ K\phi_B + 4{,}286\ K\overline{\phi} \\ M_{BA} &= 4{,}00\ K\phi_B + 4{,}286\ K\overline{\phi} \\ M_{BC} &= 1{,}50\ K\phi_B - 2{,}250\ K\overline{\phi} - 101{,}25 \\ M_{CB} &= 0{,}75\ K\phi_B - 2{,}250\ K\overline{\phi} + 101{,}25 \end{aligned}$$

El equilibrio de fuerzas y momentos se considera en la Figura 7.39. Por simetría, $V_C = 0$ y entonces $V_A = pa$.

Las ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas ϕ_B y $\overline{\phi}$ son:

(a) Equilibrio de momentos en el nudo B:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

(b) Equilibrio de fuerzas horizontales (Figuras 7.39a y b):

$$H_{AB} = H_{CB}$$

o sea,

$$\frac{1}{h}\left(M_{AB} + M_{BA}\right) = \frac{1}{f}\left(M_{BC} + M_{CB} + \frac{1}{2}pa^2\right)$$

Sustituyendo las expresiones adecuadas, se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5,500\, K\phi_B + \;\; 2,036 K\overline{\phi} &= 101,25 \\ 2,036\, K\phi_B + 10,623\, K\overline{\phi} &= 607,50 \end{aligned}$$

y resolviendo:

$$K\phi_B = -2,9714\,\text{kN·m} \qquad ; \qquad K\overline{\phi} = 57,756\,\text{kN·m}$$

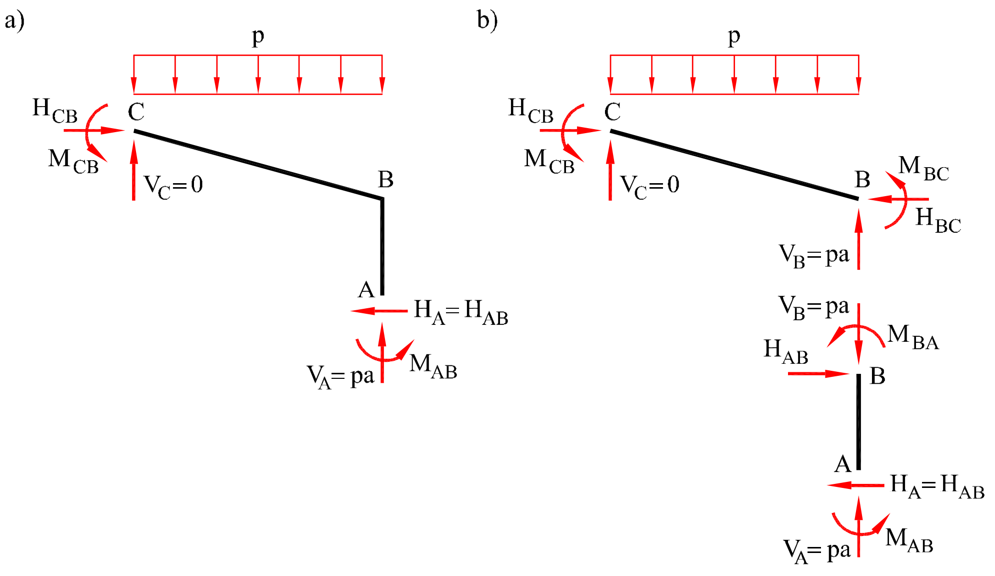


Fig. 7.39: Fuerzas y momentos: (a) en la estructura y (b) en las piezas

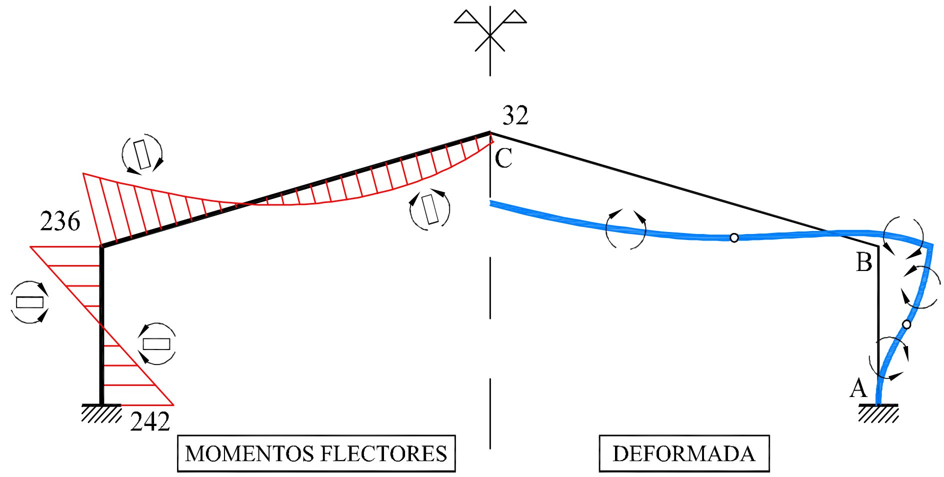


Fig. 7.40: Ley de flectores y deformada del Ejemplo 7.6.2.4

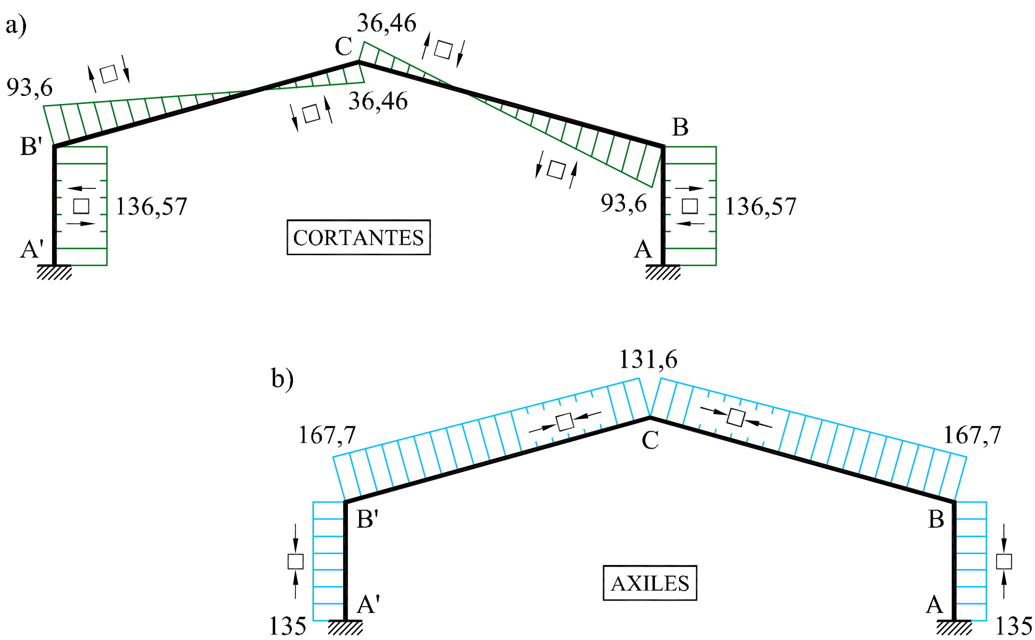


Fig. 7.41: Leyes de cortantes y axiles del Ejemplo 7.6.2.4

y por tanto:

$$\begin{array}{rclcrcl} M_{AB} & = & +242 \text{ kN}\cdot\text{m} & ; & M_{BA} & = & +236 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{BC} & = & -236 \text{ kN}\cdot\text{m} & ; & M_{CB} & = & -31 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array}$$

Las leyes de esfuerzos y la deformada a estima de la estructura pueden verse en la Figuras 7.40 y 7.41.

Para los valores $E = 210\,\text{GPa}$, $I = 23.130 \text{ cm}^4$ (IPE 400), resulta $K = EI/h = 13.878\,\text{kN}\cdot\text{m}$ y se tiene:

$$u_B = f\,\overline{\phi} = 1,041.10^{-2}\,\text{m}$$

7.6.3 Movimientos y deformaciones impuestos

Para determinar las reacciones y esfuerzos producidos en un pórtico hiperestático por efecto de los movimientos y/o deformaciones impuestos se puede utilizar el Método de Equilibrio, siguiendo un procedimiento análogo al descrito en los Ejemplos precedentes. Simplemente, hay que incluir, al plantear las ecuaciones elásticas de las barras que componen la estructura, los términos correspondientes a los movimientos de los nudos motivados por las acciones consideradas. Se plantean y resuelven, a continuación, dos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 7.6.3.1

Resolver el pórtico biarticulado de la Figura 7.42, cuando los apoyos C y D sufren movimientos horizontales simétricos, de valor u y sentido tal que la distancia CD se acorta. Todas las barras tienen la misma rigidez a flexión EI.

La estructura es simétrica y también lo son los movimientos impuestos considerados. Por simetría, el giro del nudo B es de igual magnitud y opuesto al del nudo A, luego $\phi_B = -\phi_A$. Análogamente, $\phi_D = -\phi_C$. Además, como el nudo C está articulado, el giro ϕ_C puede calcularse a posteriori, imponiendo que el momento $M_{CA} = 0$.

Los nudos A y B no se mueven, y los movimientos de los nudos C y D son conocidos. Por consiguiente, la única incógnita cinemática es ϕ_A.

Definiendo $K = EI/l$ y $\overline{\phi} = u/l$, se pueden escribir las ecuaciones elásticas necesarias para resolver el problema:

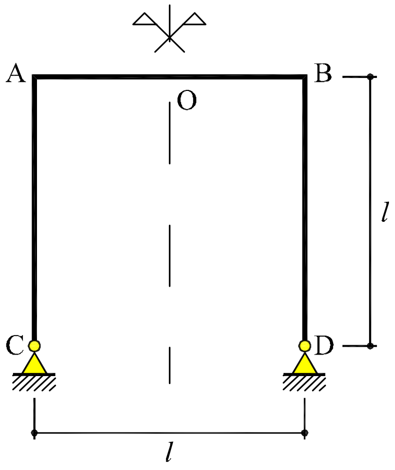


Fig. 7.42: Pórtico del Ejemplo 7.6.3.1

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= 2K(2\phi_A + \phi_B) = +2K\phi_A \\
M_{BA} &= 2K(\phi_A + 2\phi_B) = -2K\phi_A \\
M_{AC} &= 3K\phi_A - 3K\overline{\phi} \\
M_{BD} &= 3K\phi_B + 3K\overline{\phi} = -3K\phi_A + 3K\overline{\phi}
\end{aligned}$$

Nótese que en las barras AC y BD se han usado las ecuaciones correspondientes a barras empotrado-articuladas.

La ecuación de equilibrio de momentos en A que resuelve el problema es:

$$\sum M_A = 0 = M_{AB} + M_{AC}$$

La ecuación de equilibrio de momentos en B resulta en la misma ecuación, por simetría. Sustituyendo las ecuaciones elásticas correspondientes y resolviendo la ecuación de equilibrio resultante:

$$5K\phi_A - 3K\overline{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_A = \frac{3}{5}\overline{\phi} = \frac{3}{5}\frac{u}{l} = -\phi_B$$

y el problema queda resuelto. Sustituyendo el valor de ϕ_A en las ecuaciones elásticas, se tienen los momentos de extremo de barra:

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= +\frac{6}{5}K\frac{u}{l} \quad ; \quad M_{BA} = -M_{AB} = -\frac{6}{5}K\frac{u}{l} \\
M_{AC} &= -\frac{6}{5}K\frac{u}{l} \quad ; \quad M_{BD} = -M_{AC} = +\frac{6}{5}K\frac{u}{l}
\end{aligned}$$

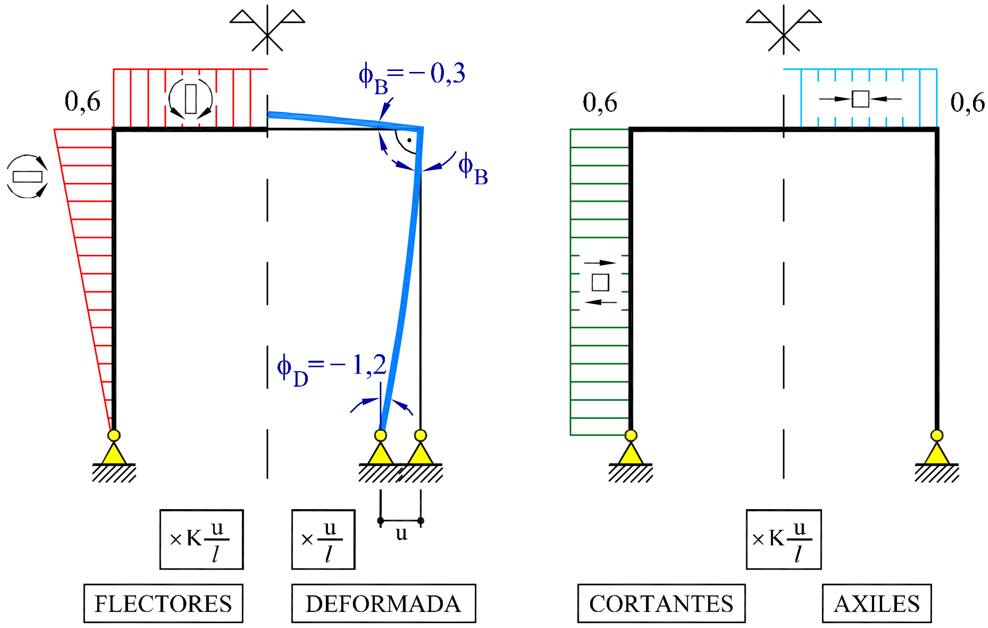


Fig. 7.43: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 7.6.3.1

El giro en las articulaciones se puede calcular imponiendo que el momento en dichos extremos es nulo, y resulta:

$$\phi_C = -\frac{1}{2}\phi_A + \frac{3}{2}\overline{\phi} = \frac{6}{5}\frac{u}{l} \qquad ; \qquad \phi_D = -\phi_C$$

Las leyes de momentos flectores, esfuerzos axiles y cortantes, así como la deformada a estima, pueden verse en la Figura 7.43.

Ejemplo 7.6.3.2

Resolver el pórtico biarticulado de la Figura 7.44, cuando todas las barras sufren un incremento de temperatura Δt, uniforme a través del espesor. Todas las barras tienen la misma rigidez a flexión EI.

Al estar articulados los nudos C y D, los correspondientes giros ϕ_C y ϕ_D no aparecen en las ecuaciones elásticas, ya que pueden calcularse a *posteriori*. Se toman, por tanto, como giros incógnitas ϕ_A y ϕ_B.

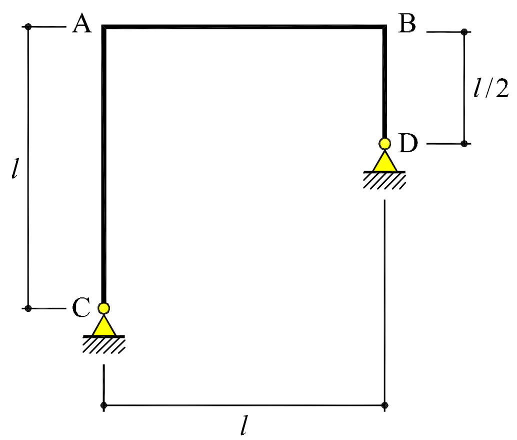


Fig. 7.44: Pórtico del Ejemplo 7.6.3.2

Los alargamientos de las barras debidas al incremento térmico son:

$$\begin{aligned}\Delta l_{AB} &= l\alpha\Delta t\\ \Delta l_{AC} &= l\alpha\Delta t\\ \Delta l_{BD} &= \frac{l}{2}\alpha\Delta t\end{aligned}$$

donde α es el coeficiente de dilatación térmica del material. Por tanto, conocemos a *priori* los movimientos:

$$v_A = l\alpha\Delta t \qquad ; \qquad v_B = \frac{l}{2}\alpha\Delta t$$

y asimismo,

$$v_A - v_B = \delta_v = \frac{l}{2}\alpha\Delta t \qquad ; \qquad u_A - u_B = l\alpha\Delta t$$

donde se supone, en principio, que tanto u_A como u_B son positivos hacia la izquierda. En función de éstos, se definen los giros de las barras debidos a los incrementos térmicos:

$$\begin{aligned}\overline{\phi}_{AB} &= -\frac{\delta_v}{l} = -\frac{1}{2}\alpha\Delta t\\ \overline{\phi}_{AC} &= +\frac{u_A}{l} = \overline{\phi}\\ \overline{\phi}_{BD} &= +\frac{u_B}{l/2} = \frac{2}{l}(u_A - l\alpha\Delta t) = 2\overline{\phi} - 2\alpha\Delta t\end{aligned}$$

Definiendo $K = EI/l$, se tiene que las rigideces de las barras son: $K_{AB} = K_{AC} = K$ y $K_{BD} = 2K$. Ahora se pueden escribir las ecuaciones elásticas de las barras en función de los ángulos ϕ_A, ϕ_B y $\overline{\phi}$:

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= 2K(2\phi_A + \phi_B) - 6K(-\frac{1}{2}\alpha\Delta t) &&= 4K\phi_A + 2K\phi_B + 3K\alpha\Delta t \\
M_{BA} &= 2K(\phi_A + 2\phi_B) - 6K(-\frac{1}{2}\alpha\Delta t) &&= 2K\phi_A + 4K\phi_B + 3K\alpha\Delta t \\
M_{AC} &= 3K\phi_A - 3K\overline{\phi} \\
M_{BD} &= 3(2K)\phi_B - 3(2K)\left(2\overline{\phi} - 2\alpha\Delta t\right) &&= 6K\phi_B - 12K\overline{\phi} + 12K\alpha\Delta t
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio que se plantean son (Ejemplo 7.6.2.1):

(a) Equilibrio de momentos en A: $\sum M_A = 0 = M_{AC} + M_{AB}$

$$7K\phi_A + 2K\phi_B - 3K\overline{\phi} = -3K\alpha\Delta t \qquad \text{(a7)}$$

(b) Equilibrio de momentos en B: $\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BD}$

$$2K\phi_A + 10K\phi_B - 12K\overline{\phi} = -15K\alpha\Delta t \qquad \text{(b7)}$$

(c) Equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\begin{aligned}
0 &= T_{CA} + T_{DB} = \frac{M_{AC}}{l} + \frac{M_{BD}}{l/2} \\
0 &= M_{AC} + 2M_{BD} \\
24K\alpha\Delta t &= -3K\phi_A - 12K\phi_B + 27K\overline{\phi} \qquad \text{(c7)}
\end{aligned}$$

El sistema formado por las ecuaciones (a7), (b7) y (c7) es un sistema simétrico que se resuelve para dar:

$$\phi_A = \frac{1}{23}\alpha\Delta t \quad ; \quad \phi_B = -\frac{43}{46}\alpha\Delta t \quad ; \quad \overline{\phi} = \frac{11}{23}\alpha\Delta t$$

y entonces:

$$u_A = \overline{\phi} l = \frac{11}{23} l\alpha\Delta t \quad (\leftarrow) \quad ; \quad u_B = u_A - l\alpha\Delta t = -\frac{12}{23} l\alpha\Delta t \quad (\rightarrow)$$

Sustituyendo en las ecuaciones elásticas, se tiene:

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= +\frac{30}{23}K\alpha\Delta t \quad ; \quad M_{AC} = -M_{AB} \\
M_{BA} &= -\frac{15}{23}K\alpha\Delta t \quad ; \quad M_{BD} = -M_{BA}
\end{aligned}$$

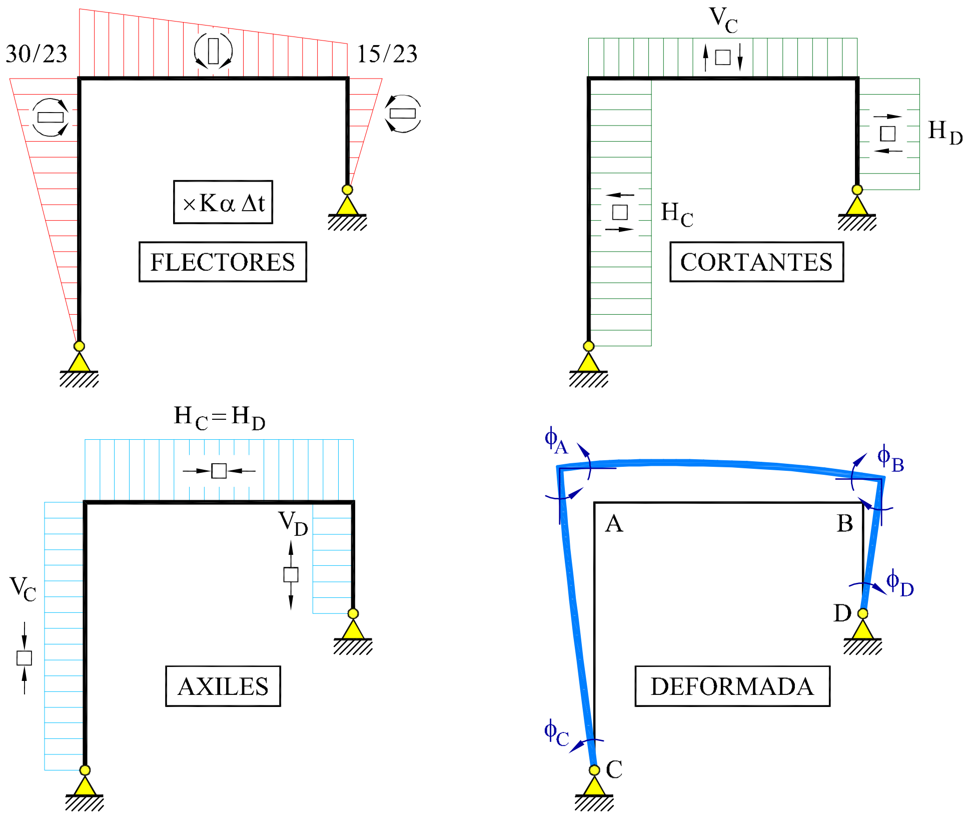


Fig. 7.45: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 7.6.3.2

Pueden calcularse también los giros en las articulaciones imponiendo que el momento en dichos extremos sea nulo:

$$\begin{aligned}\phi_C &= -\frac{1}{2}\phi_A + \frac{3}{2}\overline{\phi} &&= +\frac{16}{23}\alpha\Delta t\\ \phi_D &= -\frac{1}{2}\phi_B + \frac{3}{2}\left(2\overline{\phi} - 2\alpha\Delta t\right) &&= -\frac{101}{92}\alpha\Delta t\end{aligned}$$

Las reacciones son (ver Figura 7.45 para nomenclatura y sentidos):

$$\begin{aligned}H_C &= H_D = \frac{30}{23}\frac{K}{l}\alpha\Delta t\\ V_C &= V_D = \frac{15}{23}\frac{K}{l}\alpha\Delta t\end{aligned}$$

Las leyes de momentos flectores, esfuerzos axiles y cortantes y la deformada a estima de la estructura pueden verse en la Figura 7.45.

8 Estructuras Articuladas

8.1 Introducción

A partir de la segunda mitad del siglo XX, la utilización del ordenador digital produce una rápida evolución en la investigación de muchas ramas de la ciencia y de la técnica, dando lugar a procedimientos "numéricos", adecuados para el uso de los mismos. En el campo del Análisis de Estructuras el ordenador ha llevado de forma natural al desarrollo del *cálculo matricial* de estructuras.

A finales del siglo XX, la rápida generalización del uso de los ordenadores personales hace de éstos la herramienta básica de cálculo en ingeniería; los métodos de cálculo de estructuras por ordenador son hoy, por lo tanto, un elemento esencial en la enseñanza de la Mecánica de Estructuras. La aplicación de estos métodos permite: (1) formular una metodología de análisis *compacta* y basada en *principios generales,* (2) desarrollar procedimientos *prácticos* de análisis y, (3) organizar de forma *simple* los programas de ordenador de Cálculo de Estructuras.

Tanto el Método de Flexibilidad como el de Rigidez pueden plantearse de cara a su resolución automática. Sin embargo, el segundo cuenta con la importante ventaja sobre el primero de que su formulación es más sistemática. En la práctica, la casi totalidad de los programas actuales de Cálculo de Estructuras se basan en el *Método Directo de Rigidez.* Métodos más modernos y sofisticados de resolución de estructuras, como el Método de los Elementos Finitos, también se suelen formular como Métodos de Rigidez.

En este Capítulo se muestra la aplicación del Método Directo de Rigidez a la resolución de estructuras articuladas. Se plantean primero las bases del método, de forma general. Se muestra después, en detalle, su aplicación a estructuras articuladas planas y espaciales. En el siguiente Capítulo se abordará el estudio de estructuras reticuladas de plano medio, y la generalización a otras tipologías estructurales: emparrillados planos y estructuras reticuladas espaciales.

8.2 El Método Directo de Rigidez

El *Método Directo de Rigidez* es la formulación sistemática del Método de Rigidez, y se basa en los tres principios fundamentales de la Mecánica de Estructuras:

I. *Compatibilidad.* La deformación es una función continua y tiene un valor único en cada punto. En consecuencia, los movimientos también lo son y, en particular, los movimientos en los extremos de las piezas que concurren en un mismo nudo son idénticos para todas las piezas.

II. *Equilibrio.* Tanto la estructura globalmente como cada parte de la misma y, en particular, cada nudo y pieza de la misma están en equilibrio estático, bajo la acción de las fuerzas exteriores y de los esfuerzos internos.

III. *Linealidad y principio de superposición.* La estructura se comporta linealmente tanto a nivel local (relación tensión-deformación, según la Ley de Hooke y la hipótesis de pequeñas deformaciones), como a nivel global (relaciones desplazamiento-deformación y fuerzas-tensiones, según la Ley de Hooke y la hipótesis de pequeños movimientos). En virtud de esta linealidad, es válido el principio de superposición.

El esquema de resolución de una estructura según el Método Directo de Rigidez se detalla en la Figura 8.1. Como se observa, el proceso secuencial consiste en:

1. definir la geometría de la estructura, así como las condiciones de apoyo y las acciones,

2. identificar el número de movimientos incógnita que determinan la deformación de la estructura, a base de considerar las correspondientes condiciones de compatibilidad en los nudos,

3. resolver las piezas individuales, en función de los movimientos de sus extremos, a base de satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad en las piezas,

4. imponer las necesarias condiciones de equilibrio en los nudos,

5. imponer las condiciones de apoyo de la estructura,

6. determinar los movimientos incógnita, a base de resolver el sistema de ecuaciones resultante,

7. determinar los esfuerzos y reacciones en la estructura.

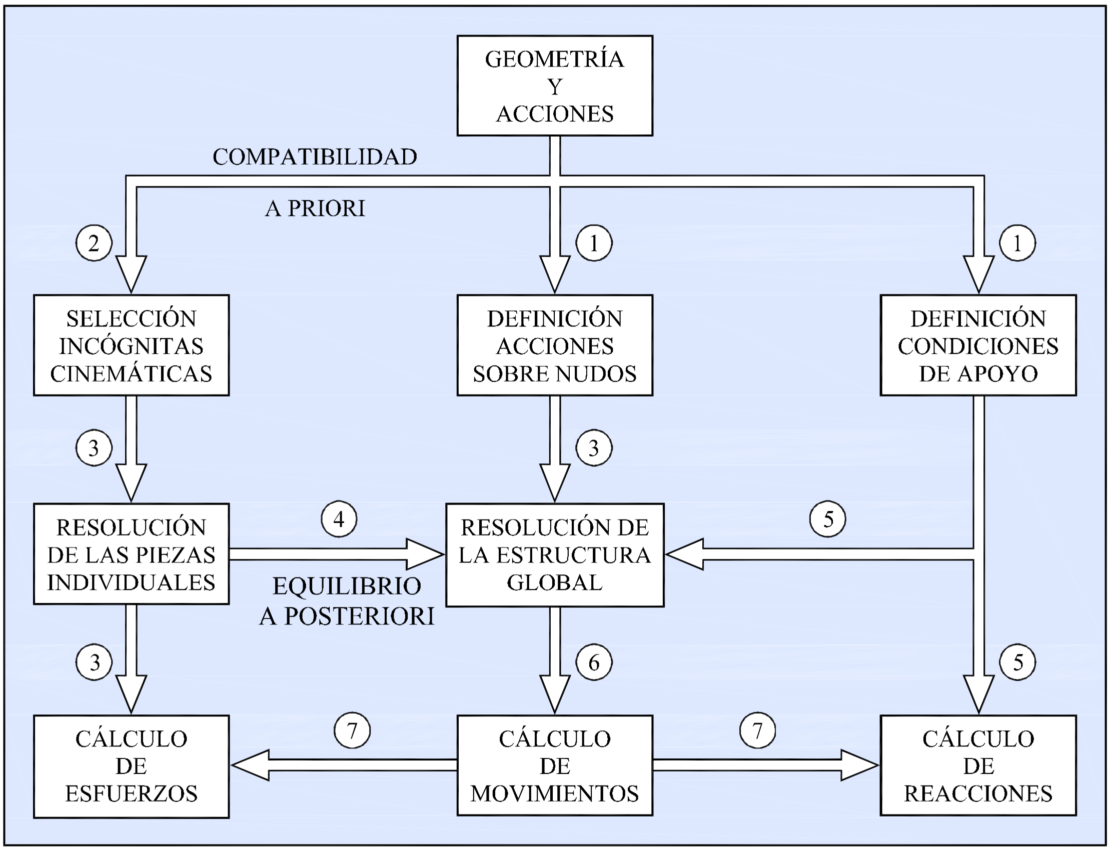


Fig. 8.1: El método directo de rigidez

Sobre este proceso cabe hacer algunas observaciones:

Obs 1. La definición de la geometría debe hacerse, necesariamente, de manera *digital*, para que se pueda operar con ella fácilmente de forma algorítmica. Deben definirse también, en forma general, las condiciones de apoyo. La definición de las acciones debe ser general, de manera que se puedan considerar la enorme variedad de cargas y acciones que pueden actuar sobre la estructura.

Obs 2. Se consideran como movimientos incógnita todos los movimientos desconocidos de los nudos de la estructura, es decir, que el número de incógnitas cinemáticas es:

$$\mathrm{k} = gl \cdot nn - ca \tag{8.1}$$

donde gl es el número de grados de libertad por nudo, nn es el número de nudos

de la estructura y ca es el número de grados de libertad prescritos por las condiciones de apoyo. En articuladas planas $gl = 2$, dos traslaciones en el plano de la estructura, en estructuras reticuladas de plano medio $gl = 3$, dos traslaciones en el plano de la estructura y un giro perpendicular a éste y en emparrillados planos $gl = 3$, dos giros en el plano de la estructura y un desplazamiento perpendicular a éste. En estructuras articuladas espaciales $gl = 3$, tres traslaciones en el espacio y en estructuras reticuladas espaciales $gl = 6$, tres traslaciones y tres giros (Figura 8.2).

Obs 3. No se desprecia la deformación por axil de las piezas, aunque sí suele despreciarse la deformación por cortante. Esto implica que hay que considerar, explícitamente, las ecuaciones elásticas referidas a los axiles y los movimientos longitudinales de los nudos de las piezas. A la matriz de coeficientes de rigidez de la forma matricial de las ecuaciones elásticas completas se le llama *matriz de rigidez de la pieza*.

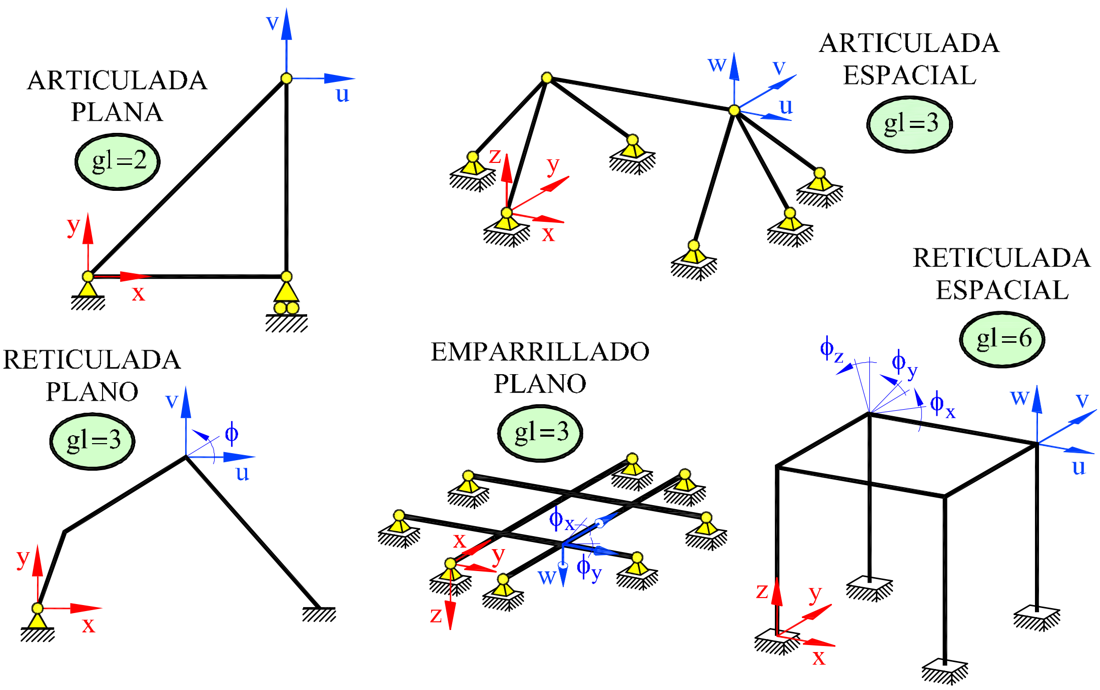


Fig. 8.2: Estructuras de barras: grados de libertad por nudo

Obs 4. Al tomar como incógnitas todos los movimientos de los nudos, es necesario plantear ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en todos los nudos. A este proceso, en el que se imponen de forma sistemática las condiciones de compatibilidad y equilibrio en todos los nudos, se le llama *"ensambaje" de la matriz de rigidez global*.

Obs 5. Al imponer las condiciones de apoyo, se identifican los movimientos prescritos y sus correspondientes reacciones incógnita.

Obs 6. Dado que el número de incógnitas del problema suele ser elevado, los sistemas de ecuaciones resultantes son grandes. Es preciso, por tanto, disponer de métodos robustos y potentes para el almacenaje y la resolución de sistemas lineales de ecuaciones.

Obs 7. Al calcular los esfuerzos y reacciones sobre la estructura, hay que tener en cuenta la definición original de las acciones, lo cual requiere, en general, una cierta elaboración posterior a la obtención de los movimientos.

8.3 Estructuras articuladas

Las estructuras articuladas son estructuras formadas por barras unidas entre sí mediante nudos articulados. Al tener ambos extremos articulados los momentos en los extremos de las piezas son nulos y, bajo cargas aplicadas en los nudos, las barras trabajan sólo a esfuerzo axil.

Las estructuras articuladas pueden ser *planas* cuando las directrices de las piezas que la componen están contenidas en el mismo plano y *espaciales* en caso contrario. En este capítulo se aborda en primer lugar el estudio de las estructuras articuladas planas y luego el de las espaciales.

Definición de la estructura

Una estructura de piezas rectas se define mediante una serie de líneas rectas, que representan las directrices de las piezas, unidas unas a otras en puntos que representan los nudos. Al definir dicha estructura, de cara a su análisis por ordenador, se utiliza la siguiente notación:

1. Cada nudo se identifica por un número. El orden de numeración de los nudos es, en principio, arbitrario. La posición de los nudos se define dando las coordenadas de éstos referidas a un sistema global de referencia.

2. Cada pieza de la estructura se identifica, también, por un número. El orden de numeración de las piezas es independiente del de los nudos y también arbitrario. En una pieza cualquiera, por ejemplo la k-ésima, que une los nudos "i" y "j", se denomina extremo "a" al de menor numeración y extremo "b" al opuesto. Se identifica como sentido positivo de una pieza al definido por la secuencia $a \to b$.

3. A cada pieza se le asigna un número identificador del "material" de la pieza. Definen el "material" de una pieza el conjunto de propiedades mecánicas (físicas y geométricas) que se precisan para definir el comportamiento de ésta. Así, para una pieza de una estructura articulada es necesario definir el módulo de elasticidad del material, E, y el área, A, de la sección de la pieza.

Así pues, la definición geométrica de la estructura se compone de tres listas de números: (a) lista de nudos y sus coordenadas, (b) lista de piezas, con sus conectividades nodales y la asignación del "material", y (c) lista de "materiales", con la especificación de sus propiedades mecánicas. Esta forma sistemática de referir los nudos y las piezas permite la definición digital (la única utilizable en el ordenador) de cualquier estructura, por compleja que ésta sea.

Además, es necesario definir las condiciones de apoyo. Esto se hace mediante otra lista en la que, nudo a nudo, se especifican los grados de libertad libres y los restringidos. Cada grado de libertad libre es una incógnita cinemática del problema. Por cada grado de libertad restringido se determinará la correspondiente reacción incógnita.

Como se observa, para definir las coordenadas de los nudos se precisa un sistema de referencia. También se precisa de sistemas de referencia adecuados para referir a ellos

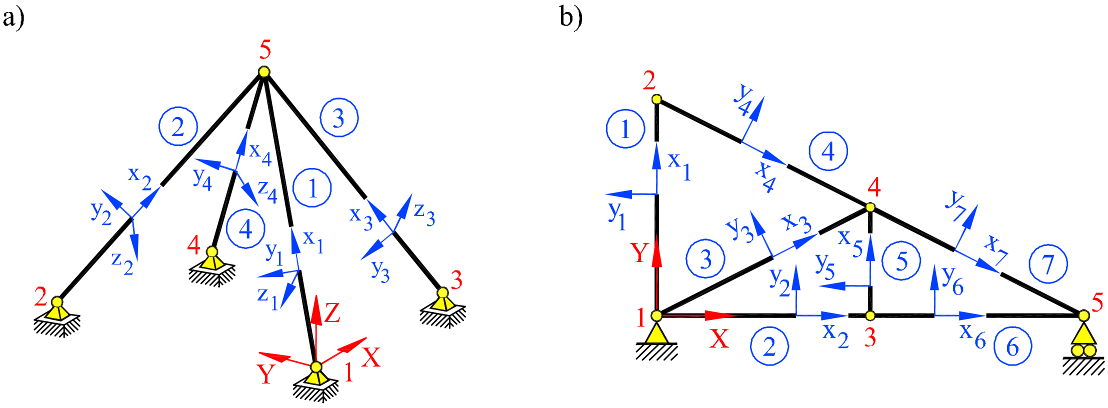


Fig. 8.3: Sistemas de referencia en estructuras articuladas: (a) espacial (b) plana

los movimientos de los nudos (libres y prescritos) y las fuerzas actuantes sobre éstos. Por tanto, se definen:

- un *sistema global de referencia*, es decir, un triedro dextrógiro al que nos referiremos como (X, Y, Z) (Figura 8.3a). Este sistema se usa para referir a él la geometría de la estructura, las fuerzas actuantes y los movimientos incógnita. Normalmente, el ensamblaje de las matrices y vectores de las piezas se hace en este sistema. En lo que sigue, denominaremos a este sistema (X, Y) y lo usaremos en estructuras articuladas planas (Figura 8.3b).

- El *sistema local de referencia* para cada pieza (x, y, z) (Figura 8.3a) se usa para referir a él, en determinados casos, los esfuerzos o movimientos vinculados a la pieza. En lo que sigue, y refiriéndonos a estructuras planas, denominaremos a este sistema (x_i, y_i), donde i (Figura 8.3a) indica la pieza en la que se define el correspondiente sistema local. El eje x_i tiene la dirección de la directriz de la pieza; el eje y_i es perpendicular al x_i.

Utilizaremos la notación $\mathbf{A}$, $\mathbf{v}$ para referirnos a matrices y vectores expresados en el sistema global y $\mathbf{A}'$, $\mathbf{v}'$ para referirnos a matrices y vectores expresados en un sistema local. También se emplearán letras minúsculas en negrita para las submatrices. Dado que hay tantos sistemas locales como piezas, se necesitan matrices de cambio de base entre cada sistema local y el global.

Ejemplo 8.3.1

La estructura articulada de la Figura 8.4a, con el sistema global de referencia que se muestra, está formada por tres barras del mismo material pero de diferente sección $A^{(i)}$. Numerar los nudos y las barras, definir los ejes locales, y dibujar los grados de libertad y las fuerzas externas.
Datos: $L = 10\,\mathrm{m}$, $E = 100$ GPa, $F_X = 2\,\mathrm{kN}$, $F_Y = 1\,\mathrm{kN}$.

En la Figura 8.4b se muestra la numeración de las barras y de los nudos, adoptada. La definición de los ejes locales se muestra en la Figura 8.5a. Por último, en la Figura 8.5b se representan las componentes de las fuerzas externas y los grados de libertad de los nudos referidos al sistema global de referencia.

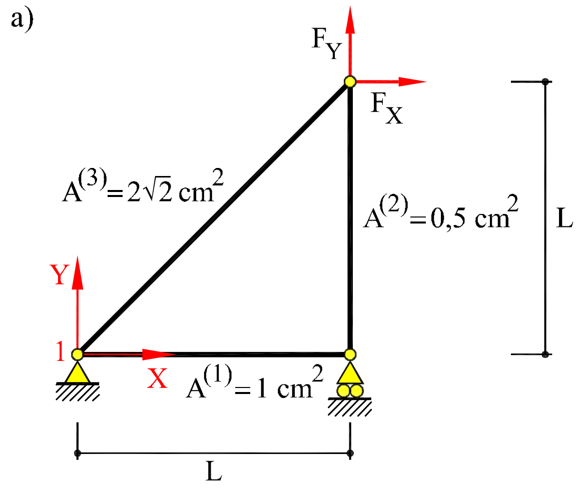


Fig. 8.4: Ejemplo 8.3.1: (a) geometría (b) numeración de nudos y barras

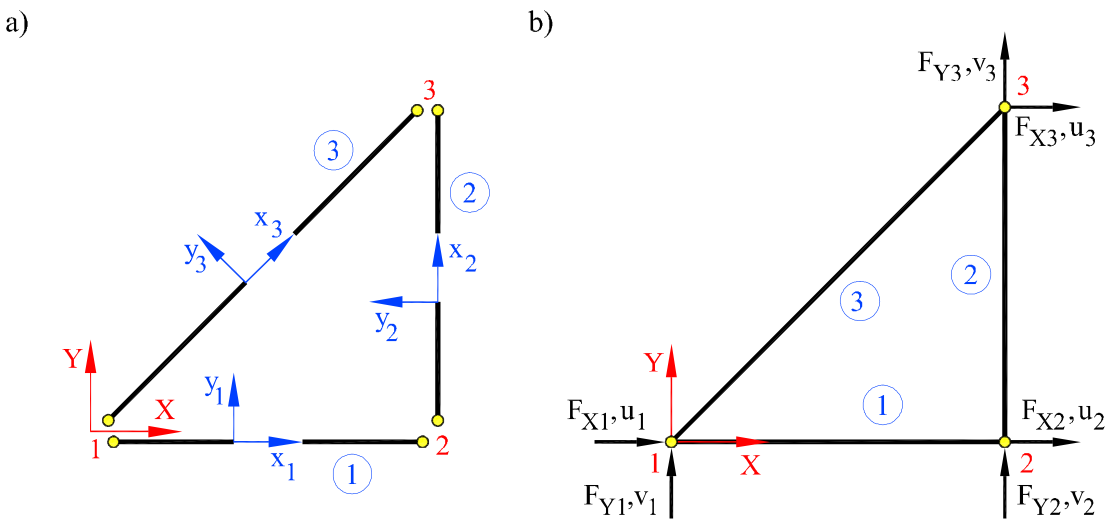


Fig. 8.5: (a) Sistemas de referencia: global y locales (b) esfuerzos y grados de libertad

8.4 Ecuaciones elásticas. Matriz elemental de rigidez

8.4.1 Forma matricial de las ecuaciones elásticas

Las ecuaciones elásticas de una pieza establecen la relación existente entre las fuerzas que actúan en los extremos de la pieza y los movimientos que se producen en los mismos. Sea una pieza recta de una estructura articulada plana, de longitud l, módulo de elasticidad E y sección transversal constante A, tal como la que se muestra en la Figura 8.6. Consideremos los esfuerzos axiles que actúan sobre sus extremos a y b, y los movimientos de éstos, *en el sistema local de referencia de la barra*.

Por equilibrio:

$$F'_{xa} = -F'_{xb} \tag{8.2}$$

Por otro lado, el alargamiento de la pieza debida al axil es:

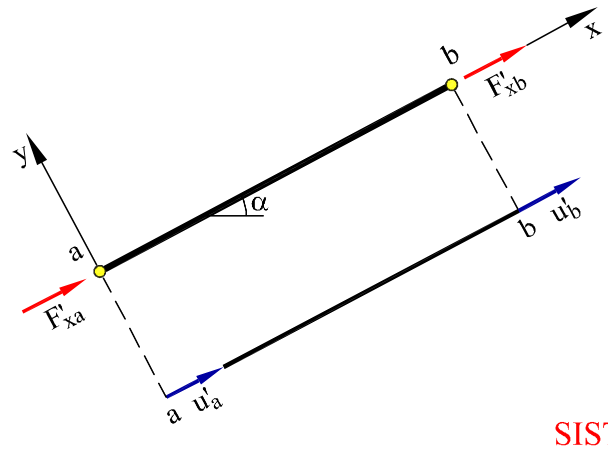
$$\delta = u'_b - u'_a = \frac{F'_{xb} l}{EA} \tag{8.3}$$

Por tanto, las ecuaciones elásticas de la barra articulada son:

$$F'_{xa} = +\frac{EA}{l}\left(u'_a - u'_b\right) = +k\left(u'_a - u'_b\right) \tag{8.4a}$$

$$F'_{xb} = -\frac{EA}{l}\left(u'_a - u'_b\right) = -k\left(u'_a - u'_b\right) \tag{8.4b}$$

donde $k = EA/l$ es la rigidez de la barra. Las ecuaciones (8.4a) y (8.4b) pueden



	Fuerzas
a	F'xa
b	F'xb
	Movimientos
a	u'a
b	u'b

SISTEMA LOCAL DE REFERENCIA

Fig. 8.6: Fuerzas y movimientos de extremo de pieza

escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_a \\ u'_b \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_a \\ u'_b \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

que podemos reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

con:

$$\mathbf{f}'_a = F'_{xa} \qquad \mathbf{f}'_b = F'_{xb} \qquad \mathbf{d}'_a = u'_a \qquad \mathbf{d}'_b = u'_b$$

y

$$\mathbf{k}'_{aa} = \mathbf{k}'_{bb} = k = \frac{EA}{l} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}'_{ab} = \mathbf{k}'_{ba} = -k = -\frac{EA}{l}$$

Para estructuras articuladas (planas y espaciales) en ejes locales $gl = 1$.

En las expresiones anteriores se llama *vectores de movimiento* de nudo a los vectores $\mathbf{d}'_a$ y $\mathbf{d}'_b$, formados por las componentes de movimiento que definen la traslación del nudo en el *sistema local* de la pieza. Análogamente, se llama *vectores de esfuerzos en extremo de pieza* a los vectores $\mathbf{f}'_a$ y $\mathbf{f}'_b$, formados por las componentes de las fuerzas que actúan en los extremos de las piezas. El número de componentes de cada uno de estos vectores depende de la tipología de estructura analizada y es igual al número de grados de libertad por nudo, en ejes locales, que corresponda a cada caso.

8.4.2 Concepto de rigidez y flexibilidad de una pieza

Las ecuaciones elásticas de la pieza, Ec. (8.7), pueden escribirse de forma matricial compacta como:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' \tag{8.8}$$

donde $\mathbf{f}'$, $\mathbf{K}'$ y $\mathbf{d}'$ son obvias del desarrollo anterior. Al vector $\mathbf{d}'$ se le llama *vector de movimientos de la pieza* y a $\mathbf{f}'$ se le denomina *vector de esfuerzos de la pieza*. Por extensión del problema mecánico elemental del comportamiento de un muelle, donde $F = k\,d$, (*fuerza* = *rigidez* × *alargamiento*), se denomina a la matriz $\mathbf{K}'$ *matriz de rigidez de la pieza* o *matriz de rigidez elemental*, y al método de cálculo matricial basado en ella, *método directo de rigidez*. Nótese que la matriz $\mathbf{K}'$ es *simétrica*.

La componente F'_i del vector de esfuerzos de la pieza será:

$$F'_i = \sum_{j=1}^{m} K'_{ij}\, d'_j \tag{8.9}$$

donde m es el número de grados de libertad de la pieza y K'_{ij} son las componentes de la matriz de rigidez elemental. Si se considera un sistema de movimientos en los extremos de pieza en el que únicamente la componente d'_j del vector movimientos es no nula e igual a la unidad ($d'_j = 1$, $d'_i = 0$ para $i \neq j$), resulta:

$$\left(F'_i\right)^j = K'_{ij} \tag{8.10}$$

es decir, que la columna j-ésima de la matriz de rigidez elemental $\mathbf{K}'$ representa el vector de esfuerzos $(\mathbf{f}')^j$ que se producen en la pieza cuando se impone un movimiento $d'_j = 1$.

También se puede intentar escribir la relación inversa entre fuerzas y movimientos en los extremos de la pieza, es decir, en la forma *movimiento* = *flexibilidad* × *fuerza*, donde la *flexibilidad* se define como la inversa de la rigidez. Sin embargo, mientras las fuerzas en los extremos de las piezas están perfectamente determinadas en función de los movimientos en los nudos, no ocurre lo mismo a la inversa, dado que la pieza *aislada* puede sufrir movimientos de sólido rígido sin que se modifiquen las fuerzas que actúan en sus extremos. Matemáticamente, esto quiere decir que la matriz de rigidez es singular y, por consiguiente, no existe su inversa en un sentido estricto.

Si, por ejemplo, se fija el extremo "a" de la pieza, entonces $\mathbf{d}'_a = \mathbf{0}$ y quedan impedidos así los movimientos de sólido rígido. En este caso, se tiene:

$$\mathbf{f}'_b = \mathbf{k}'_{bb}\, \mathbf{d}'_b \tag{8.11}$$

Esta relación sí es invertible y se tiene que:

$$\mathbf{d}'_b = \mathbf{k}'^{-1}_{bb}\, \mathbf{f}'_b = \mathbf{b}'_{bb}\, \mathbf{f}'_b \tag{8.12}$$

donde a la matriz $\mathbf{b}'_{bb}$ (inversa de $\mathbf{k}'_{bb}$) se le denomina *matriz de flexibilidad*, y al método de cálculo matricial basado en ella *método de flexibilidad*.

Si la pieza analizada forma parte de una estructura estable y no de un mecanismo, sus movimientos de sólido rígido están físicamente impedidos, y la matriz de rigidez será siempre *no singular*. Por lo tanto, puede hallarse su inversa y escribirse la relación entre los movimientos en los nudos y las fuerzas aplicadas en los extremos de la pieza. La componente d_i del vector de movimientos de la pieza será:

$$d'_i = \sum_{j=1}^{n} B'_{ij}\, F'_j \tag{8.13}$$

donde n es el número de grados de libertad de la pieza (excluidos los movimientos de sólido rígido) y B'_{ij} son las componentes de la matriz de flexibilidad elemental. Si se considera un sistema de esfuerzos sobre la pieza en el que únicamente la componente del vector de esfuerzos F'_j es no nula e igual a la unidad ($F'_j = 1$, $F'_i = 0$ para $i \neq j$), resulta:

$$\left(d'_i\right)^j = B'_{ij} \tag{8.14}$$

es decir, que el coeficiente B'_{ij} de la matriz de flexibilidad representa la componente i-ésima del vector de movimientos $(\mathbf{d}')^j$ que se produce cuando actúa sobre la pieza un esfuerzo de componente F'_j unidad. Por el Teorema de Rayleigh-Betti (Sección 4.6) debe ser:

$$F'_i(=1) \cdot \left(d'_i\right)^j = F'_j(=1) \cdot \left(d'_j\right)^i \quad \Rightarrow \quad B'_{ij} = B'_{ji} \tag{8.15}$$

es decir, que la matriz de flexibilidad $\mathbf{B}'$ elemental es *simétrica*.

Como consecuencia de la simetría de la matriz de flexibilidad elemental, se deduce que la matriz de rigidez elemental, que es su inversa, también lo es, como se ha comprobado para el caso de las estructuras articuladas planas.

8.4.3 Energía de deformación y energía potencial total de una pieza

Consideremos una pieza recta de una estructura articulada plana, de sección transversal constante, tal como la que se muestra en la Figura 8.6, sobre la que sólo actúan fuerzas en sus respectivos extremos a y b. Dado que los sistemas estructurales que estamos considerando son conservativos, el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre ellos se invierte, íntegramente, en incrementar la energía de deformación de las piezas que los componen. Por tanto, la energía de deformación de la pieza se puede evaluar calculando el trabajo realizado por las fuerzas de extremo de barra sobre sus respectivos movimientos eficaces, los movimientos de los nudos a y b. Según la fórmula de Clapeyron, se tiene que:

$$U = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}'\right)^T \mathbf{d}' = \frac{1}{2}\left(\mathbf{d}'\right)^T \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' \tag{8.16}$$

donde se ha utilizado la relación $\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}'$ y el hecho de que la matriz de rigidez es simétrica. Dado que el axil es $N = F'_{xa} = -F'_{xb}$, y el alargamiento de la barra es $\delta = u'_b - u'_a$ y $N = k\delta$, se tiene que:

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} F'_{xa} & F'_{xb} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'_a \\ u'_b \end{bmatrix} = \frac{1}{2}k\delta^2 \tag{8.17}$$

En la expresión (8.17) resulta obvio que la energía de deformación de una pieza se puede escribir como una función cuadrática de los movimientos de sus nudos. Como

la energía de deformación es necesariamente *no negativa*, la matriz de rigidez es una matriz *semidefinida positiva*.

Análogamente, se puede escribir la energía de deformación de una pieza como una función cuadrática de las fuerzas que actúan sobre sus nudos. Para ello, es necesario eliminar, de forma adecuada, los movimientos de sólido rígido de la barra. Si a tal efecto, por ejemplo, se fija el extremo "a" de la pieza, entonces $\mathbf{d}'_a = \mathbf{0}$. En este caso, se tiene:

$$U = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}'\right)^T \mathbf{d}' = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}'_b\right)^T \mathbf{b}'_{bb}\,\mathbf{f}'_b \tag{8.18}$$

donde se ha utilizado la relación $\mathbf{d}'_b = \mathbf{b}'_{bb}\,\mathbf{f}'_b$. Como la energía de deformación, una vez eliminados los movimientos de sólido rígido, es necesariamente *positiva*, la matriz de flexibilidad es una matriz *definida positiva*.

Conocida la expresión de la energía de deformación se puede obtener la expresión de la energía potencial total de la pieza. Para ello, basta con considerar la energía potencial de las fuerzas actuantes, H :

$$H = -\left(\mathbf{f}'\right)^T \mathbf{d}' \tag{8.19}$$

La energía potencial total Π es la suma de las expresiones (8.16) y (8.19):

$$\Pi = U + H \tag{8.20a}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{d}'\right)^T \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' - \left(\mathbf{f}'\right)^T \mathbf{d}' \tag{8.20b}$$

Obsérvese que se cumple el Principio de Energía Potencial Mínima, ya que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}'} = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' - \mathbf{f}' = \mathbf{0} \tag{8.21}$$

También se cumple el Primer Teorema de Castigliano, ya que las fuerzas se pueden obtener derivando la energía de deformación respecto de los correspondientes movimientos:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{d}'} = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' = \mathbf{f}' \tag{8.22}$$

8.4.4 Matriz elemental de rigidez en el sistema global

Sea $\boldsymbol{a} = (a_X, a_Y)$ un vector expresado en el sistema global (X, Y) y sea $\boldsymbol{a}' = (a'_x, a'_y)$ el mismo vector expresado en un sistema local (x, y). Sea α el ángulo que forman entre sí ambos sistemas de ejes (Figura 8.7). Las correspondientes transformaciones son:

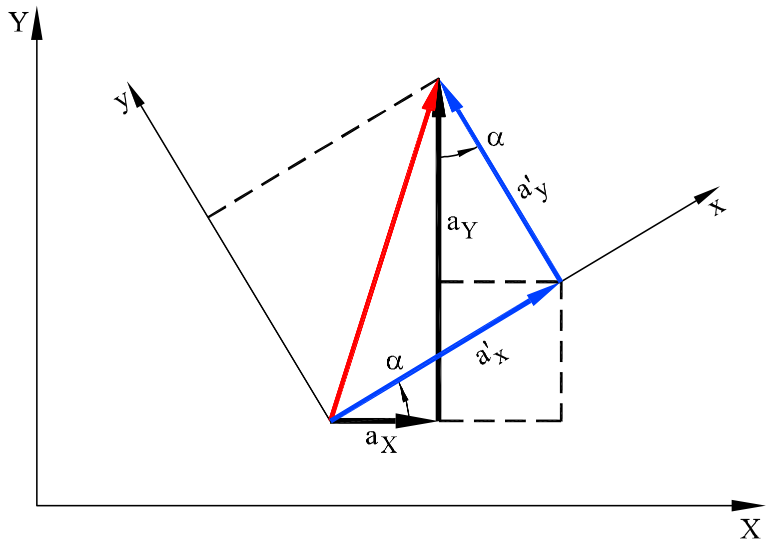


Fig. 8.7: Transformación de sistema de referencia

$$\begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \end{bmatrix} \tag{8.23}$$

o, en forma compacta:

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{a}' \qquad\qquad \boldsymbol{a}' = \mathbf{T}^T\,\boldsymbol{a} \tag{8.24}$$

En virtud de estas relaciones, un alargamiento u' en la dirección x de la barra produce un movimiento $\boldsymbol{d} = (u, v)$ en ejes globales que se corresponde con la expresión:

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} u' = \mathbf{T}\,\boldsymbol{d}' \tag{8.25}$$

donde se ha definido el vector de movimiento en ejes locales $\boldsymbol{d}' = u'$. Obsérvese que, en coordenadas locales, el vector de movimiento sólo tiene una componente, mientras que en coordenadas globales tiene dos.

En este caso, la matriz $\mathbf{T}$ de transformación es rectangular y contiene los cosenos directores del eje x local respecto de los ejes globales (X, Y), siendo $\text{ang}(Xx) = \alpha$ y $\text{ang}(Yx) = \pi/2 - \alpha$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(Xx) & , & \cos(Yx) \end{bmatrix}^T \tag{8.26}$$

Recíprocamente, conocidas las componentes del movimiento $\boldsymbol{d} = (u, v)$ en el sistema global, el movimiento en ejes locales se calcula:

$$\boldsymbol{d}' = u' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & , & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{d} \tag{8.27}$$

Aplicando estas transformaciones a los vectores de movimientos de extremo de pieza, se tiene:

$$\boldsymbol{d}_a = \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \end{bmatrix} = \mathbf{T}\, \boldsymbol{d}'_a \qquad \boldsymbol{d}_b = \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \end{bmatrix} = \mathbf{T}\, \boldsymbol{d}'_b \tag{8.28}$$

que son los vectores de movimientos en extremo de barra en coordenadas globales expresados en función de los movimientos en coordenadas locales $\boldsymbol{d}'_a = u'_a$, $\boldsymbol{d}'_b = u'_b$. Además, se tiene:

$$u'_a = \boldsymbol{d}'_a = \mathbf{T}^T \boldsymbol{d}_a \qquad u'_b = \boldsymbol{d}'_b = \mathbf{T}^T \boldsymbol{d}_b \tag{8.29}$$

De igual manera, aplicando la transformación de sistemas de coordenadas a los esfuerzos axiles en los extremos de la barra F'_{xa}, F'_{xb} se obtiene:

$$\mathbf{f}_a = \begin{bmatrix} F_{Xa} \\ F_{Ya} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} F'_{xa} = \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_a \tag{8.30a}$$

$$\mathbf{f}_b = \begin{bmatrix} F_{Xb} \\ F_{Yb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} F'_{xb} = \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_b \tag{8.30b}$$

y

$$\mathbf{f}'_a = F'_{xa} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & , & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{Xa} \\ F_{Ya} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_a \tag{8.31a}$$

$$\mathbf{f}'_b = F'_{xb} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & , & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{Xb} \\ F_{Yb} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_b \tag{8.31b}$$

De nuevo, obsérvese que el esfuerzo axil tiene una sola componente en el sistema local, mientras que expresado en el sistema global tiene dos.

Por lo tanto, partiendo de las ecuaciones elásticas referidas al sistema local de referencia, Ec.(8.6), reescrita como :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}'_{xa} &= \mathbf{k}'_{aa}\mathbf{d}'_a + \mathbf{k}'_{ab}\mathbf{d}'_b \\ \boldsymbol{F}'_{xb} &= \mathbf{k}'_{ba}\mathbf{d}'_a + \mathbf{k}'_{bb}\mathbf{d}'_b \end{aligned} \tag{8.32}$$

y utilizando las relaciones anteriores, se tiene:

$$\begin{array}{rl}\mathbf{f}'_a = \boldsymbol{F}'_{xa} & = \mathbf{k}'_{aa}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{k}'_{ab}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}'_b = \boldsymbol{F}'_{xb} & = \mathbf{k}'_{ba}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{k}'_{bb}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b\end{array} \tag{8.33}$$

Estas son las ecuaciones elásticas que permiten obtener los esfuerzos en el sistema local de referencia, a partir de los movimientos en el sistema global de referencia. Premultiplicando estas ecuaciones por la matriz de transformación de sistemas $\mathbf{T}$, se obtiene:

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{f}_a = \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_a & = & \mathbf{T}\,\mathbf{k}'_{aa}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{T}\,\mathbf{k}'_{ab}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b = \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_b & = & \mathbf{T}\,\mathbf{k}'_{ba}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{T}\,\mathbf{k}'_{bb}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b\end{array} \tag{8.34}$$

o bien:

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{f}_a & = & \mathbf{k}_{aa}\mathbf{d}_a + \mathbf{k}_{ab}\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b & = & \mathbf{k}_{ba}\mathbf{d}_a + \mathbf{k}_{bb}\mathbf{d}_b\end{array} \tag{8.35}$$

con:

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{T}\ \mathbf{k}'_{ij}\mathbf{T}^T \tag{8.36}$$

Las Ecs. (8.35) son las ecuaciones elásticas de la barra expresadas en el sistema global de referencia. Dichas ecuaciones son las que se utilizan para ensamblar la matriz global de rigidez de la estructura, tal como se explica en la Sección siguiente.

En el caso de una estructura articulada plana, estas matrices en coordenadas globales tienen la expresión:

$$\mathbf{k}_{aa} = \mathbf{k}_{bb} = k\begin{bmatrix} C^2 & SC \\ SC & S^2 \end{bmatrix} \tag{8.37a}$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{k}_{ba} = -k\begin{bmatrix} C^2 & SC \\ SC & S^2 \end{bmatrix} \tag{8.37b}$$

con $k = EA/l$, $S = \sin\,\alpha$ y $C = \cos\,\alpha$.

Nótese que las submatrices $\mathbf{k}_{ij}$ son simétricas, con lo que se comprueba que la matriz elemental de rigidez es simétrica *en cualquier sistema de referencia*.

Ejemplo 8.4.4.1

Para la estructura articulada del Ejemplo 8.3.1, escribir las ecuaciones elásticas de las barras en el sistema global de referencia (Figura 8.4b).

Las ecuaciones elásticas de las barras (Ec. (8.6)), referidas a sus respectivos sistemas locales (Figura 8.5b), son:

$$\begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{x2} \end{bmatrix}^{(1)} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix}^{(1)} \qquad \text{barra (1)}$$

$$\begin{bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{x3} \end{bmatrix}^{(2)} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix}^{(2)} \qquad \text{barra (2)}$$

$$\begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{x3} \end{bmatrix}^{(3)} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix}^{(3)} \qquad \text{barra (3)}$$

donde la rigidez de las barras $k^{(i)} = (EA/l)^{(i)}$ se ha expresado en kN/ m.

Se tiene que $\alpha^{(1)} = 0^o$, $\alpha^{(2)} = 90^o$ y $\alpha^{(3)} = 45^o$. Teniendo en cuenta dichos ángulos, las ecuaciones elásticas de las barras referidas al sistema global de coordenadas son:

Barra 1 ($\alpha = 0^o$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \end{bmatrix}^{(1)} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}^{(1)}$$

Barra 2 ($\alpha = 90^o$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}^{(2)} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}^{(2)}$$

Barra 3 ($\alpha = 45^o$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}^{(3)} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 10 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & -10 & -10 \\ -10 & -10 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}^{(3)}$$

8.5 Compatibilidad y Equilibrio. Matriz global de rigidez

8.5.1 Ensamblaje de la matriz global

Una vez calculadas las ecuaciones elásticas de todas las barras que forman la estructura en un sistema de referencia común, el siguiente paso en el *método directo de rigidez* es la construcción de la matriz global de rigidez de la estructura. Esta matriz global se obtiene mediante el *ensamblaje* de las matrices elementales de rigidez de las piezas. Dicho ensamblaje es el resultado de la aplicación sistemática de las condiciones de:

1. *Compatibilidad*: los desplazamientos de los extremos de las barras que concurren en un nudo son iguales.

2. *Equilibrio*: la suma de las fuerzas ejercidas por las barras que concurren en un nudo están en equilibrio con la fuerza externa aplicada en dicho nudo.

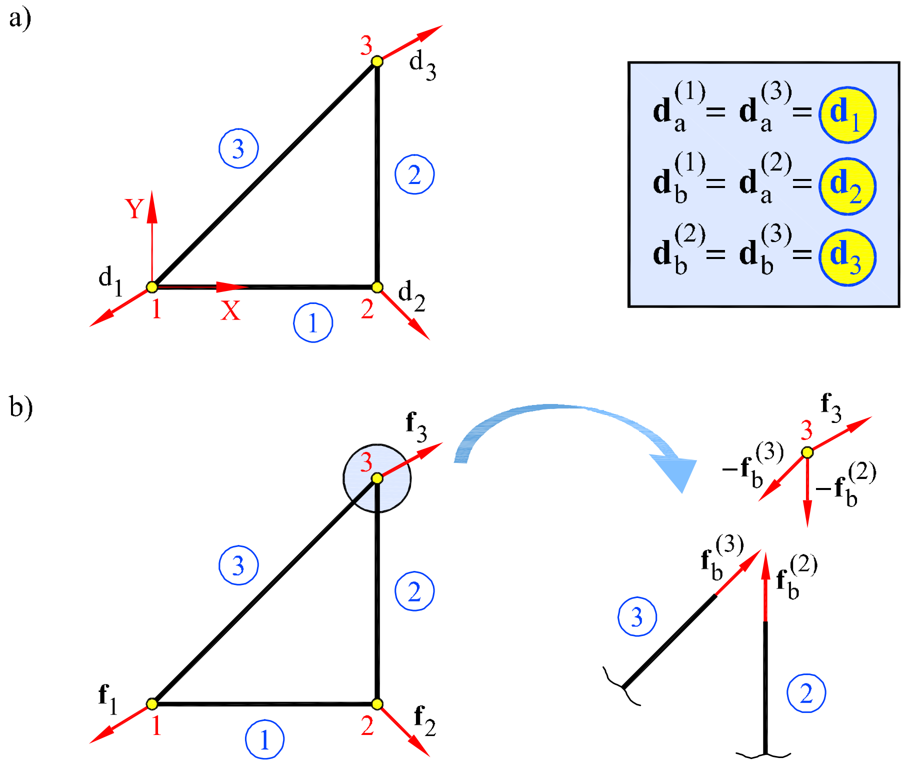


Fig. 8.8: (a) Compatibilidad “a priori” (b) equilibrio “a posteriori”

Así, por ejemplo, en la estructura de la Figura 8.8a, por compatibilidad, los movimientos del extremo a de la barra 1, $\mathbf{d}_a^{(1)}$, y los del extremo a de la barra 3, $\mathbf{d}_a^{(3)}$, son iguales, y ambos a su vez iguales a los del nudo 1, $\mathbf{d}_1$, al que concurren dichas barras.

Por otra parte, por equilibrio, la suma de las fuerzas en el extremo b de la barra 2, $\mathbf{f}_b^{(2)}$, y en el extremo b de la barra 3, $\mathbf{f}_b^{(3)}$, es igual a la fuerza exterior que actúa en el nudo 3, $\mathbf{f}_3$ (Figura 8.8b).

Por tanto, en la estructura de la Figura 8.8, formada por 3 piezas, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas interiores (esfuerzos en extremos de piezas) y exteriores que actúan sobre los nudos se pueden escribir, en el *sistema global* de referencia:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_a^{(1)} + \mathbf{f}_a^{(3)} && (8.38a)\\
&= \left[\mathbf{k}_{aa}^{(1)}\mathbf{d}_1 + \mathbf{k}_{ab}^{(1)}\mathbf{d}_2\right] + \left[\mathbf{k}_{aa}^{(3)}\mathbf{d}_1 + \mathbf{k}_{ab}^{(3)}\mathbf{d}_3\right] && (8.38b)\\
\mathbf{f}_2 &= \mathbf{f}_b^{(1)} + \mathbf{f}_a^{(2)} &&\\
&= \left[\mathbf{k}_{ba}^{(1)}\mathbf{d}_1 + \mathbf{k}_{bb}^{(1)}\mathbf{d}_2\right] + \left[\mathbf{k}_{aa}^{(2)}\mathbf{d}_2 + \mathbf{k}_{ab}^{(2)}\mathbf{d}_3\right] && (8.38c)\\
\mathbf{f}_3 &= \mathbf{f}_b^{(2)} + \mathbf{f}_b^{(3)} &&\\
&= \left[\mathbf{k}_{ba}^{(2)}\mathbf{d}_2 + \mathbf{k}_{bb}^{(2)}\mathbf{d}_3\right] + \left[\mathbf{k}_{ba}^{(3)}\mathbf{d}_1 + \mathbf{k}_{bb}^{(3)}\mathbf{d}_3\right] && (8.38d)
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(3)} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{k}_{ab}^{(3)}\mathbf{d}_3 \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(2)} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(3)} & \mathbf{k}_{ba}^{(2)} & \mathbf{k}_{bb}^{(2)} + \mathbf{k}_{bb}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} \qquad (8.39)$$

o de forma más compacta:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{d} \qquad (8.40)$$

donde $\mathbf{f}$ es el vector global de las fuerzas exteriores (incluidas las reacciones), $\mathbf{K}$ es la matriz global de rigidez de la estructura y $\mathbf{d}$ es el vector global de movimientos en los nudos.

De lo anterior se obtienen algunas conclusiones de validez general:

(a) La matriz $\mathbf{K}$ es *simétrica*, al ser simétricas las submatrices $\mathbf{k}_{aa}$ y $\mathbf{k}_{bb}$ elementales y traspuestas una de la otra las submatrices $\mathbf{k}_{ab}$ y $\mathbf{k}_{ba}$ de cada pieza. De hecho, debe serlo en virtud de los Teoremas de Reciprocidad, aplicados a la estructura en su conjunto.

(b) La matriz $\mathbf{K}$ es *singular*, ya que las ecuaciones de equilibrio (8.38a)-(8.38d) no se ven afectadas por un movimiento de sólido rígido de la estructura.

Ejemplo 8.5.1.1

Para la estructura articulada de los Ejemplos 8.3.1 y 8.4.4.1, escribir las ecuaciones de equilibrio, explicitando la matriz de rigidez de la estructura.

Antes de imponer las condiciones de contorno, la estructura tiene 6 grados de libertad, 2 por cada uno de los tres nudos (Figura 8.5a). El vector global de fuerzas exteriores en los nudos (Figura 8.5a) es:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F_{X1} & F_{Y1} & F_{X2} & F_{Y2} & F_{X3} & F_{Y3} \end{bmatrix}^T$$

y el vector global de movimientos en los nudos (Figura 8.5a) es:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}^T$$

Teniendo en cuenta las matrices elementales de rigidez de las barras obtenidas en el Ejemplo 8.4.4.1 y la expresión (8.39), el sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos de la estructura es:

$$\begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix} = \underbrace{10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{K}$ es la matriz global de rigidez de la estructura y sus términos se expresan en kN/m.

8.5.2 Energía de deformación y energía potencial de la estructura

Consideremos de nuevo el hecho de que los sistemas estructurales que estamos tratando son conservativos y, por tanto, el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre ellos se invierte, íntegramente, en incrementar la energía de deformación de las piezas que los componen. La energía de deformación de una pieza (e) de la estructura es, según la expresión (8.16):

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{d}'^{(e)}\right)^T \mathbf{K}'^{(e)} \mathbf{d}'^{(e)} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{d}^{(e)}\right)^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} \tag{8.41}$$

según se evalúe en los ejes locales o globales, respectivamente.

La energía de deformación de la estructura completa se obtiene, simplemente, sumando (escalarmente) las contribuciones de todas las barras que la forman:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{(e)} U^{(e)} && (8.42a) \\ &= \sum_{(e)} \frac{1}{2} \left(\mathbf{d}^{(e)}\right)^T \mathbf{K}^{(e)}\, \mathbf{d}^{(e)} && (8.42b) \\ &= \frac{1}{2}\, \mathbf{d}^T \mathbf{K}\, \mathbf{d} && (8.42c) \end{aligned}$$

donde se han utilizado las condiciones de compatibilidad de movimientos en los nudos para pasar de la expresión (8.42b), en función de las matrices de rigidez elementales, a la (8.42c), en función de la matriz de rigidez global de la estructura. En la expresión (8.42c) resulta, de nuevo, evidente que la energía de deformación de una estructura se puede escribir como una función cuadrática de los movimientos de sus nudos. Como la energía de deformación es necesariamente *no negativa*, la matriz de rigidez global es una matriz *semidefinida positiva*.

Conocida la expresión de la energía de deformación de la estructura, es fácil obtener la expresión de la energía potencial total de ésta. Para ello, basta con considerar la energía potencial de las fuerzas actuantes:

$$H = -\,\mathbf{f}^{\,T} \mathbf{d} \qquad (8.43)$$

La energía potencial total es la suma de las expresiones (8.42c) y (8.43):

$$\begin{aligned} \Pi &= U + H && (8.44a) \\ &= \frac{1}{2}\, \mathbf{d}^T\, \mathbf{K}\, \mathbf{d} - \mathbf{f}^T \mathbf{d} && (8.44b) \end{aligned}$$

De nuevo, las ecuaciones de equilibrio en los nudos pueden obtenerse a partir del Principio de Energía Potencial Mínima, ya que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{K}\, \mathbf{d} - \mathbf{f} \, = \mathbf{0} \qquad (8.45)$$

Puede comprobarse fácilmente que las reglas de ensamblaje de la matriz de rigidez global de la estructura que se deducen de las ecuaciones (8.42a)-(8.42c) coinciden exactamente con las obtenidas a partir de la imposición del equilibrio de fuerzas y momentos en los nudos. De hecho, dichas condiciones de equilibrio pueden deducirse directamente de la expresión (8.45), o bien, aplicando el Primer Teorema de Castigliano:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{K}\, \mathbf{d} = \mathbf{f} \qquad (8.46)$$

ya que las fuerzas que actúan sobre los nudos se pueden obtener derivando la energía de deformación total respecto de los correspondientes movimientos.

8.6 Movimientos prescritos nulos según los ejes globales

Se considera en esta Sección la manera de introducir las condiciones de apoyo de la estructura en el sistema de ecuaciones de equilibrio ya ensamblado. La especificación de las condiciones de apoyo de la estructura se traduce en que algunos de los grados de libertad de ésta tienen sus valores prescritos nulos. El número de grados de libertad prescritos debe ser suficiente como para impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura.

Consideremos que el grado de libertad $i-$ésimo de la estructura, referido a los ejes globales de referencia, tiene un valor prescrito $d_i = \overline{d_i} = 0$. El sistema de ecuaciones a resolver es, entonces:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ \overline{d_i} = 0 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} \tag{8.47}$$

donde F_i es la reacción correspondiente al grado de libertad prescrito. Se elimina la columna i-ésima porque se multiplica por $d_i = \overline{d_i} = 0$. La fila i-ésima se puede eliminar porque es la ecuación correspondiente a un grado de libertad conocido $d_i = \overline{d_i} = 0$. Por tanto, la prescripción de un grado de libertad reduce el sistema global en una ecuación. Este proceso se repite para cada grado de libertad prescrito nulo, lo cual reduce el sistema global a resolver.

Ejemplo 8.6.1

Para la estructura articulada de los Ejemplos 8.3.1, 8.4.4.1 y 8.5.1.1, introducir las condiciones de apoyo en el sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos.

La estructura tiene un apoyo articulado fijo en A y un apoyo articulado simple en B (Figura 8.4a). Por tanto, los movimientos prescritos son (Figura 8.4b):

$$u_1 = v_1 = v_2 = 0 \text{ m}$$

El sistema de ecuaciones obtenido en el Ejemplo 8.5.1.1 se modifica al introducir estos movimientos prescritos.

Eliminando las filas y columnas 1, 2, y 4, correspondientes a los movimientos nulos, se obtiene:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X2} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}$$

que es el *sistema global reducido* de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos.

8.7 Cálculo de movimientos, reacciones y esfuerzos

8.7.1 Cálculo de los movimientos en los nudos

Una vez construido el sistema de ecuaciones de equilibrio en los nudos:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{d} = \mathbf{f} \tag{8.48}$$

y modificado éste para introducir las condiciones de apoyo, se tiene el sistema de ecuaciones *reducido*:

$$\widehat{\mathbf{K}}\widehat{\mathbf{d}} = \widehat{\mathbf{f}} \tag{8.49}$$

donde se han eliminado las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad prescritos, tal como se explica en la Sección 8.6. Si las condiciones de apoyo son suficientes para impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura, la matriz modificada $\widehat{\mathbf{K}}$ es *no singular* y el sistema reducido puede resolverse.

Los movimientos incógnita en los nudos se obtienen resolviendo este sistema; formalmente:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \widehat{\mathbf{K}}^{\,-1}\widehat{\mathbf{f}} \tag{8.50}$$

Ahora se puede considerar resuelto el problema estructural y se pueden calcular *a posteriori* las reacciones y los esfuerzos en las piezas.

Ejemplo 8.7.1.1

Para la estructura articulada de los Ejemplos 8.3.1, 8.4.4.1, 8.5.1.1 y 8.6.1 sometida a las cargas que se indican, resolver los movimientos incógnitas.
Datos: $F_X = 2\,\text{kN}$, $F_Y = 1\,\text{kN}$.

Las fuerzas externas conocidas que actúan en los nudos de la estructura (Figuras 8.4a y 8.5a) son:

$$F_{X2} = 0 \text{ kN} \qquad F_{X3} = 2\,\text{kN} \qquad F_{Y3} = 1\,\text{kN}$$

Introduciendo estos valores en el sistema de ecuaciones reducido obtenido en el Ejemplo 8.6.1 se tiene:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los movimientos incógnitas u_2, u_3 y v_3 se obtienen resolviendo este sistema, para dar:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

y el vector de movimientos global es:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}^T \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

La deformada de la estructura puede verse en la Figura 8.10b.

8.7.2 Cálculo de las reacciones

Las reacciones en los nudos con movimientos impedidos o prescritos se calculan de la siguiente manera: para un grado de libertad i prescrito, se calcula la reacción correspondiente utilizando la ecuación $i-$ésima del sistema original de ecuaciones de equilibrio, es decir

$$F_i = \sum_j K_{ij}\, d_j \tag{8.51}$$

Ejemplo 8.7.2.1

Calcular las reacciones de la estructura articulada de los Ejemplos 8.3.1, 8.4.4.1, 8.5.1.1, 8.6.1 y 8.7.1.1.

Una vez conocidos los movimientos incógnitas se calculan las reacciones en los nudos con movimientos prescritos. Para ello, se recupera el sistema de ecuaciones completo

(Ejemplo 8.5.1.1) y se calculan las fuerzas incógnitas en los grados de libertad prescritos.

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,004 \\ -0,002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ 0 \\ V_2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así, por ejemplo, para calcular la componente horizontal de la reacción en el nudo 1 (Figura 8.9a), aplicando la Ec. (8.51) se tiene:

$$H_1 = F_{X1} = \sum_{j=1}^{6} K_{1j}\, d_j = 10^2 \cdot [(-10) \cdot 0,004 + (-10) \cdot (-0,002)] = -2\,\mathrm{kN} \qquad (\leftarrow)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen las reacciones incógnitas restantes:

$$\begin{aligned} V_1 &= F_{Y1} = \sum_{j=1}^{6} K_{2j}\, d_j = 10^2 \cdot [(-10) \cdot 0,004 + (-10) \cdot (-0,002)] = -2\ \mathrm{kN} \qquad (\downarrow) \\ V_2 &= F_{Y2} = \sum_{j=1}^{6} K_{4j}\, d_j = 10^2 \cdot (-5) \cdot (-0,002) = 1\,\mathrm{kN} \qquad (\uparrow) \end{aligned}$$

8.7.3 Cálculo de los esfuerzos en las piezas

Conocidos los movimientos de los nudos $\mathbf{d}_i$, los esfuerzos en los extremos de las piezas se calculan *a posteriori*. Los esfuerzos totales (en ejes locales) en los extremos a y b de la pieza ij se calculan:

$$\mathbf{f}'_a = F'_{xa} = \mathbf{k}'_{aa}\, \mathbf{T}^T\, \mathbf{d}_a + \mathbf{k}'_{ab} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \qquad (8.52a)$$

$$\mathbf{f}'_b = F'_{xb} = \mathbf{k}'_{ba}\, \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{k}'_{bb}\, \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \qquad (8.52b)$$

donde F'_{xa} y F'_{xb} son los esfuerzos axiles (en ejes locales), $\mathbf{d}_a$ y $\mathbf{d}_b$ son los movimientos (en ejes globales) de los extremos de la pieza, $\mathbf{k}'_{aa}$, $\mathbf{k}'_{ab}$, $\mathbf{k}'_{ba}$ y $\mathbf{k}'_{bb}$ son las submatrices de rigidez de la pieza ij (en ejes locales) y $\mathbf{T}$ es la matriz de cambio de coordenadas local-global para la pieza ij. Sustituyendo los valores correspondientes se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} u'_a - u'_b \\ -u'_a + u'_b \end{bmatrix} \\ &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} (\cos\alpha\ u_a + \sin\alpha\ v_a) - (\cos\alpha\ u_b + \sin\alpha\ v_b) \\ -(\cos\alpha\ u_a + \sin\alpha\ v_a) + (\cos\alpha\ u_b + \sin\alpha\ v_b) \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (8.53)$$

Ejemplo 8.7.3.1

Para la estructura articulada de los Ejemplos 8.3.1, 8.4.4.1, 8.5.1.1, 8.6.1, 8.7.1.1 y 8.7.2.1, calcular los esfuerzos en las barras.

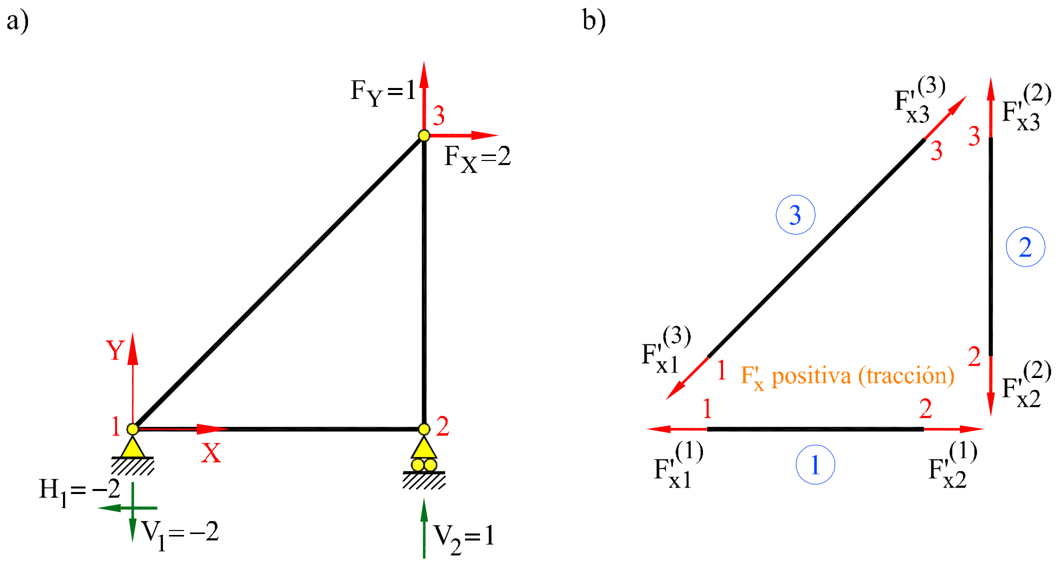


Fig. 8.9: Ejemplo 8.3.1: (a) fuerzas y reacciones (b) esfuerzos en las barras

Teniendo en cuenta los movimientos de la estructura obtenidos en el Ejemplo 8.7.1.1 y la Ec. (8.53), pueden calcularse los esfuerzos axiles de las barras.

Así, por ejemplo, para la barra 2 de movimientos en los extremos 2 y 3:

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m} \qquad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

aplicando la Ec. (8.53) y teniendo en cuenta que $\alpha = 90^o$ (Figura 8.9b), los esfuerzos en sus extremos son:

$$\mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F'^{(2)}_{x2} \\ F'^{(2)}_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{EA}{l}v_3 \\ +\dfrac{EA}{l}v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left[\left(5 \cdot 10^2\right) \cdot \left(-2 \cdot 10^{-3}\right)\right] \\ +\left[\left(5 \cdot 10^2\right) \cdot \left(-2 \cdot 10^{-3}\right)\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{kN} \quad (\text{C})$$

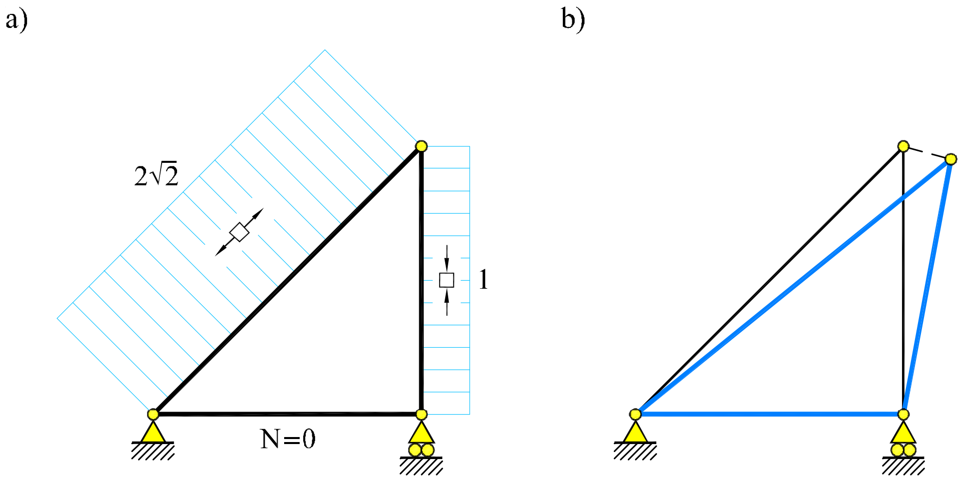


Fig. 8.10: Ejemplo 8.3.1: (a) ley de axiles (b) deformada

Resolviendo de manera similar para las barras 1 y 3 se obtiene:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{kN} \qquad \mathbf{f}'^{(3)} = \begin{bmatrix} F'^{(3)}_{x1} \\ F'^{(3)}_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{kN} \quad (\text{T})$$

De los resultados obtenidos se observa que la barra 2 está comprimida y la 3 está traccionada. En este caso la barra 1 no trabaja.

En la Figura 8.10a se muestra la ley de esfuerzos axiles de la estructura y en la 8.10b la deformada.

Nótese que la estructura del ejemplo es isostática. Por tanto, las propiedades mecánicas de las barras determinan los movimientos de la estructura pero *no* los sistemas de fuerzas (internas o externas).

Ejemplo 8.7.3.2

Resolver la estructura hiperestática de la Figura 8.11a sometida a las cargas que se indican. La rigidez a axil EA de las barras es constante.
Datos: $L = 6\,\text{m}$, $A = 6\,\text{cm}^2$, $E = 200$ GPa, $F = 80\,\text{kN}$.

En la Figura 8.11b se muestra la numeración de barras y nudos y los sistemas de referencia global y locales. Las barras que forman la estructura tienen diferente

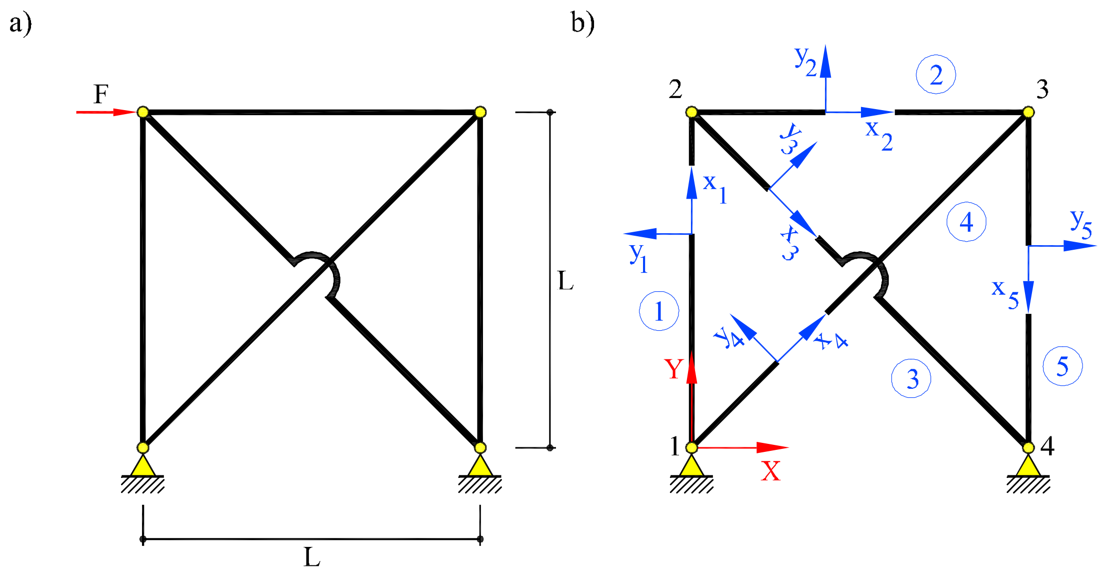


Fig. 8.11: (a) Estructura del Ejemplo 8.7.3.2 (b) sistemas de referencia y numeración

longitud; las que son paralelas a los ejes de referencia globales son de longitud L, mientras que las diagonales tienen una longitud $\sqrt{2}L$. La matriz de rigidez elemental, en el sistema local, es diferente para cada longitud de barra:

(a1) *Matriz de rigidez elemental de las barras* 1, 2 y 5:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

(a2) *Matriz de rigidez elemental de las diagonales* 3 y 4:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

donde la rigidez de las barras $k^{(i)} = (EA/l)^{(i)}$ se expresa en kN/ m.

(b) Teniendo en cuenta la matriz $\mathbf{T}$ de transformación de coordenadas correspondiente a cada pieza, formada por los cosenos directores de los ejes x_i, y las Ecs. (8.37a) y (8.37b), se calcula la matriz de rigidez elemental de cada barra, en el sistema global:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(i)} & -\mathbf{k}^{(i)} \\ -\mathbf{k}^{(i)} & \mathbf{k}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Barra 1 $\alpha^{(1)} = 90^o$:

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}^{(1)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Barra 2 $\alpha^{(2)} = 0^o$:

$$\mathbf{T}^{(2)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}^{(2)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 3 $\alpha^{(3)} = -45^o$:

$$\mathbf{T}^{(3)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^{(3)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Barra 4 $\alpha^{(4)} = 45^o$:

$$\mathbf{T}^{(4)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^{(4)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Barra 5 $\alpha^{(5)} = -90^o$:

$$\mathbf{T}^{(5)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \end{bmatrix}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^{(5)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta las matrices elementales de rigidez de las barras y la expresión (8.39), el sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos de la estructura es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & -\mathbf{k}^{(1)} & -\mathbf{k}^{(4)} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}^{(1)} & \mathbf{k}_{22} & -\mathbf{k}^{(2)} & -\mathbf{k}^{(3)} \\ -\mathbf{k}^{(4)} & -\mathbf{k}^{(2)} & \mathbf{k}_{33} & -\mathbf{k}^{(5)} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}^{(3)} & -\mathbf{k}^{(5)} & \mathbf{k}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{k}_{11} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(4)} \qquad \mathbf{k}_{33} = \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(4)} + \mathbf{k}^{(5)}$$
$$\mathbf{k}_{22} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)} \qquad \mathbf{k}_{44} = \mathbf{k}^{(3)} + \mathbf{k}^{(5)}$$

Los grados de libertad de la estructura son $4 \times 2 = 8$; por tanto, la matriz tiene 8 filas y 8 columnas. Nótese que la matriz global de rigidez es simétrica.

Eliminando las ecuaciones correspondientes a los grados de libertad prescritos e introduciendo los valores de las cargas, $F_{X2} = 80$ kN y $F_{Y2} = \ F_{X3} = F_{Y3} = 0$ kN, se obtiene el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 27,07 & -7,07 & -20 & 0 \\ -7,07 & 27,07 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 27,07 & 7,07 \\ 0 & 0 & 7,07 & 27,07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, se obtienen los movimientos incógnita:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,54 \\ 2,23 \\ 6,77 \\ -1,77 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Las reacciones se calculan a partir del sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos. Por ejemplo, la componente de la reacción en el nudo 1, F_{X1},

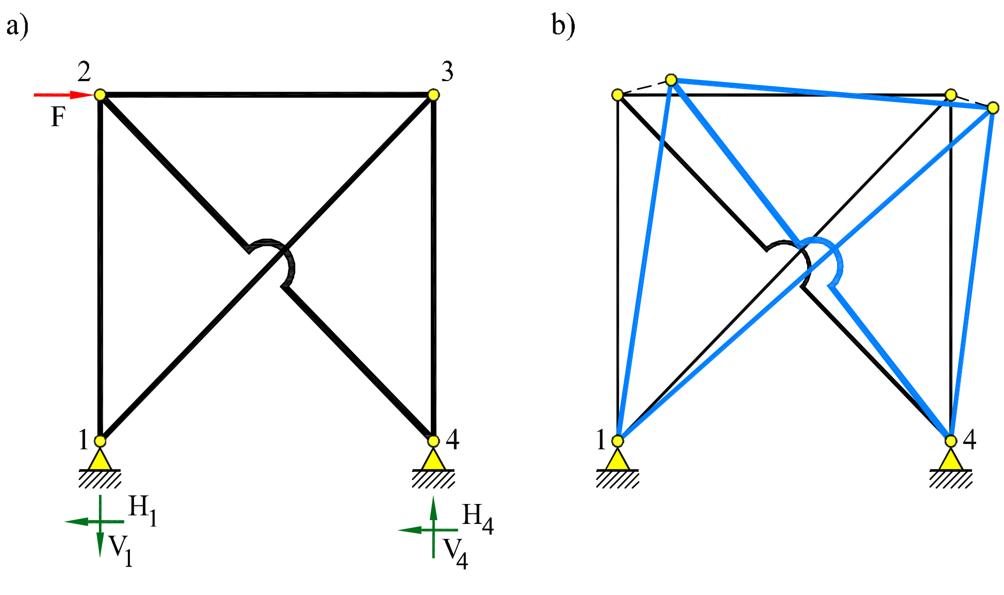


Fig. 8.12: Ejemplo 8.7.3.2: (a) reacciones (b) deformada

según el eje X, es:

$$\begin{aligned} H_1 &= F_{X1} = \sum_{j=1}^{8} K_{1j} d_j \\ &= 10^3 \cdot [(-7,07)\, u_3 + (-7,07)\, v_3] \\ &= -35,4\,\text{kN} \quad (\longleftarrow) \end{aligned}$$

Completando el cálculo de las reacciones en los nudos 1 y 4, se tiene (Figura 8.12a):

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ H_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X4} \\ F_{Y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35,4 \\ -80 \\ -44,6 \\ 80 \end{bmatrix} \text{kN}$$

Los axiles en las barras se calculan aplicando la Ec. (8.53) y teniendo en cuenta la matriz $\mathbf{T}^T$ para cada barra. Así, por ejemplo, para la barra 1 con $\alpha^{(1)} = 90^o$ (Figura 8.11b) y de movimientos en los extremos 1 y 2:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m} \qquad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,54 \\ 2,23 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

los esfuerzos en sus extremos son:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{EA}{L}\, v_2 \\ +\dfrac{EA}{L}\, v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(2 \cdot 10^4 \cdot 2,23 \cdot 10^{-3}\right) \\ +\left(2 \cdot 10^4 \cdot 2,23 \cdot 10^{-3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44,6 \\ 44,6 \end{bmatrix} \text{kN (T)}$$

Resolviendo de manera similar para las barras restantes se obtiene:

$$\mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F'^{(2)}_{x2} \\ F'^{(2)}_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,4 \\ -35,4 \end{bmatrix} \text{kN (C)} \qquad \mathbf{f}'^{(3)} = \begin{bmatrix} F'^{(3)}_{x2} \\ F'^{(3)}_{x4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63,1 \\ -63,1 \end{bmatrix} \text{kN (C)}$$

$$\mathbf{f}'^{(4)} = \begin{bmatrix} F'^{(4)}_{x1} \\ F'^{(4)}_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50,0 \\ 50,0 \end{bmatrix} \text{kN (T)} \qquad \mathbf{f}'^{(5)} = \begin{bmatrix} F'^{(5)}_{x3} \\ F'^{(5)}_{x4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,4 \\ -35,4 \end{bmatrix} \text{kN (C)}$$

Las barras 1 y 4 están traccionadas, mientras que las barras 2, 3 y 5 están comprimidas. En la Figura 8.12b se muestra la deformada de la estructura.

8.8 Otros tipos de apoyos

8.8.1 Movimientos prescritos no nulos según los ejes globales

Consideremos, de forma general, que el grado de libertad $i-$ésimo de la estructura, referido a los ejes globales de referencia, tiene un valor prescrito $d_i = \overline{d_i}$. El sistema de ecuaciones a resolver es, entonces:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ \overline{d_i} \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} \tag{8.54}$$

donde F_i es la reacción correspondiente al grado de libertad prescrito. El proceso a seguir es el siguiente: se elimina la fila correspondiente al movimientos prescrito y se pasa la columna i multiplicada por $\overline{d_i}$ al miembro derecho de la ecuación. El sistema global de ecuaciones queda de esta forma reducido en una ecuación:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & .. & K_{1,i-1} & K_{1,i+1} & .. & K_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ K_{i-1,1} & .. & K_{i-1,i-1} & K_{i-1,i+1} & .. & K_{i-1,n} \\ K_{i+1,1} & .. & K_{i+1,i-1} & K_{i+1,i+1} & .. & K_{i+1,n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ K_{n1} & .. & K_{n,i-1} & K_{n,i+1} & .. & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_{i-1} \\ d_{i+1} \\ .. \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_{i-1} \\ F_{i+1} \\ .. \\ F_n \end{bmatrix} - \overline{d_i} \begin{bmatrix} K_{1i} \\ .. \\ K_{i-1,i} \\ K_{i+1,i} \\ .. \\ K_{ni} \end{bmatrix} \tag{8.55}$$

Este proceso se repite para cada grado de libertad prescrito, lo cual reduce, consecuentemente, el número de ecuaciones a resolver.

En la práctica, la matriz de rigidez se dimensiona, calcula y almacena en su formato final. Los términos K_{ij} se ensamblan en la matriz sólo si el grado de libertad i está libre; en caso contrario, se añaden los términos $-\overline{d_i}\,K_{ji}$ al vector de fuerzas. En el caso particular de que el grado de libertad en cuestión esté prescrito a un valor nulo, $d_i = \overline{d_i} = 0$, esta última operación es innecesaria (ver Sección 8.6).

Se observa que prescribir un movimiento a un valor no nulo equivale a aplicar sobre la estructura un vector de fuerzas cuyas componentes son proporcionales a los coeficientes de la columna correspondiente de la matriz de rigidez. Esto proporciona un significado físico al valor de estos coeficientes.

Ejemplo 8.8.1.1

Resolver la estructura de la Figura 8.13a con los movimientos impuestos siguientes: el nudo 1 sufre un movimiento de componente vertical descendente $v_1 = -5 \cdot 10^{-3}$ m y el nudo 2 un movimiento vertical ascendente $v_2 = +4 \cdot 10^{-3}$ m. Las propiedades mecánicas de las barras son las mismas que las del Ejemplo 8.3.1.

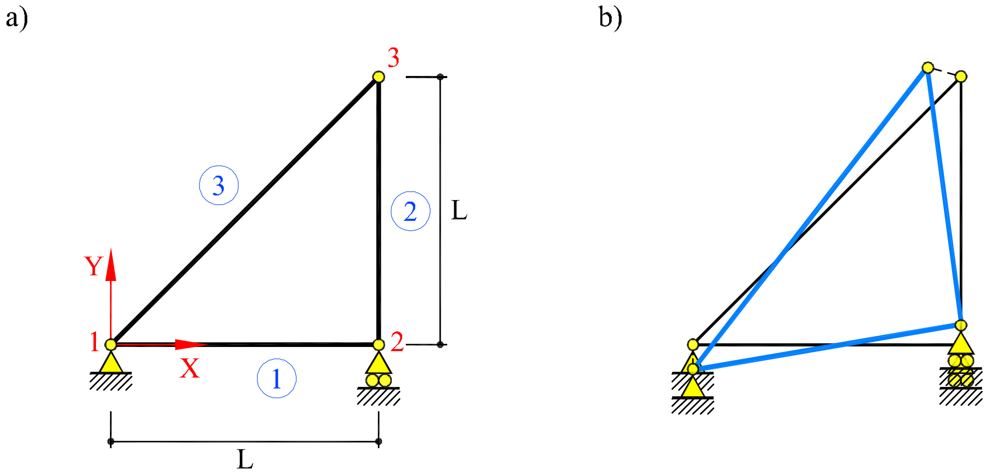


Fig. 8.13: (a) Estructura del Ejemplo 8.8.1.1 (b) deformada

Introduciendo las fuerzas externas, $F_{X2} = F_{X3} = F_{Y3} = 0$ kN, y las condiciones de apoyo, $u_1 = 0$ m, $v_1 = -5 \cdot 10^{-3}$ m y $v_2 = +4 \cdot 10^{-3}$ m en el sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos, obtenido en el Ejemplo 8.5.1.1, se tiene:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,005 \\ u_2 \\ 0,004 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ 0 \\ F_{Y2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminando las ecuaciones que corresponde a los movimientos conocidos, filas 1, 2 y 4, se obtiene:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,005 \\ u_2 \\ 0,004 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se pasan al miembro derecho de la ecuación las columnas 1, 2 y 4, multiplicadas por u_1, v_1 y v_2, y se suprime el vector de cargas por ser nulo:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10^2 \cdot [(-10) \cdot 0 + 0 \cdot (-0,005) + 0 \cdot 0,004] \\ 10^2 \cdot [(-10) \cdot 0 + (-10) \cdot (-0,005) + 0 \cdot 0,004] \\ 10^2 \cdot [(-10) \cdot 0 + (-10) \cdot (-0,005) + (-5) \cdot 0,004] \end{bmatrix}$$

Por tanto, el sistema global reducido es:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Nótese que el sistema global reducido obtenido es igual al del Ejemplo 8.7.1.1, salvo el término que corresponde a las fuerzas nodales, debido ahora a los movimientos prescritos no nulos.

Resolviendo se obtienen los movimientos incógnitas:

$$\begin{bmatrix} u_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 4 \end{bmatrix}^T \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

y el vector de movimientos global resulta:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 4 & -9 & 4 \end{bmatrix}^T \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

En este caso, las reacciones son nulas, los esfuerzos también. Al tratarse de una estructura estáticamente determinada, los movimientos impuestos, tales como asentamientos de los apoyos, no modifican los sistemas de fuerzas (internas o externas) (Figura 8.13b).

8.8.2 Movimientos prescritos según ejes locales

En algunos casos, las condiciones de contorno no están prescritas según los ejes globales de referencia, sino según otros ejes locales que podríamos llamar "de nudo".

Por ejemplo, en la Figura 8.14, el nudo 2 tiene prescrito el movimiento $v_2' = 0$ según el eje y', del sistema local del nudo 2.

La ecuación matricial global de la estructura (en ejes globales) será:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} \tag{8.56}$$

Como las condiciones de apoyo en el nudo 2 están referidas a los ejes locales (x', y'), es necesario transformar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en dicho nudo al sistema local del nudo. Utilizando las transformaciones:

$$\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{T}}\,\mathbf{f}_2^{\prime} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{d}_2 = \widehat{\mathbf{T}}\,\mathbf{d}_2^{\prime} \tag{8.57}$$

donde $\widehat{\mathbf{T}}$ es la matriz de transformación del sistema (x', y') al sistema global (X, Y), se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \widehat{\mathbf{T}}\ \mathbf{d}_2^{\prime} \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \widehat{\mathbf{T}}\ \mathbf{f}_2^{\prime} \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} \tag{8.58}$$

Premultiplicando la segunda ecuación por $\widehat{\mathbf{T}}^{-1} = \widehat{\mathbf{T}}^T$ y reordenando, queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12}\widehat{\mathbf{T}} & \mathbf{k}_{13} \\ \widehat{\mathbf{T}}^T\mathbf{k}_{21} & \widehat{\mathbf{T}}^T\mathbf{k}_{22}\widehat{\mathbf{T}} & \widehat{\mathbf{T}}^T\mathbf{k}_{23} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32}\widehat{\mathbf{T}} & \mathbf{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2^{\prime} \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2^{\prime} \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} \tag{8.59}$$

Puede observarse que: (a) La matriz resultante es simétrica, ya que, por ejemplo, $(\mathbf{k}_{12}\widehat{\mathbf{T}})^T = \widehat{\mathbf{T}}^T\mathbf{k}_{21}$, (b) las fuerzas aplicadas al nudo 2, $\mathbf{f}_2^{\prime}$, deben referirse al sistema local del nudo y (c) los movimientos del nudo 2, $\mathbf{d}_2^{\prime}$, se obtienen en el sistema local.

La primera ecuación expresa el equilibrio del nudo 1, referido al sistema global, y queda igual a:

$$\mathbf{k}_{11}\mathbf{d}_1 + \mathbf{k}_{12}\widehat{\mathbf{T}}\,\mathbf{d}_2^{\prime} + \mathbf{k}_{13}\mathbf{d}_3 = \mathbf{f}_1 \tag{8.60}$$

La segunda ecuación expresa el equilibrio del nudo 2, referido al sistema local del nudo 2, y queda igual a:

$$\widehat{\mathbf{T}}^T\mathbf{k}_{21}\mathbf{d}_1 + \widehat{\mathbf{T}}^T\mathbf{k}_{22}\widehat{\mathbf{T}}\,\mathbf{d}_2^{\prime} + \widehat{\mathbf{T}}^T\mathbf{k}_{23}\,\mathbf{d}_3 = \mathbf{f}_2^{\prime} \tag{8.61}$$

y sobre esta ecuación se pueden imponer directamente las condiciones de contorno de la forma señalada en el apartado precedente.

Ejemplo 8.8.2.1

Resolver la estructura de la Figura 8.14a sometida a las cargas que se indican, teniendo en cuenta que el plano del apoyo 2 forma un ángulo $\alpha = 45^o$ con la horizontal. Las propiedades mecánicas de las barras y las cargas aplicadas en el nudo 3 son las mismas que las del Ejemplo 8.3.1.

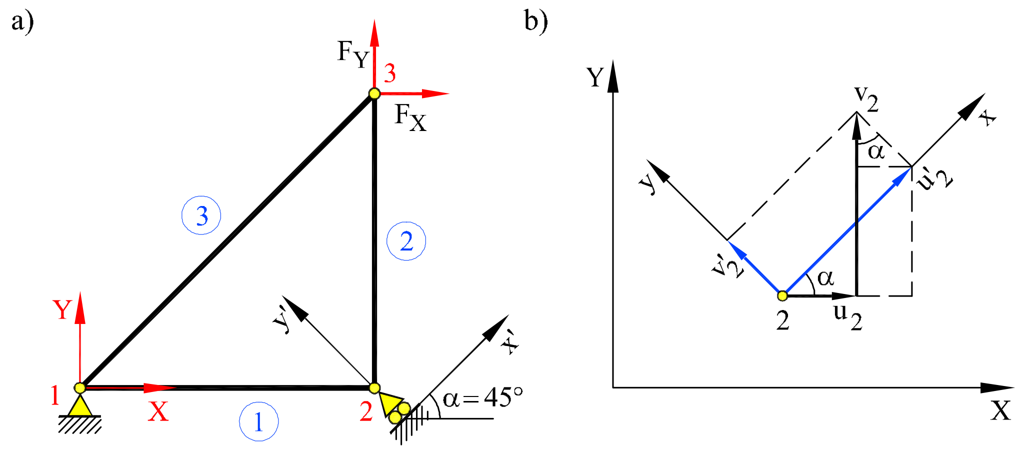


Fig. 8.14: (a) Estructura del Ejemplo 8.8.2.1 (b) sistema global y local del nudo 2

El sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos de la estructura (ver Ejemplo 8.5.1.1) es:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}$$

Los movimientos prescritos por los apoyos son, $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ y $v_2' = 0$. La condición de deslizamiento del nudo 2 está prescrita según los ejes locales de dicho nudo, movimiento nulo según y' (Figura 8.14a).

Teniendo en cuenta que el sistema global (X, Y) y el sistema local del nudo 2 (x', y') forman un ángulo $\alpha = 45^o$ (Figura 8.14b), la matriz de transformación $\widehat{\mathbf{T}}$ es:

$$\widehat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a lo anterior y aplicando la Ec. (8.59) se obtiene:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & -7,07 & 7,07 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -7,07 & 0 & 7,5 & -2,5 & 0 & -3,54 \\ 7,07 & 0 & -2,5 & 7,5 & 0 & -3,54 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & -3,54 & -3,54 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u'_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ 0 \\ F'_{y'2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde los términos de la matriz de rigidez se expresan en kN/m, los movimientos en metros y las fuerzas externas en kN. Nótese que en el sistema global modificado, los movimientos y las fuerzas del nudo 2 están referidos al sistema local de dicho nudo.

Eliminando las filas y columnas 1, 2 y 4, correspondientes a los movimientos prescritos, se obtiene el sistema global reducido:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 7,50 & 0 & -3,54 \\ 0 & 10 & 10 \\ -3,54 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se obtienen los movimientos incógnita:

$$\begin{bmatrix} u'_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1,4 & 5,0 & -3,0 \end{bmatrix}^T \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

Recuperando el sistema global modificado, se calculan ahora las reacciones:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & -7,07 & 7,07 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -7,07 & 0 & 7,5 & -2,5 & 0 & -3,54 \\ 7,07 & 0 & -2,5 & 7,5 & 0 & -3,54 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & -3,54 & -3,54 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0014 \\ 0 \\ 0,005 \\ -0,003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1,41 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{kN}$$

Las reacciones en el nudo 1 están referidas al sistema global de referencia pero la reacción del nudo 2 está referida al sistema local del nudo 2 (Figura 8.14a).

Una vez conocidos los movimientos de la estructura y aplicando la Ec.(8.53), pueden calcularse los esfuerzos en las barras obteniéndose:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ \\ F'^{(1)}_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{bmatrix} \text{kN} \quad (\text{C}) \qquad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F'^{(2)}_{x2} \\ \\ F'^{(2)}_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{bmatrix} \text{kN} \quad (\text{C})$$

$$\mathbf{f}'^{(3)} = \begin{bmatrix} F'^{(3)}_{x1} \\ \\ F'^{(3)}_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{kN} \quad (\text{T})$$

Las barras 1 y 2 están comprimidas y la barra 3 está traccionada. En la Figura 8.15 se muestran las reacciones, la ley de axiles y la deformada de la estructura.

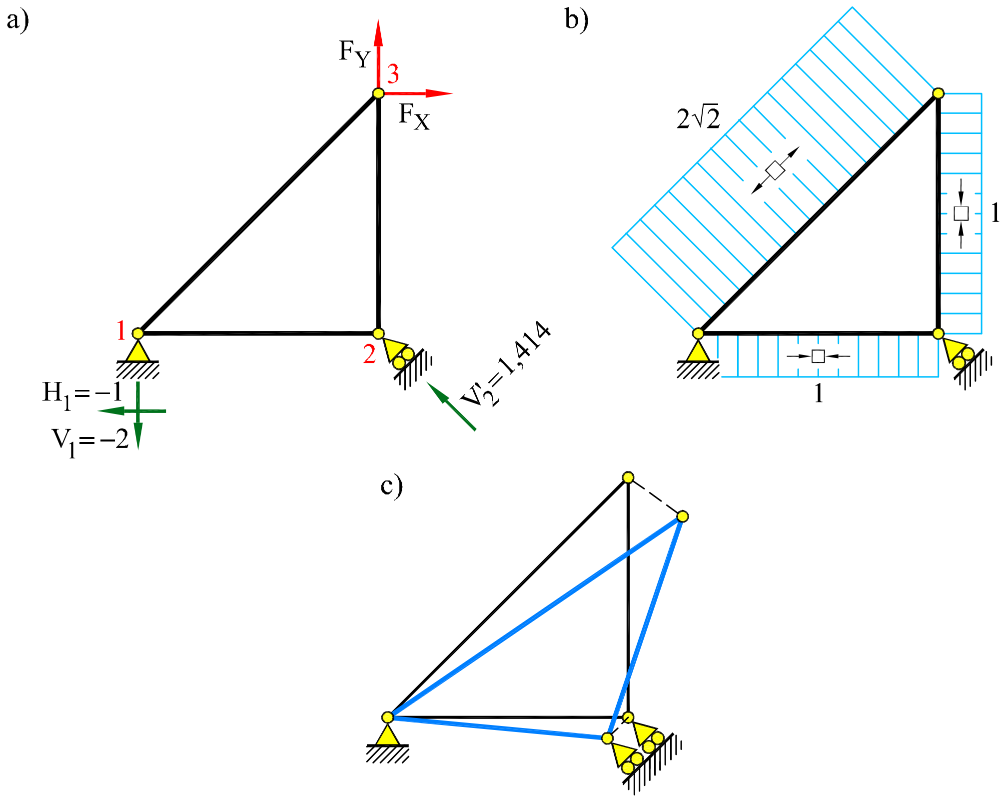


Fig. 8.15: (a) Reacciones (b) ley de axiles y (c) deformada del Ejemplo 8.8.2.1

8.8.3 Apoyos elásticos

En algunos casos, la unión entre la estructura y la sustentación es de tal tipo que en los nudos "apoyados" no se conocen *a priori* ni los movimientos ni las cargas exteriores actuantes. Tal es el caso, por ejemplo, de los llamados *apoyos elásticos*, donde la reacción de la sustentación, que es parte de la carga exterior sobre el nudo, es función lineal del movimiento de éste (Figura 8.16a) . El tratamiento de los apoyos elásticos es particularmente sencillo por el método de rigidez, tal como se explica a continuación.

Consideremos, de forma general, que el grado de libertad $i-$ésimo está vinculado a un apoyo elástico que tiene como ecuación elástica:

$$R_i \;=\; -k_i\, d_i \tag{8.62}$$

en la que R_i es la reacción correspondiente, k_i es la constante elástica del apoyo y d_i es el grado de libertad incógnita (Figura 8.16b).

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_i \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_i - k_i\, d_i \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} \tag{8.63}$$

donde F_i es la fuerza exterior actuante sobre el grado de libertad i.

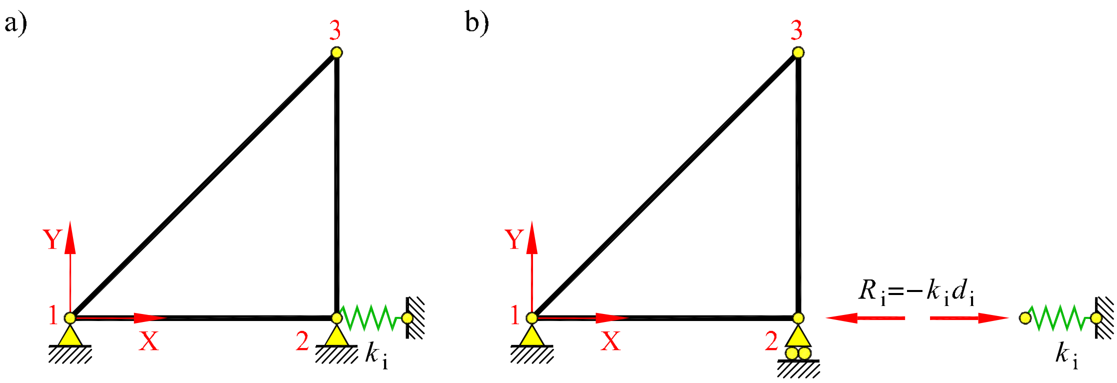


Fig. 8.16: Apoyo elástico

Se puede trasladar el término $-k_i\, d_i$, de valor desconocido, al miembro de la izquierda, resultando:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii}+k_i & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_i \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} \tag{8.64}$$

Por tanto, los apoyos elásticos se introducen sin más que añadir la rigidez correspondiente al apoyo al término de la diagonal que corresponde a la ecuación en cuestión. Esto equivale a considerar el apoyo como un elemento resistente más de la estructura y "ensamblar" de forma apropiada su contribución. Se deja al lector interesado la deducción del procedimiento para tratar los apoyos elásticos en ejes locales de nudo.

El hecho de añadir términos de rigidez adicionales a la matriz de rigidez global de la estructura, en posiciones adecuadas y de magnitud suficiente, puede evitar por sí solo la singularidad de la matriz de rigidez. En tales casos, denominados de *sustentación elástica,* se puede resolver el problema sin prescribir ningún grado de libertad.

Algunos programas de cálculo utilizan este procedimiento para imponer las condiciones de apoyo del tipo $d_i = 0$. Para ello, suman en el término $i-$ésimo de la matriz global un término de "rigidez" muy grande, $k_i \to \infty$. Si la condición de apoyo es del tipo $d_i = \overline{d_i} \neq 0$, es necesario modificar también el término de fuerzas sumándole una "reacción" de valor $k_i\overline{d_i}$ (con $k_i \to \infty$). Este procedimiento para imponer desplazamientos prescritos se puede usar también, modificado adecuadamente, trabajando en ejes locales de nudo.

Ejemplo 8.8.3.1

Resolver la estructura de la Figura 8.17, en la que el apoyo 2 es una articulación con un muelle vertical de constante $k = 5 \cdot 10^2$ kN/m. Las propiedades mecánicas de las barras y las cargas son idénticas a las del Ejemplo 8.3.1.

La única diferencia con el Ejemplo 8.3.1 es el tipo de apoyo del nudo 2. El proceso de solución es idéntico al seguido en dicho ejemplo.

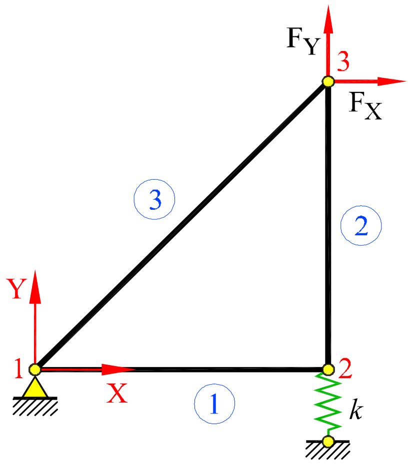


Fig. 8.17: Estructura del Ejemplo 8.8.3.1

Introduciendo las condiciones de apoyo, $u_1 = 0$ m y $v_1 = 0$ m y las fuerzas externas en los nudos, $F_{X2} = 0$ kN, $F_{X3} = 2$ kN y $F_{Y3} = 1$ kN, en el sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos (ver Ejemplo 8.5.1.1), se obtiene:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ 0 \\ -kv_2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reemplazando ahora $k = 5$ kN/m, y pasando el término correspondiente al miembro de la izquierda, se tiene:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{10} & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eliminando las filas y columnas 1 y 2, correspondientes a los movimientos conocidos,

el sistema global reducido es:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se obtienen los movimientos incógnitas:

$$\begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}^T \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

Una vez conocidos los movimientos de la estructura se calculan las reacciones a partir del sistema global de ecuaciones completo:

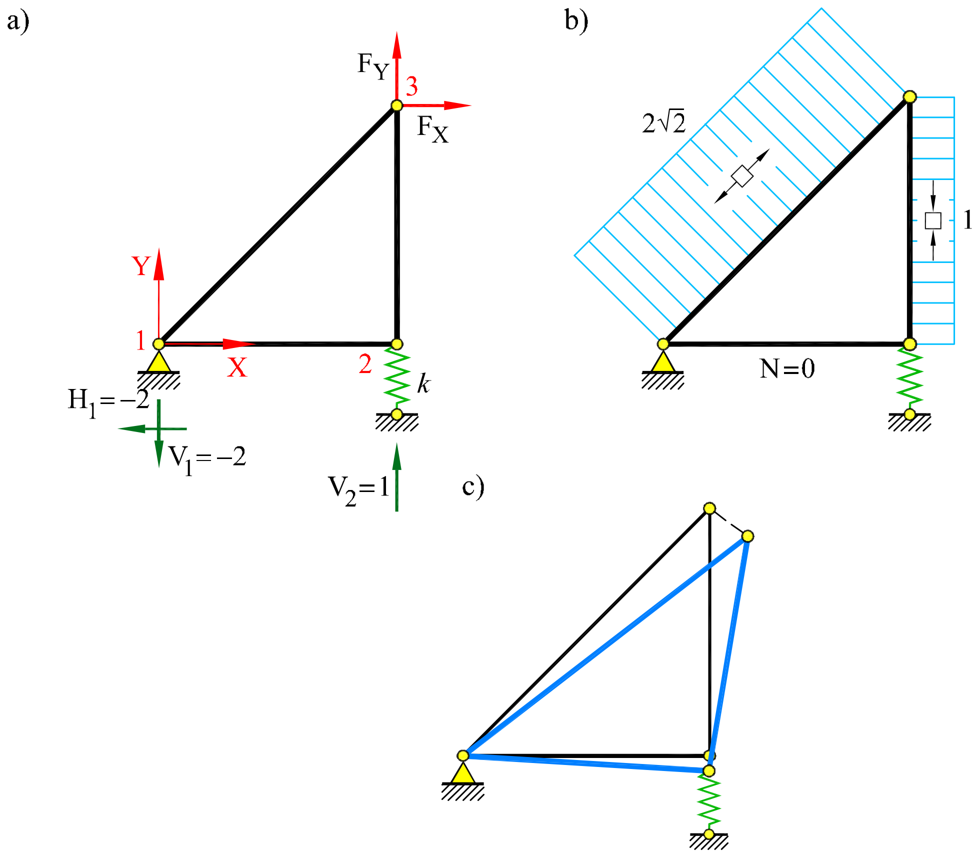


Fig. 8.18: Ejemplo 8.8.3.1: (a) reacciones (b) ley de axiles (c) deformada

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,002 \\ 0,006 \\ -0,004 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{kN}$$

En la Figura 8.18 se muestran las reacciones, las leyes de axiles y la deformada de la estructura. Puede verse que las reacciones coinciden con las obtenidas al resolver el Ejemplo 8.7.2.1 porque la estructura es isostática. De igual manera, los esfuerzos en las barras coinciden con los obtenidos en el Ejemplo 8.7.3.1.

8.9 Estructuras Articuladas Espaciales

Las estructuras articuladas espaciales pueden analizarse por extensión de las expresiones obtenidas en las articuladas planas. Sea una pieza recta de una estructura articulada espacial, de longitud l, módulo de elasticidad E y sección transversal constante A, tal como se muestra en la Figura 8.19. Consideremos los esfuerzos axiles que actúan sobre

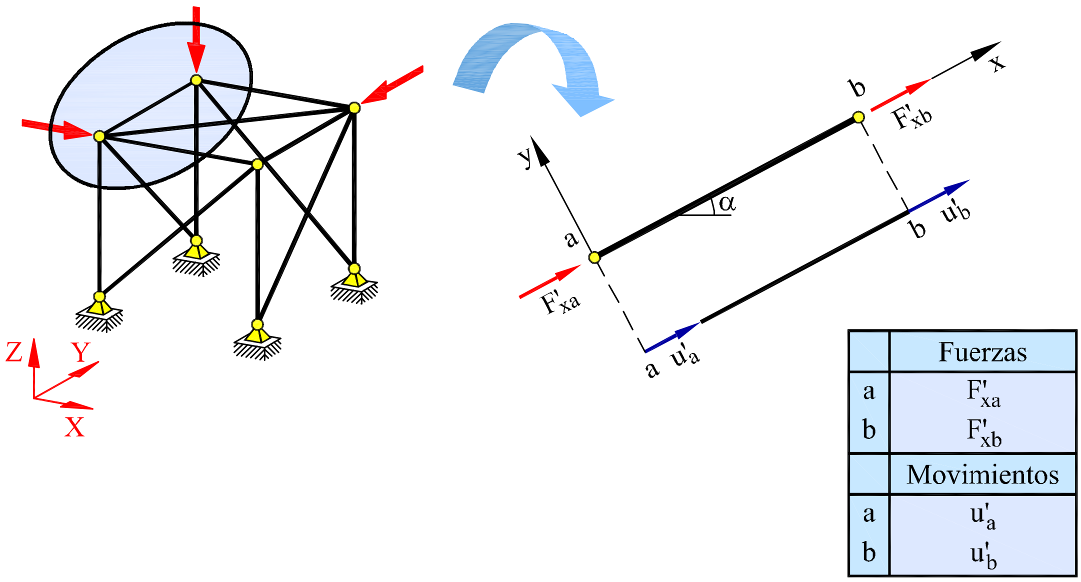


Fig. 8.19: Estructura articulada espacial: fuerzas y movimientos

sus extremos a y b, y los movimientos de éstos. Las ecuaciones elásticas son idénticas a las de la Sección 8.4.1:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix} \tag{8.65}$$

con:

$$\mathbf{f}'_a = F'_{xa} \qquad \mathbf{f}'_b = F'_{xb} \qquad \mathbf{d}'_a = u'_a \qquad \mathbf{d}'_b = u'_b$$

y

$$\mathbf{k}'_{aa} = \mathbf{k}'_{bb} = \frac{EA}{l} = k \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}'_{ab} = \mathbf{k}'_{ba} = -\frac{EA}{l} = -k$$

Siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 8.4.4, estas ecuaciones se transforman al sistema global y resultan:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{ba} & \mathbf{k}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{bmatrix} \tag{8.66}$$

con:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_a \quad ; \quad \mathbf{f}_b = \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_b \quad ; \quad \mathbf{d}_a = \mathbf{T}\,\mathbf{d}'_a \quad ; \quad \mathbf{d}_b = \mathbf{T}\,\mathbf{d}'_b$$

y:

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{T}\mathbf{k}'_{ij}\mathbf{T}^T \tag{8.67}$$

En las expresiones anteriores la matriz $\mathbf{T}$ tiene por componentes los cosenos directores del eje local x respecto de los ejes globales (X, Y, Z):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} Xx \\ Yx \\ Zx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix} \tag{8.68}$$

Nótese que las estructuras articuladas espaciales tienen en ejes locales un solo grado de libertad por nudo, que se transforma en tres grados de libertad por nudo en ejes globales.

Se tiene que:

$$\mathbf{k}_{aa} = \mathbf{k}_{bb} = \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{k}_{ab} = \mathbf{k}_{ba} = -\mathbf{k} \tag{8.69}$$

con:

$$\mathbf{k} = k \begin{bmatrix} \widehat{l}^2 & \widehat{l}\,\widehat{m} & \widehat{l}\,\widehat{n} \\ \widehat{m}\,\widehat{l} & \widehat{m}^2 & \widehat{m}\,\widehat{n} \\ \widehat{n}\,\widehat{l} & \widehat{n}\,\widehat{m} & \widehat{n}^2 \end{bmatrix} \tag{8.70}$$

Por tanto, en una estructura articulada espacial, las ecuaciones elásticas de la barra, en ejes globales, son:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{bmatrix} \tag{8.71}$$

El procedimiento de ensamblaje, la imposición de los movimientos prescritos, la determinación de los movimientos, de las reacciones y de los esfuerzos es análogo al seguido en las estructuras articuladas planas. A continuación, se resuelven algunos ejemplos.

Ejemplo 8.9.1

Aplicando el Método Directo de Rigidez, resolver la estructura de la Figura 8.20a sometida a la carga $F\,(F_X, F_Y, F_Z)$ que se indica. La rigidez a axil EA de las barras es constante. Datos: $a = 6\,\text{m}$, $A = 20\,\text{cm}^2$, $E = 200$ GPa, $F_X = -250\,\text{kN}$, $F_Y = -150\,\text{kN}$, $F_Z = -300\,\text{kN}$.

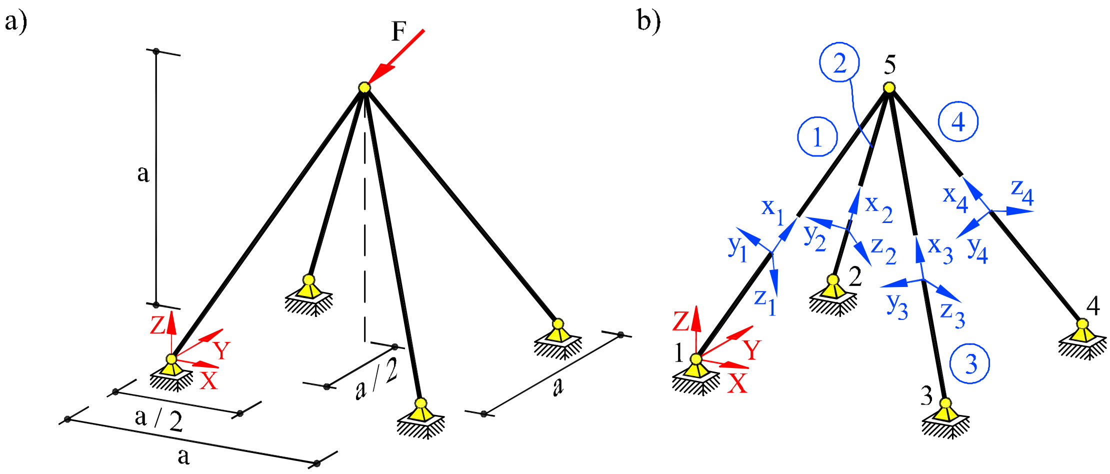


Fig. 8.20: Ejemplo 8.9.1: (a) geometría (b) numeración y sistemas de referencia

Para resolver la estructura, se adopta la numeración de nudos y barras, y los sistemas de referencia global y locales definidos en la Figura 8.20b. En los sistemas locales sólo la orientación de los ejes x_i, en la dirección de los respectivos ejes de las barras, está predeterminada; la dirección de los ejes y_i, z_i no aparece en el desarrollo.

Se calculan las matrices de rigidez elementales de las barras en el sistema local de coordenadas respectivo. Las barras tienen la misma longitud $l = 7,348\,\text{m}$, y la rigidez a axil, $EA = 40 \cdot 10^4$ kN, es constante. Por tanto, la matriz de rigidez elemental en el sistema local es idéntica para todas ellas:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 5,44 & -5,44 \\ -5,44 & 5,44 \end{bmatrix}$$

donde la rigidez de las barras $k = EA/l$ se expresa en kN/ m.

Teniendo en cuenta la matriz $\mathbf{T}$ de transformación de coordenadas correspondiente y la expresión Ec. (8.71), se calcula la matriz de rigidez elemental en el sistema global para cada barra.

Así, por ejemplo, para la barra 1, la matriz de transformación $\mathbf{T}$, formada por los cosenos directores de la dirección x_1, es:

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,4082 \\ 0,4082 \\ 0,8160 \end{bmatrix}$$

y la matriz global de rigidez de la barra es:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(1)} & -\mathbf{k}^{(1)} \\ -\mathbf{k}^{(1)} & \mathbf{k}^{(1)} \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{k}^{(1)}$ (Ec. (8.70)):

$$\mathbf{k}^{(1)} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 9,07 & 9,07 & 18,1 \\ 9,07 & 9,07 & 18,1 \\ 18,1 & 18,1 & 36,3 \end{bmatrix}$$

Para las barras restantes se tiene:
Barra 2:

$$\mathbf{T}^{(2)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,4082 \\ -0,4082 \\ 0,8160 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}^{(2)} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 9,07 & -9,07 & 18,1 \\ -9,07 & 9,07 & -18,1 \\ 18,1 & -18,1 & 36,3 \end{bmatrix}$$

Barra 3:

$$\mathbf{T}^{(3)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0,4082 \\ 0,4082 \\ 0,8160 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}^{(3)} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 9,07 & -9,07 & -18,1 \\ -9,07 & 9,07 & 18,1 \\ -18,1 & 18,1 & 36,3 \end{bmatrix}$$

Barra 4:

$$\mathbf{T}^{(4)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{bmatrix} -0,4082 \\ -0,4082 \\ 0,8160 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^{(4)} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 9,07 & 9,07 & -18,1 \\ 9,07 & 9,07 & -18,1 \\ -18,1 & -18,1 & 36,3 \end{bmatrix}$$

La matriz global de la estructura se obtiene planteando las condiciones de equilibrio de fuerzas en los nudos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}^{(3)} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}^{(4)} & -\mathbf{k}^{(4)} \\ -\mathbf{k}^{(1)} & -\mathbf{k}^{(2)} & -\mathbf{k}^{(3)} & -\mathbf{k}^{(4)} & \mathbf{k}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{d}_5 \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{k}_{55} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)} + \mathbf{k}^{(4)}$.

En el sistema de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos se introducen ahora los movimientos prescritos. Los nudos 1, 2, 3 y 4 tienen impedidos los desplazamientos en las tres direcciones (apoyo fijo). Eliminando las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad prescritos (1 al 12), se obtiene el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$\mathbf{f}_5 = \mathbf{k}_{55} \cdot \mathbf{d}_5$$

Desarrollado, se tiene:

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 36,28 & 0 & 0 \\ 0 & 36,28 & 0 \\ 0 & 0 & 36,28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -250 \\ -150 \\ -300 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN, los movimientos en metros y los coeficientes de la matriz de rigidez se expresan en kN/m. El sistema de ecuaciones es diagonal y su solución proporciona los movimientos incógnita:

$$\mathbf{d}_5 = \begin{bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,89 \\ -4,13 \\ -2,07 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

En la Figura 8.21 se muestra la deformada de la estructura.

Las reacciones se calculan partiendo del sistema de ecuaciones completo y de acuerdo a la Ec. (8.51).

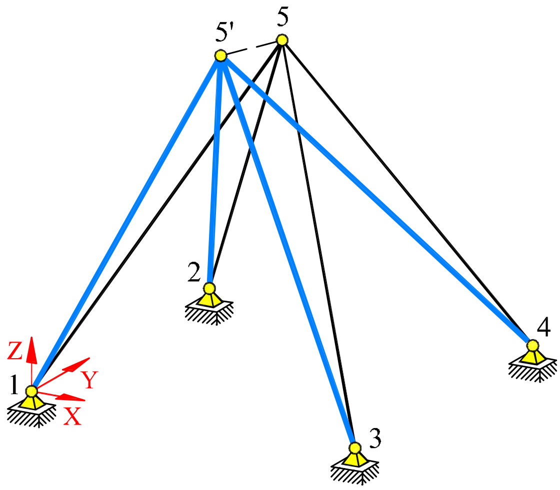


Fig. 8.21: Deformada de la estructura del Ejemplo 8.9.1

Por ejemplo, para el apoyo 1, la componente de la reacción según el eje X es:

$$\begin{aligned} F_{X1} &= \sum_{j=1}^{15} K_{ij}\, d_j \\ &= 10^3 \cdot [(-9,07)\, u_5 + (-9,07)\, v_5 + (-18,1)\, w_5] \\ &= 137,4\,\text{kN} \end{aligned}$$

Para las restantes reacciones se tiene:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 137,4 \\ 137,4 \\ 275,0 \end{bmatrix} \text{kN} \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62,5 \\ -62,5 \\ 125,0 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} F_{X3} \\ F_{Y3} \\ F_{Z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12,4 \\ -12,4 \\ 25,0 \end{bmatrix} \text{kN} \qquad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} F_{X4} \\ F_{Y4} \\ F_{Z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62,5 \\ 62,5 \\ -125,0 \end{bmatrix} \text{kN}$$

Los axiles en las barras se calculan aplicando las Ecs. (8.52a) y (8.52b) y teniendo en cuenta la matiz $\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \widehat{l} & \widehat{m} & \widehat{n} \end{bmatrix}$ para cada barra:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{l}u_a + \widehat{m}v_a + \widehat{n}w_a \\ \widehat{l}u_b + \widehat{m}v_b + \widehat{n}w_b \end{bmatrix}$$

Así, por ejemplo, para la barra 1, teniendo en cuenta que $\mathbf{d}_1 = 0$, el esfuerzo axil es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}'^{(1)} &= \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{x5} \end{bmatrix} = 5,44 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} -(0,4082u_5 + 0,4082v_5 + 0,816w_5) \\ (0,4082u_5 + 0,4082v_5 + 0,816w_5) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 337 \\ -337 \end{bmatrix} \text{kN} \quad \text{(C)}
\end{aligned}$$

Procediendo de igual manera para las barras restantes, se tiene:

$$\mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} 153 \\ -153 \end{bmatrix} \text{kN (C)} \qquad \mathbf{f}'^{(3)} = \begin{bmatrix} 30,6 \\ -30,6 \end{bmatrix} \text{kN (C)} \qquad \mathbf{f}'^{(4)} = \begin{bmatrix} -153 \\ 153 \end{bmatrix} \text{kN} \quad \text{(T)}$$

Los esfuerzos axiles en las barras 1, 2, y 3 son de compresión, mientras que en la barra 4 el axil es de tracción.

Ejemplo 8.9.2

Aplicando el Método Directo de Rigidez, resolver la estructura de la Figura 8.22a sometida a las cargas que se indican. La rigidez a axil EA de las barras es constante. Datos: $L = 6\,\text{m}$, $A = 6\,\text{cm}^2$, $E = 200$ GPa, $|F_X| = |F_Y| = |F_Z| = 80\,\text{kN}$.

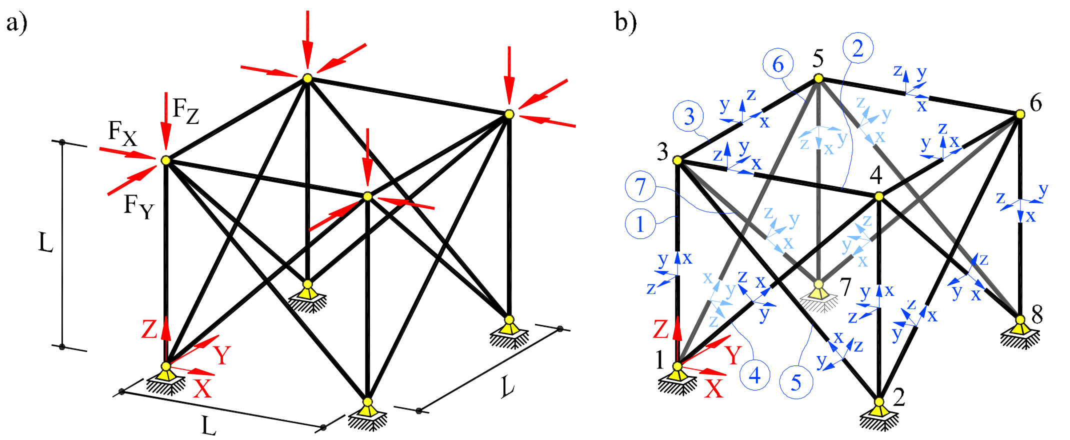


Fig. 8.22: (a) Estructura del Ejemplo 8.9.2 (b) numeración y sistemas de referencia

En la Figura 8.22b se muestra la numeración de nudos y barras y los sistemas de referencia global y locales. Las barras 1, 2, y 3 son paralelas a los ejes de referencia y las barras 4, 5, 6 y 7 son diagonales. Las barras restantes son simétricas (Figura 8.22b).

Las barras que forman la estructura tienen diferente longitud; las que son paralelas a los ejes de referencia globales son de longitud L, mientras que las diagonales tienen una longitud $\sqrt{2}L$. La matriz de rigidez elemental, en el sistema local, es diferente para cada longitud de barra:

(a1) *Matriz de rigidez elemental de las barras* 1, 2, 3 y simétricas:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(a2) *Matriz de rigidez elemental de las diagonales* 4, 5, 6, 7 y simétricas:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

donde la rigidez de las barras $k = EA/L^{(i)}$ se expresa en $\mathrm{kN/\,m}$.

(b) Teniendo en cuenta la matriz $\mathbf{T}$ de transformación de coordenadas correspondiente a cada pieza, formada por los cosenos directores de los ejes x_i, y la expresión Ec. (8.71), se calcula la matriz de rigidez elemental de cada barra, en el sistema global:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(i)} & -\mathbf{k}^{(i)} \\ -\mathbf{k}^{(i)} & \mathbf{k}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Barra 1:

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}^{(1)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Barra 2:

$$\mathbf{T}^{(2)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}^{(2)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 3:

$$\mathbf{T}^{(3)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}^{(3)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 4:

$$\mathbf{T}^{(4)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^{(4)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Barra 5:

$$\mathbf{T}^{(5)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(5)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^{(5)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Barra 6:

$$\mathbf{T}^{(6)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^{(6)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Barra 7:

$$\mathbf{T}^{(7)} = \begin{bmatrix} \widehat{l} \\ \widehat{m} \\ \widehat{n} \end{bmatrix}^{(7)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^{(7)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta las matrices elementales de rigidez de las barras y la expresión (8.39), el sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos de la estructura es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \\ \mathbf{f}_6 \\ \mathbf{f}_7 \\ \mathbf{f}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & 0 & -\mathbf{k}^{(1)} & -\mathbf{k}^{(4)} & -\mathbf{k}^{(6)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{22} & -\mathbf{k}^{(5)} & -\mathbf{k}^{(1)} & 0 & -\mathbf{k}^{(6)} & 0 & 0 \\ -\mathbf{k}^{(1)} & -\mathbf{k}^{(5)} & \mathbf{k}_{33} & -\mathbf{k}^{(2)} & -\mathbf{k}^{(3)} & 0 & -\mathbf{k}^{(7)} & 0 \\ -\mathbf{k}^{(4)} & -\mathbf{k}^{(1)} & -\mathbf{k}^{(2)} & \mathbf{k}_{44} & 0 & -\mathbf{k}^{(3)} & 0 & -\mathbf{k}^{(7)} \\ -\mathbf{k}^{(6)} & 0 & -\mathbf{k}^{(3)} & 0 & \mathbf{k}_{55} & -\mathbf{k}^{(2)} & -\mathbf{k}^{(1)} & -\mathbf{k}^{(5)} \\ 0 & -\mathbf{k}^{(6)} & 0 & -\mathbf{k}^{(3)} & -\mathbf{k}^{(2)} & \mathbf{k}_{66} & -\mathbf{k}^{(4)} & -\mathbf{k}^{(1)} \\ 0 & 0 & -\mathbf{k}^{(7)} & 0 & -\mathbf{k}^{(1)} & -\mathbf{k}^{(4)} & \mathbf{k}_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{k}^{(7)} & -\mathbf{k}^{(5)} & -\mathbf{k}^{(1)} & 0 & \mathbf{k}_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{d}_5 \\ \mathbf{d}_6 \\ \mathbf{d}_7 \\ \mathbf{d}_8 \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{k}_{11} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(4)} + \mathbf{k}^{(6)} & \mathbf{k}_{55} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)} + \mathbf{k}^{(5)} + \mathbf{k}^{(6)} \\
\mathbf{k}_{22} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(5)} + \mathbf{k}^{(6)} & \mathbf{k}_{66} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)} + \mathbf{k}^{(4)} + \mathbf{k}^{(6)} \\
\mathbf{k}_{33} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)} + \mathbf{k}^{(5)} + \mathbf{k}^{(7)} & \mathbf{k}_{77} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(4)} + \mathbf{k}^{(7)} \\
\mathbf{k}_{44} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)} + \mathbf{k}^{(4)} + \mathbf{k}^{(7)} & \mathbf{k}_{88} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(5)} + \mathbf{k}^{(7)}
\end{array}$$

Los grados de libertad de la estructura son $8 \times 3 = 24$, por tanto, la matriz tiene 24 filas y 24 columnas. Nótese que la matriz global de rigidez es simétrica.

Introduciendo los grados de libertad prescritos se eliminan las ecuaciones correspondientes. En la Figura 8.23 se muestra de forma esquemática el proceso de eliminación

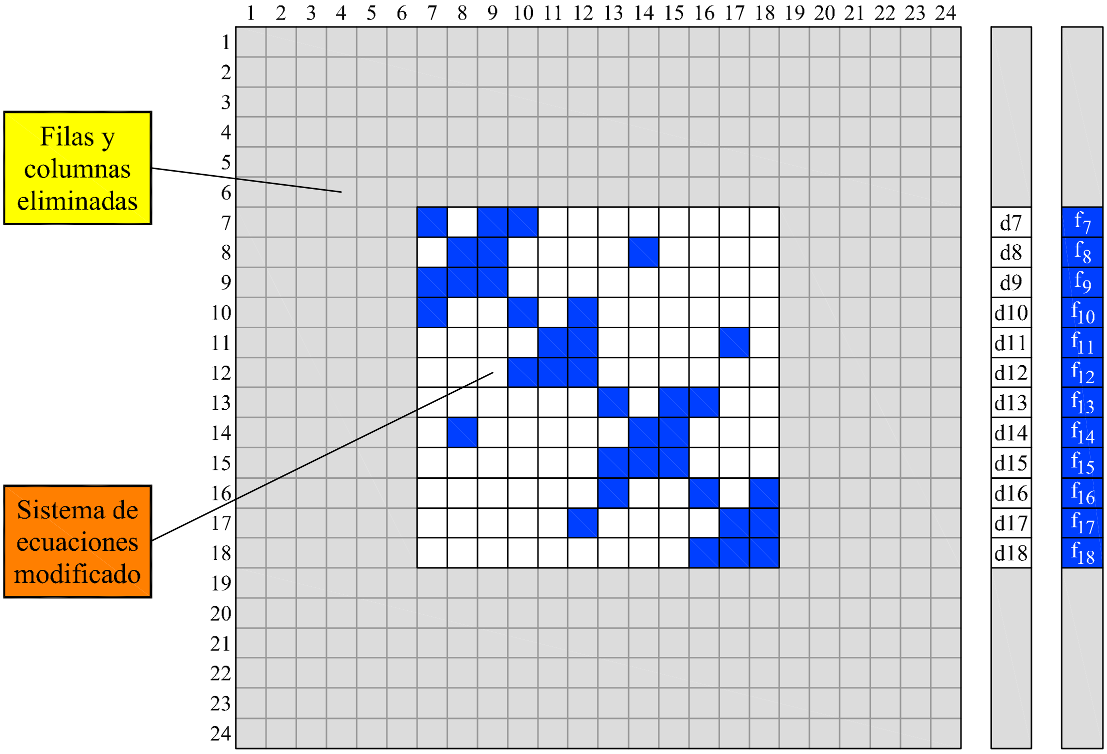


Fig. 8.23: Esquema de la matriz de rigidez global

descrito y el sistema de ecuaciones reducido obtenido. Se marcan en azul los coeficientes no nulos de la matriz de rigidez.

Otra forma de resolver el problema es considerar las condiciones de simetría. La estructura es doblemente simétrica, en cuanto a geometría y cargas. Por tanto, el grado de indeterminación cinemática se reduce de 12 a 3. Si se tiene en cuenta la doble simetría, los movimientos de los nudos deben ser simétricos. Entonces, basta conocer los movimientos de uno de ellos para resolver el problema.

Si se elige, por ejemplo, el nudo 3 y se plantea la condición de equilibrio de fuerzas en el nudo (Ec. (8.38)), se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_3 &= (\mathbf{f}_b)^{(1)} + (\mathbf{f}_a)^{(2)} + (\mathbf{f}_a)^{(3)} + (\mathbf{f}_b)^{(5)} + (\mathbf{f}_a)^{(7)} \\ &= -\mathbf{k}^{(1)}\mathbf{d}_1 + \mathbf{k}^{(1)}\mathbf{d}_3 + \mathbf{k}^{(2)}\mathbf{d}_3 - \mathbf{k}^{(2)}\mathbf{d}_4 + \mathbf{k}^{(3)}\mathbf{d}_3 - \mathbf{k}^{(3)}\mathbf{d}_5 + \\ &\quad -\mathbf{k}^{(5)}\mathbf{d}_2 + \mathbf{k}^{(5)}\mathbf{d}_3 + \mathbf{k}^{(7)}\mathbf{d}_3 - \mathbf{k}^{(7)}\mathbf{d}_7\end{aligned}$$

En la expresión anterior, $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ y $\mathbf{d}_7$ son nulos, por ser los movimientos prescritos correspondientes a los apoyos 1, 2 y 7.

Además, por simetría:

$$\begin{array}{ccccccc} u_3 & = -u_4 & = & u_5 & = -u_6 \\ v_3 & = & v_4 & = -v_5 & = -v_6 \\ w_3 & = & w_4 & = & w_5 & = & w_6 \end{array} \qquad \text{(a1)}$$

La ecuación correspondiente al equilibrio de fuerzas en el nudo 3 es:

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{k}_{33}\mathbf{d}_3 + \mathbf{k}_{34}\mathbf{d}_4 + \mathbf{k}_{35}\mathbf{d}_5 \qquad \text{(a2)}$$

donde $\mathbf{f}_3$ es el vector de fuerzas externas en el nudo 3, $\mathbf{d}_i$ es el vector de movimientos del nudo i y $\mathbf{k}_{33}$, $\mathbf{k}_{34}$ y $\mathbf{k}_{35}$ son las submatrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{33} &= \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)} + \mathbf{k}^{(5)} + \mathbf{k}^{(7)} \\ &= 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 2,71 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 2,71 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 3,41 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{34} = -\mathbf{k}^{(2)} = -10^4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}_{35} = -\mathbf{k}^{(3)} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde los coeficientes se expresan en kN/m. Sustituyendo en la Ec. (a2) se tiene:

$$\begin{aligned} 10^4 \cdot (4,71u_3 + 0v_3 - 0,707w_3) &= 80 \text{ kN} \\ 10^4 \cdot (0u_3 + 4,71v_3 - 0,707w_3) &= 80 \text{ kN} \\ 10^4 \cdot (-0,707u_3 - -0,707v_3 + 3,41w_3) &= -80 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resolviendo, se obtienen los movimientos del nudo 3:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,436 \\ 1,436 \\ -1,751 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

Los movimientos correspondientes a los nudos 4, 5 y 6 se deducen por simetría (Ec.(a1)). En la Figura 8.24 se muestra la deformada de la estructura.

Las reacciones se calculan, a partir del sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos, aplicando la Ec. (8.51). Por ejemplo, la componente de la reacción en el nudo 1, F_{Z1}, según el eje Z, es:

$$\begin{aligned} F_{Z1} &= \sum_{j=1}^{24} K_{3j} d_j \\ &= 10^4 \left[(-2)\, w_3 + \left(-\sqrt{2}/2 \right) (u_4 + w_4 + v_5 + w_5) \right] \\ &= 80\,\text{kN} \quad (\uparrow) \end{aligned}$$

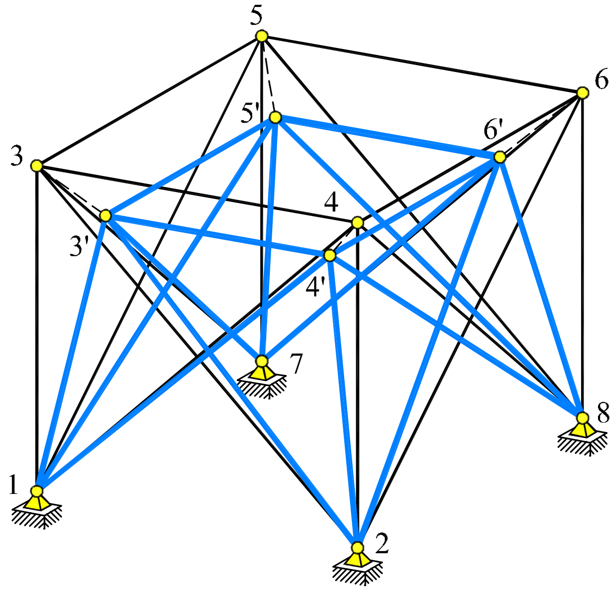


Fig. 8.24: Deformada del Ejemplo 8.9.2

Completando el cálculo de las componentes según los ejes X, Y, la reacción en el nudo 1 es:

$$\begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,5 \\ 22,5 \\ 80 \end{bmatrix} \text{kN}$$

Las reacciones en los apoyos restantes son iguales en valor absoluto y sus sentidos se deducen por simetría.

Los axiles en las barras se calculan aplicando las Ecs. (8.52a) y (8.52b) y teniendo en cuenta la matriz $\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \widehat{l} & \widehat{m} & \widehat{n} \end{bmatrix}$ para cada barra:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{l}u_a + \widehat{m}v_a + \widehat{n}w_a \\ \widehat{l}u_b + \widehat{m}v_b + \widehat{n}w_b \end{bmatrix}$$

Así por ejemplo, para la barra 1, paralela al eje Z, en la que:

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \widehat{l} & \widehat{m} & \widehat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_a = \mathbf{d}_1 = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}_b = \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}^T$$

el esfuerzo axil es:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{x3} \end{bmatrix} = 2\cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w_3 \end{bmatrix} = 2\cdot 10^4 \begin{bmatrix} +1,751 \\ -1,751 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$
$$= \begin{bmatrix} 35 \\ -35 \end{bmatrix} \text{kN} \quad \text{(C)}$$

Procediendo de igual manera para las barras restantes, se tiene:

$$\mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} 57,5 \\ -57,5 \end{bmatrix} \text{kN} \;\; \text{(C)} \qquad \mathbf{f}'^{(3)} = \begin{bmatrix} 57,5 \\ -57,5 \end{bmatrix} \text{kN} \;\; \text{(C)} \qquad \text{y simétricas}$$

$$\mathbf{f}'^{(4)} = \begin{bmatrix} 31,8 \\ -31,8 \end{bmatrix} \text{kN} \qquad \text{(C)} \qquad \text{y diagonales restantes}$$

Los esfuerzos axiles en las barras son todos de compresión.

8.10 Cargas sobre las piezas

En este Capítulo, los ejemplos desarrollados hasta aquí abordan el estudio de estructuras articuladas sometidas a un sistema de fuerzas aplicadas en los nudos. Considere-

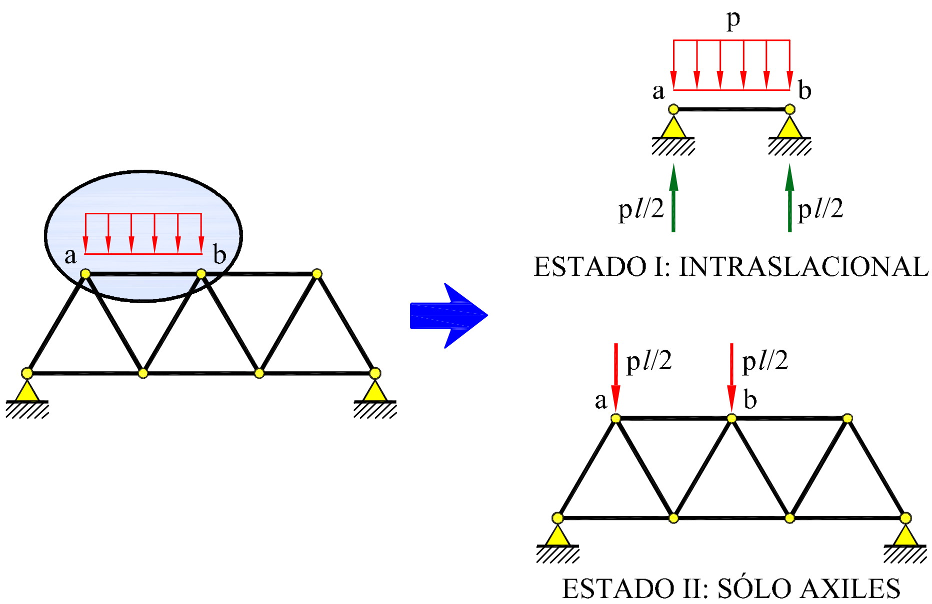


Fig. 8.25: Cargas sobre las barras

mos ahora un caso más general en el que pueda haber cargas actuando sobre las barras (Figura 8.25). De acuerdo con el *principio de superposición* se puede descomponer el sistema de cargas en dos estados que se estudian por separado:

- El estado I consiste en el sistema de cargas actuando sobre la estructura en la que se han impedido los movimientos de los nudos. A este estado se le donomina *intraslacional*. En él, cada pieza puede estudiarse por separado, determinándose las leyes de esfuerzos y las reacciones en los nudos.

- El estado II consiste en aplicar sobre la estructura las reacciones en los nudos obtenidas en el estado anterior, cambiadas de signo. Es un estado de cargas *sólo en los nudos* y produce sólo axiles constantes en las barras.

La suma de las cargas actuando en los estados I y II corresponde a las cargas originales sobre la estructura. El resultado final, en movimientos y esfuerzos, es, según el principio de superposición, igual a la suma de los resultados de los estados:

- Los movimientos de los nudos obtenidos en la resolución del estado II son los de la estructura real, ya que por definición el estado I es intraslacional. La deformada de las piezas se obtienen por superposición de las deformadas de los dos estados.

- Las leyes de esfuerzos y, en particular, los esfuerzos en los extremos de las barras se obtienen sumando los resultados de ambos estados. Las reacciones en los apoyos se obtienen a partir de los esfuerzos en los extremos de las barras que concurren en los apoyos correspondientes.

Ejemplo 8.10.1

Resolver la estructura articulada de la Figura 8.26 sometida a una carga horizontal uniformemente distribuida p sobre la barra 2.

La estructura puede resolverse descomponiendo el estado de cargas en suma de dos estados: (a) estado I (intraslacional) y (b) estado II (cargas sólo en los nudos).

En este caso, el estado I se reduce a resolver la viga biapoyada 2 sometida a la carga p uniformemente repartida. Las reacciones, las leyes de esfuerzos y la deformada correspondientes se muestran en la Figura 8.27.

El estado II consiste en resolver la estructura articulada sometida a cargas sólo en los nudos de valor igual a las reacciones obtenidas en el Estado I y de sentido opuesto. Las reacciones, las leyes de esfuerzos y la deformada se muestran en la Figura 8.28.

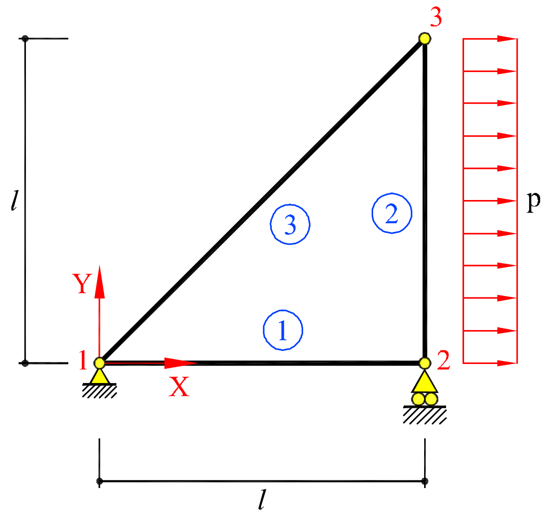


Fig. 8.26: Estructura del Ejemplo 8.10.1

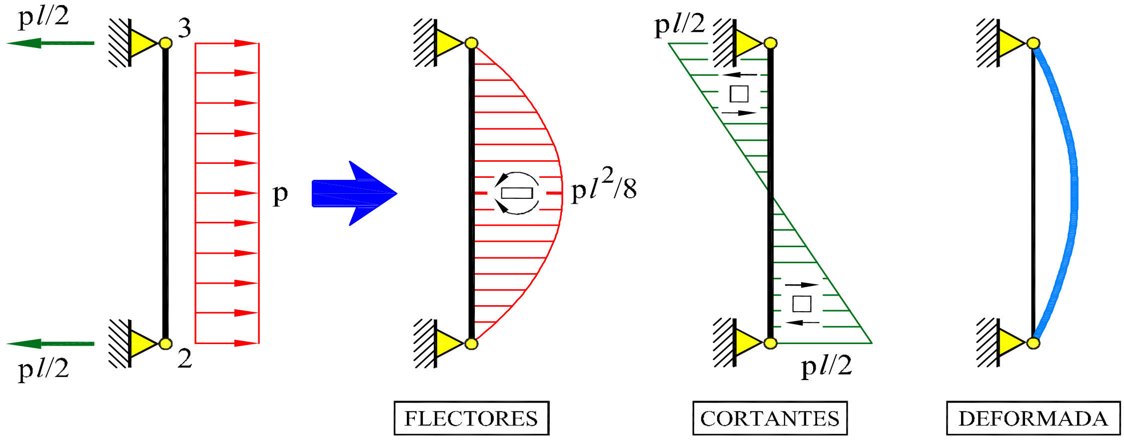


Fig. 8.27: Resolución del estado I del Ejemplo 8.10.1

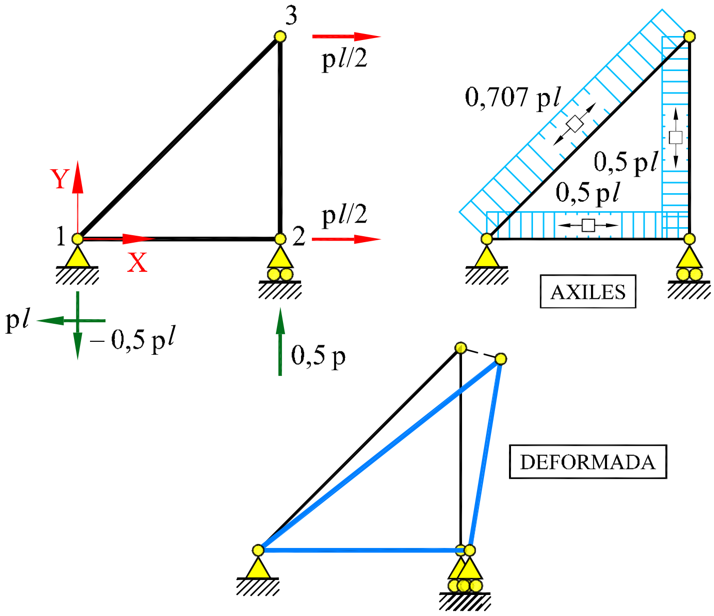


Fig. 8.28: Resolución del Estado II del Ejemplo 8.10.1

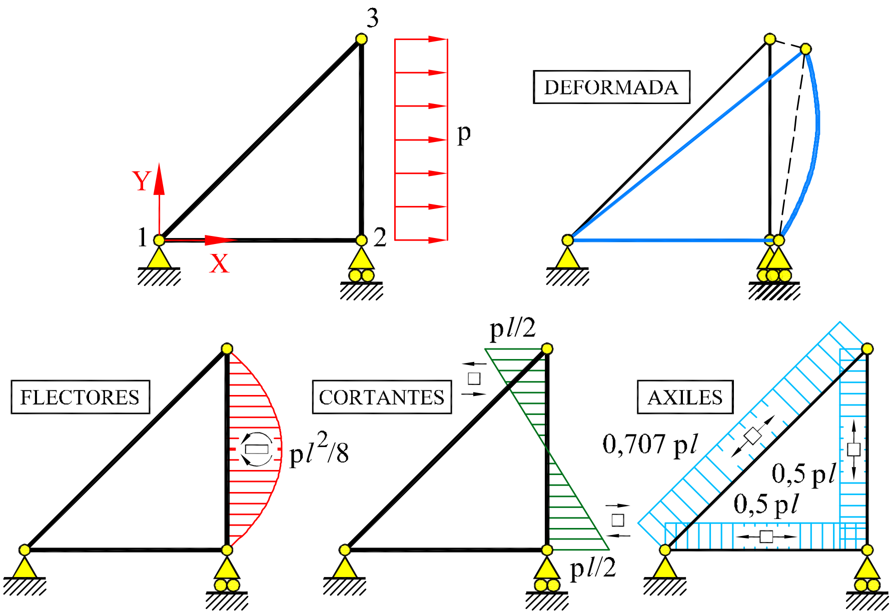


Fig. 8.29: Resultados totales del Ejemplo 8.10.1

Aplicando el principio de superposición, los resultados totales se obtienen sumando los correspondientes a los estados I y II. En la Figura 8.29 se muestran las reacciones, las leyes de esfuerzos, y la deformada de la estructura.

8.11 Algoritmos de ensamblaje

La matriz global de rigidez es simétrica, y por tanto, sólo es necesario almacenar los términos de la diagonal y los del triángulo superior o inferior. El ensamblaje del triángulo superior (o el inferior) puede realizarse siguiendo dos algoritmos alternativos:

1. **Nudo a nudo**: se ensambla el grupo de ecuaciones correspondientes a cada nudo, considerando éstos uno a uno de forma consecutiva. Eso equivale a ensamblar la matriz global *fila a fila* siguiendo las siguientes reglas:

   - El elemento de la diagonal principal de la fila i-ésima es la suma de las submatrices $\mathbf{k}_{aa}$ ó $\mathbf{k}_{bb}$ de todas las barras que concurren al nudo i. Se toma $\mathbf{k}_{aa}$ si la barra tiene su extremo a en el nudo i y la submatriz $\mathbf{k}_{bb}$ si es el extremo b el que coincide con el nudo i.
   - Los demás elementos de la fila i-ésima, correspondientes a las columnas $j \geq i$, son las submatrices $\mathbf{k}_{ab}$ de las piezas que unen el nudo i con los nudos j, respectivamente. Si no existe la pieza ij (que une el nudo i con el nudo j, $i<j$), el elemento a ensamblar es una matriz $\mathbf{0}$. Debido a la simetría de la matriz, sólo es necesario considerar las piezas cuyo extermo de numeración menor es el nudo i.

2. **Pieza a pieza**: se ensamblan las submatrices elementales correspondientes a cada pieza, considerando éstas una a una, de forma consecutiva. Esto equivale a ensamblar la matriz de rigidez de la barra ij (que une el nudo i con el nudo j, $i<j$), en las siguientes posiciones de la matriz global (ver, como ejemplo, la matriz global de la Ec. (8.39)):

		Columna i		Columna j	
Fila i	....	$(\mathbf{k}_{aa})_{ij}$	....	$(\mathbf{k}_{ab})_{ij}$	....
Fila j	....	$(\mathbf{k}_{ba})_{ij}$	....	$(\mathbf{k}_{bb})_{ij}$	....

   El algoritmo de ensamblaje *pieza a pieza* tiene la ventaja de que cada una de las piezas sólo se considera una vez; esto permite calcular las matrices elementales una a una, antes de ensamblarlas, eliminando la necesidad de almacenarlas. Esta ventaja es importante en problemas de gran tamaño.

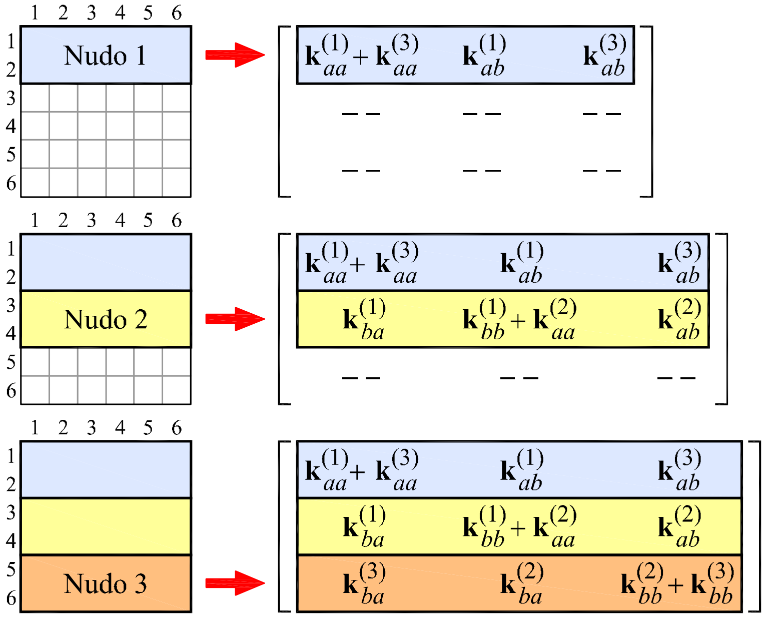


Fig. 8.30: Ensamblaje de la matriz global nudo a nudo

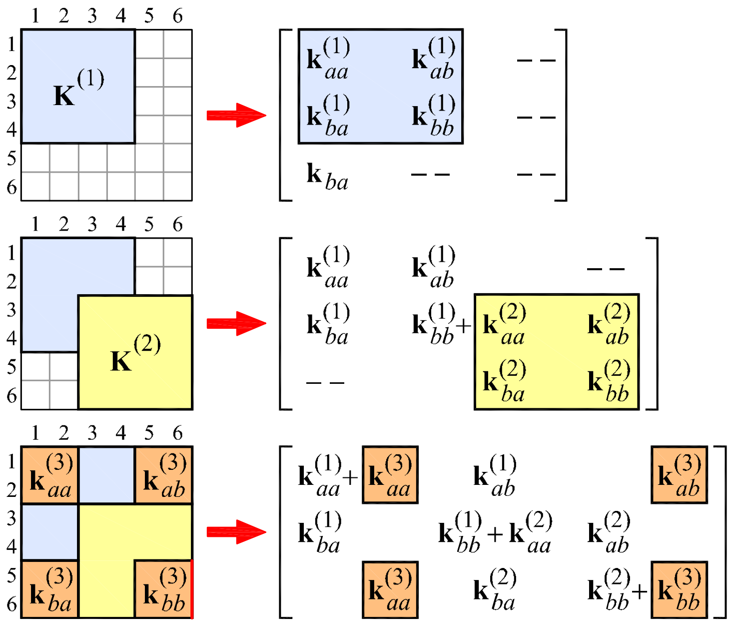


Fig. 8.31: Ensamblaje de la matriz global pieza a pieza

En las Figuras 8.30 y 8.31 se muestra de forma esquemática los algoritmos de ensamblaje aplicados al cálculo de la matriz global de la estructura del Ejemplo 8.5.1.1.

8.12 Optimización de la numeración de nudos

En el proceso de formación de la matriz global de rigidez se observa que su estructura interna varía con la numeración elegida para los nudos. Por tanto, aunque esta numeración puede ser arbitraria, lo cierto es que incide de manera directa en la eficacia y rapidez de los esquemas de almacenaje e inversión de matrices.

Se llama *ancho de banda de la matriz global* (bw) a la mayor diferencia de numeración existente entre los nudos extremos ij de las piezas de la estructura:

$$bw = \max_{j>i} \; (j - i) \qquad \forall \text{ pieza } ij \tag{8.72}$$

La numeración óptima es la que corresponde al ancho de banda menor. Cuanto menor sea la diferencia de numeración entre los extremos de una barra, más estrecha será la banda de la matriz, es decir, más agrupados se encontrarán los términos no

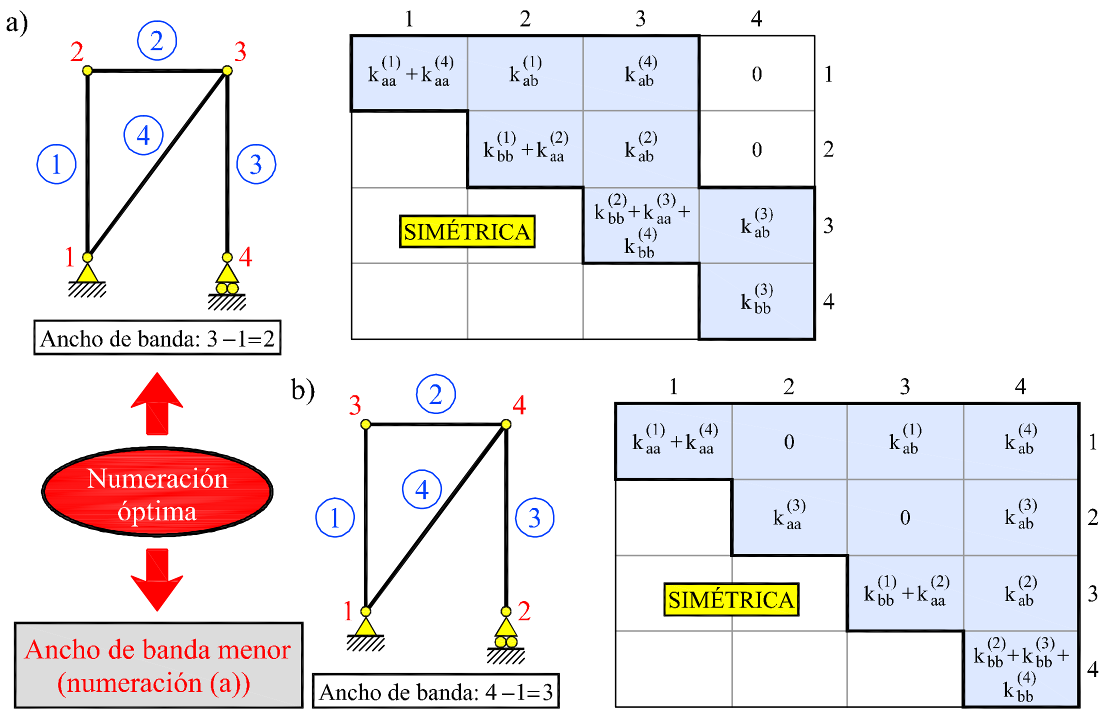


Fig. 8.32: Numeración de nudos y estructura de la matriz global

nulos y menor será el número de operaciones necesarias para el cálculo, resultando en un análisis más eficiente.

Si se considera, por ejemplo, la estructura articulada de la Figura 8.32, adoptando la numeración que se muestra en la Figura 8.32a, se obtiene un ancho de banda $bw = 2$ y la matriz global correspondiente. Por el contrario, si se adopta la numeración de la Figura 8.32b el ancho de banda es $bw = 3$ y la matriz global mostrada en la figura. Nótese que la numeración óptima es la primera, ya que proprociona el menor ancho de banda posible.

Los programas de cálculo suelen disponer de *algoritmos de renumeración* de los nudos de la estructura para minimizar las necesidades de almacenaje. Estos algoritmos operan internamente, sin la intervención del usuario y sin que éste se percate de que dicha renumeración se lleva a cabo.

9 Estructuras Reticuladas

9.1 Introducción

En este Capítulo se muestra la aplicación del Método Directo de Rigidez a la resolución de estructuras reticuladas. Se plantea primero, en detalle, su aplicación a estructuras reticuladas de plano medio y, después, a otras tipologías estructurales, emparrillados planos y estructuras reticuladas espaciales.

Las bases del Método Directo de Rigidez se han expuesto en la Sección 8.2 del Capítulo 8. Recordemos que se consideran como movimientos incógnita todos los movimientos desconocidos de los nudos de la estructura, es decir, que el número de incógnitas cinemáticas es:

$$\mathrm{k} = gl \cdot nn - ca \tag{9.1}$$

donde gl es el número de grados de libertad por nudo, nn es el número de nudos de la estructura y ca es el número de grados de libertad prescritos por las condiciones de apoyo. En estructuras reticuladas de plano medio $gl = 3$, dos traslaciones en el plano de la estructura y un giro perpendicular a éste (Figura 9.1a) y en emparrillados planos $gl = 3$, dos giros en el plano de la estructura y un desplazamiento perpendicular a éste (Figura 9.1b). En estructuras reticuladas espaciales $gl = 6$, tres traslaciones y tres giros (Figura 9.1c).

Para resolver estas incógnitas, se plantean las correspondientes ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en los nudos de la estructura.

En el método directo de rigidez, a diferencia de en los métodos clásicos, enfocados al cálculo manual, no se desprecia la deformación por axil de las piezas, aunque sí suele despreciarse la deformación por cortante. Esto implica que hay que considerar, explícitamente, las ecuaciones elásticas referidas a los axiles y los movimientos longitudinales de los nudos de las piezas.

Respecto a la definición geométrica de la estructura, ésta se hace de la manera

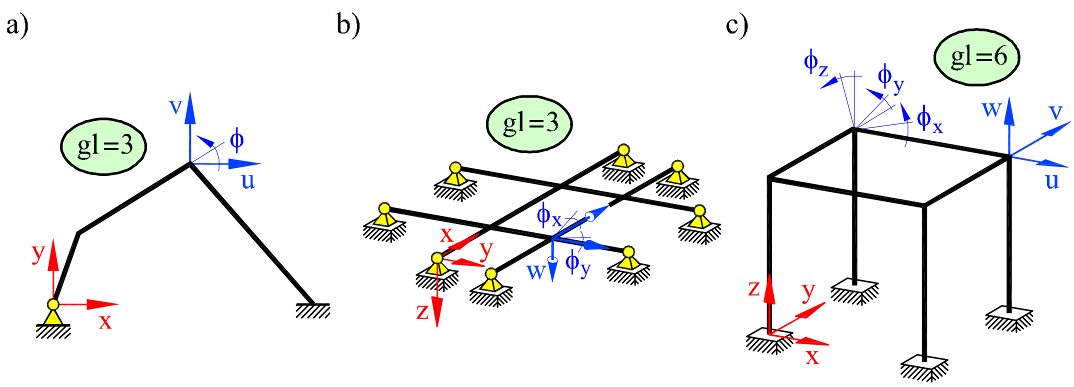


Fig. 9.1: Estructuras reticuladas: grados de libertad por nudo

descrita en la Sección 8.3, añadiendo a las propiedades mecánicas que describen las piezas las que son propias de las tipologías reticuladas, tales como las inercias a flexión y torsión.

También se precisa de sistemas de referencia adecuados para referir a ellos los movimientos (desplazamientos y giros) de los nudos (libres y prescritos) y las fuerzas y momentos actuantes sobre éstos. Por tanto, se definen:

- un *sistema global de referencia*, es decir, un triedro dextrógiro como el de las Figuras 9.1 y 9.2, al que nos referiremos como (X, Y, Z). Este sistema se usa para referir a él la geometría de la estructura, las fuerzas y momentos actuantes y los movimientos (desplazamientos y giros) incógnita. Normalmente, el ensamblaje de las matrices y vectores de las piezas se hace en este sistema.

- un *sistema local de referencia* para cada pieza. Este sistema es útil dado que las ecuaciones elásticas de las piezas se simplifican en ejes locales. Nos referiremos a él como (x, y, z). Se elige el eje x coincidente con la dirección y sentido positivo de la pieza (del extremo "a" al "b"), y los ejes y, z según los ejes principales de inercia de la sección transversal, tal como se indica en la Figura 9.2.

- En ciertos casos particulares, es necesario definir también sistemas locales de referencia de nudo. Nos referiremos a éstos en la Sección 9.6 (Ejemplo 9.6.2).

En la Figura 9.2 pueden verse los sistemas de referencia adoptados en una estructura reticulada de plano medio (Figura 9.2a), en un emparrillado plano (Figura 9.2b) y en una reticulada espacial (Figura 9.2c).

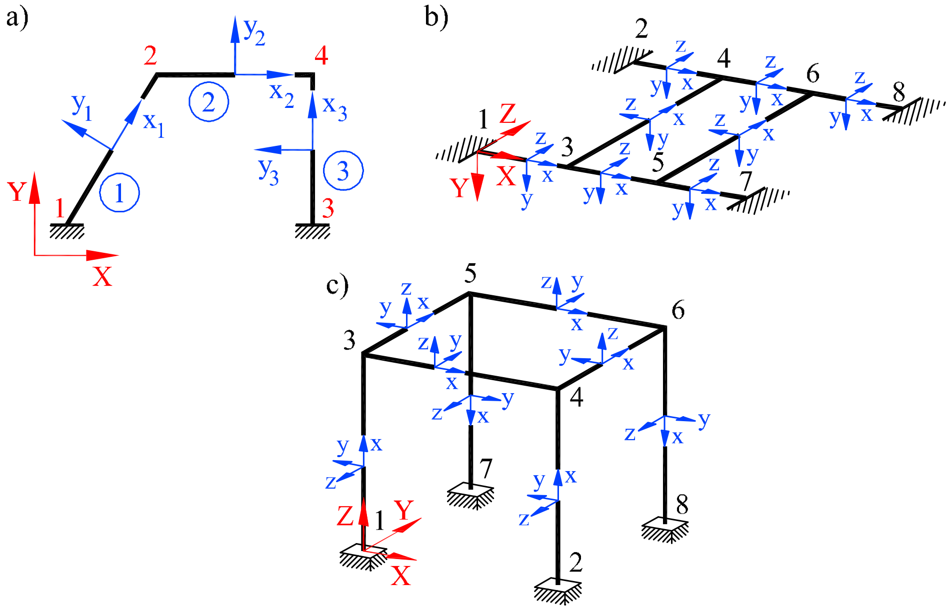


Fig. 9.2: Sistemas de referencia: (a) reticulada de plano medio (b) emparrillado plano (c) reticulada espacial

9.2 Estructuras reticuladas de plano medio

Las estructuras reticuladas son estructuras formadas por piezas rectas unidas mediante nudos rígidos. Al ser los nudos rígidos, éstos transmiten momentos de una pieza a la otra y, por eso, las barras de una estructura reticulada trabajan fundamentalmente a flexión y en su caso también a torsión.

Las estructuras reticuladas pueden ser *planas*, cuando las directrices de las piezas que la componen están contenidas en un mismo plano, y *espaciales*, en caso contrario.

Las *estructuras reticuladas de plano medio* son aquellas en las que el plano que contiene a las directrices de las barras es también plano de simetría de éstas y que están sometidas a cargas contenidas en dicho plano medio. Por simetría, las barras que forman las estructuras de plano medio trabajan a flexión compuesta, es decir, están sometidas a momentos flectores de ejes perpendiculares al plano medio y esfuerzos cortantes y axiles contenidos en dicho plano.

A continuación, se desarrolla en detalle el método directo de rigidez para estructuras reticuladas de plano medio.

9.3 Ecuaciones elásticas. Matriz elemental de rigidez

9.3.1 Forma matricial de las ecuaciones elásticas

Las ecuaciones elásticas de una pieza establecen la relación existente entre las fuerzas y momentos que actúan en los extremos de la pieza y los movimientos (desplazamientos y giros) que se producen en los mismos. Consideremos una pieza recta de una estructura reticulada de plano medio, de longitud l y sección transversal constante, tal como la que se muestra en la Figura 9.3, y consideremos los esfuerzos que actúan sobre sus extremos a y b, y los movimientos de éstos.

En el sistema local de referencia de las piezas, las ecuaciones de equilibrio son:

$$F'_{xa} + F'_{xb} = 0 \tag{9.2a}$$

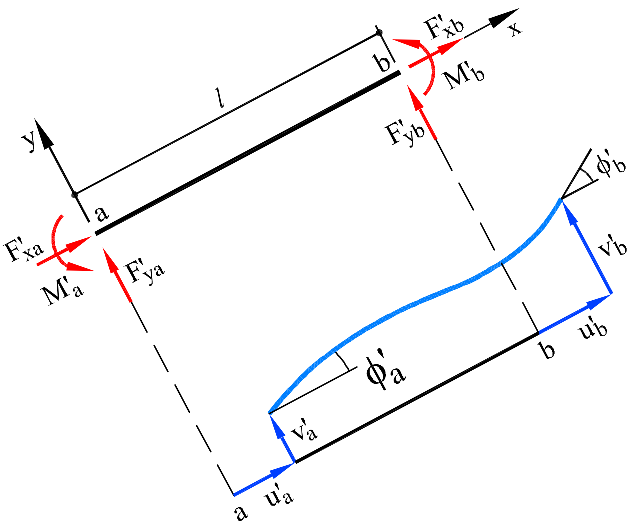
$$F'_{ya} + F'_{yb} = 0 \tag{9.2b}$$

$$M'_a + M'_b + F'_{yb} l = 0 \tag{9.2c}$$

de donde:

$$F'_{xa} = -F'_{xb} \tag{9.3a}$$

$$F'_{ya} = -F'_{yb} = \frac{M'_a + M'_b}{l} \tag{9.3b}$$



	Fuerzas		
a	F'_{xa}	F'_{ya}	M'_a
b	F'_{xb}	F'_{yb}	M'_b
	Movimientos		
a	u'_a	v'_a	ϕ'_a
b	u'_b	v'_b	ϕ'_b

SISTEMA LOCAL DE REFERENCIA

Fig. 9.3: Fuerzas y movimientos de extremo de pieza

Por otro lado, el alargamiento de la pieza debida al axil es:

$$\delta = u'_b - u'_a = \frac{F'_{xb} l}{EA} \tag{9.4}$$

Por tanto, las ecuaciones elásticas de los axiles en los extremos de la pieza son:

$$F'_{xa} = \frac{EA}{l}\left(u'_a - u'_b\right) \tag{9.5a}$$

$$F'_{xb} = -\frac{EA}{l}\left(u'_a - u'_b\right) \tag{9.5b}$$

Además, las ecuaciones elásticas de los momentos en los extremos de la pieza, escritas en función de los giros y del desplazamiento transversal de éstos, son:

$$M'_a = \frac{4EI}{l}\phi'_a + \frac{2EI}{l}\phi'_b + \frac{6EI}{l^2}(v'_a - v'_b) \tag{9.6a}$$

$$M'_b = \frac{2EI}{l}\phi'_a + \frac{4EI}{l}\phi'_b + \frac{6EI}{l^2}(v'_a - v'_b) \tag{9.6b}$$

Por tanto, las ecuaciones elásticas de los esfuerzos cortantes en los extremos de la pieza son:

$$F'_{ya} = \frac{6EI}{l^2}\phi'_a + \frac{6EI}{l^2}\phi'_b + \frac{12EI}{l^3}(v'_a - v'_b) \tag{9.7a}$$

$$F'_{yb} = -\frac{6EI}{l^2}\phi'_a - \frac{6EI}{l^2}\phi'_b - \frac{12EI}{l^3}(v'_a - v'_b) \tag{9.7b}$$

Nótese que en las ecuaciones (9.6a)-(9.6b) se ha despreciado la deformación debida al esfuerzo cortante frente a la debida a los momentos flectores. Esta simplificación, válida para piezas suficientemente esbeltas, se mantiene, por simplicidad, a lo largo de todo el presente Capítulo.

Las ecuaciones anteriores (9.5a) a (9.7b) pueden escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix} \tag{9.8}$$

con los vectores:

$$\mathbf{f}'_a = \begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ M'_a \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}'_b = \begin{bmatrix} F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_b \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}'_a = \begin{bmatrix} u'_a \\ v'_a \\ \phi'_a \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}'_b = \begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ \phi'_b \end{bmatrix} \tag{9.9}$$

y las matrices:

$$\mathbf{k}'_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}'_{ab} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}'_{ba} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}'_{bb} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{9.10}$$

En las expresiones anteriores se llama *vectores de movimiento de nudo* a los vectores $\mathbf{d}'_a$ y $\mathbf{d}'_b$, formados por las componentes de movimiento que definen la traslación y el giro del nudo en el *sistema local* de la pieza. Análogamente, se llama *vectores de esfuerzos en extremo de pieza* a los vectores $\mathbf{f}'_a$ y $\mathbf{f}'_b$, formados por las componentes de las fuerzas y momentos que actúan en los extremos de las piezas. El número de componentes de cada uno de estos vectores depende de la tipología de estructura analizada y es igual al número de grados de libertad por nudo, en ejes locales, que corresponda a cada caso.

En las expresiones anteriores se observa también que las matrices $\mathbf{k}'_{aa}$ y $\mathbf{k}'_{bb}$ son simétricas y que $\mathbf{k}'_{ab} = \mathbf{k}'^T_{ba}$.

Finalmente, puede llegarse a una ecuación matricial más compacta:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' \tag{9.11}$$

donde las expresiones de $\mathbf{f}', \mathbf{K}'$ y $\mathbf{d}'$ son obvias del desarrollo anterior. Al vector $\mathbf{d}'$ se le llama *vector de movimientos de la pieza* y a $\mathbf{f}'$ se le denomina *vector de esfuerzos de la pieza*. A la matriz $\mathbf{K}'$ se le llama *matriz de rigidez elemental*.

Las expresiones matriciales (9.8) y (9.11) son formalmente idénticas a las (8.7) y (8.8) para estructuras articuladas.

9.3.2 Matriz elemental de rigidez en el sistema global

La transformación de sistemas de referencia en una estructura reticulada de plano medio es similar a lo desarrollado en la Sección 8.4.4 para estructuras articuladas.

Sea α el ángulo que forman los ejes locales (x, y) con los ejes globales (X, Y) (Figura 9.4). Supóngase los ejes z y Z coincidentes y perpendiculares a los anteriores. Sea $\boldsymbol{a} = (a_X, a_Y, a_Z)$ un vector expresado en el sistema global (X, Y, Z) y sea $\boldsymbol{a}' = (a'_x, a'_y, a'_z)$ el mismo vector expresado en un sistema local (x, y, z). Las correspon-

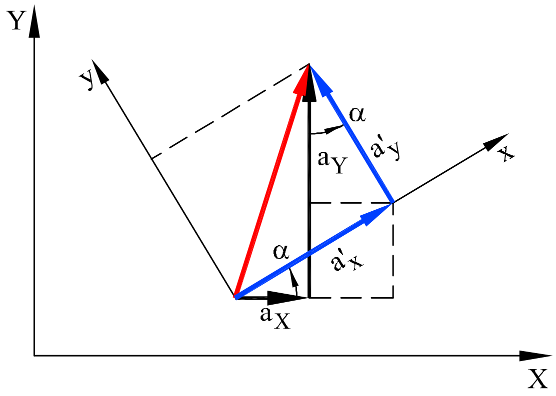


Fig. 9.4: Transformación de sistema de referencia

dientes transformaciones son:

$$\begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix} \tag{9.12}$$

o en forma compacta:

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{a}' \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{a}' = \mathbf{T}^T\,\boldsymbol{a} \tag{9.13}$$

La matriz de transformación $\mathbf{T}$ es ortogonal y contiene los cosenos directores de los ejes locales respecto de los ejes globales:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(Xx) & \cos(Xy) & \cos(Xz) \\ \cos(Yx) & \cos(Yy) & \cos(Yz) \\ \cos(Zx) & \cos(Zy) & \cos(Zz) \end{bmatrix} \tag{9.14}$$

En virtud de estas relaciones, el vector de movimientos $\mathbf{d}'\left(u', v', \phi'\right)$ produce un vector de movimientos $\mathbf{d}\,(u, v, \phi)$ en ejes globales que corresponde a la siguiente expresión:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ \phi' \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{d}' \tag{9.15}$$

Nótese que el vector de movimientos de una estructura reticulada de plano medio tiene tres componentes, dos desplazamientos, (u, v), y un giro ϕ. Al ser los ejes z y Z coincidentes, dicho giro tiene la misma expresión en el sistema local y global.

Recíprocamente, conocidas las componentes del vector movimiento $\mathbf{d}\,(u, v, \phi)$ en el sistema global, el corespondiente vector $\mathbf{d}'\left(u', v', \phi'\right)$ en el sistema local es:

$$\mathbf{d}' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \phi \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{d} \tag{9.16}$$

Aplicando estas transformaciones a los vectores de movimiento y de esfuerzos de extremo de pieza, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_a &= \mathbf{T}^T\,\mathbf{d}_a & \qquad \mathbf{d}'_b &= \mathbf{T}^T\,\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_a &= \mathbf{T}\;\mathbf{f}'_a & \qquad \mathbf{f}_b &= \mathbf{T}\;\mathbf{f}'_b \end{aligned} \tag{9.17}$$

Por lo tanto, partiendo de las ecuaciones elásticas referidas al sistema local de referencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_a &= \mathbf{k}'_{aa}\mathbf{d}'_a + \mathbf{k}'_{ab}\mathbf{d}'_b \\ \mathbf{f}'_b &= \mathbf{k}'_{ba}\mathbf{d}'_a + \mathbf{k}'_{bb}\mathbf{d}'_b \end{aligned} \tag{9.18}$$

y utilizando las relaciones anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_a &= \mathbf{k}'_{aa}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{k}'_{ab}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}'_b &= \mathbf{k}'_{ba}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{k}'_{bb}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \end{aligned} \tag{9.19}$$

que son las ecuaciones elásticas que permiten obtener los esfuerzos en el sistema local de referencia, a partir de los movimientos en el sistema global de referencia. Premultiplicando estas ecuaciones por la matriz de transformación de sistemas $\mathbf{T}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_a = \mathbf{T}\,\mathbf{k}'_{aa}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{T}\,\mathbf{k}'_{ab}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b &= \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_b = \mathbf{T}\,\mathbf{k}'_{ba}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{T}\,\mathbf{k}'_{bb}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \end{aligned} \tag{9.20}$$

o bien:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{k}_{aa}\mathbf{d}_a + \mathbf{k}_{ab}\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b &= \mathbf{k}_{ba}\mathbf{d}_a + \mathbf{k}_{bb}\mathbf{d}_b \end{aligned} \tag{9.21}$$

con:

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{T}\;\mathbf{k}'_{ij}\mathbf{T}^T \tag{9.22}$$

Las Ecs. (9.21) son las ecuaciones elásticas de la pieza expresadas en el sistema global de referencia. Dichas ecuaciones son las que se utilizan para ensamblar la matriz de rigidez global de la estructura, tal como se explica en la Sección siguiente.

En el caso de una estructura reticulada de plano medio, estas matrices en coordenadas globales tienen la expresión:

$$\mathbf{k}_{aa} = \begin{bmatrix} C^2\dfrac{EA}{l} + S^2\dfrac{12EI}{l^3} & SC\left(\dfrac{EA}{l} - \dfrac{12EI}{l^3}\right) & -S\dfrac{6EI}{l^2} \\ & S^2\dfrac{EA}{l} + C^2\dfrac{12EI}{l^3} & C\dfrac{6EI}{l^2} \\ SIM. & & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{9.23}$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \begin{bmatrix} -C^2\dfrac{EA}{l} - S^2\dfrac{12EI}{l^3} & -SC\left(\dfrac{EA}{l} - \dfrac{12EI}{l^3}\right) & -S\dfrac{6EI}{l^2} \\ -SC\left(\dfrac{EA}{l} - \dfrac{12EI}{l^3}\right) & -S^2\dfrac{EA}{l} - C^2\dfrac{12EI}{l^3} & C\dfrac{6EI}{l^2} \\ S\dfrac{6EI}{l^2} & -C\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{2EI}{l} \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

$$\mathbf{k}_{ba} = \begin{bmatrix} -C^2\dfrac{EA}{l} - S^2\dfrac{12EI}{l^3} & -SC\left(\dfrac{EA}{l} - \dfrac{12EI}{l^3}\right) & S\dfrac{6EI}{l^2} \\ -SC\left(\dfrac{EA}{l} - \dfrac{12EI}{l^3}\right) & -S^2\dfrac{EA}{l} - C^2\dfrac{12EI}{l^3} & -C\dfrac{6EI}{l^2} \\ -S\dfrac{6EI}{l^2} & C\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{2EI}{l} \end{bmatrix} \tag{9.25}$$

$$\mathbf{k}_{bb} = \begin{bmatrix} C^2\dfrac{EA}{l} + S^2\dfrac{12EI}{l^3} & SC\left(\dfrac{EA}{l} - \dfrac{12EI}{l^3}\right) & S\dfrac{6EI}{l^2} \\ & S^2\dfrac{EA}{l} + C^2\dfrac{12EI}{l^3} & -C\dfrac{6EI}{l^2} \\ SIM. & & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{9.26}$$

donde $S = \sin\alpha$ y $C = \cos\alpha$.

Nótese que las matrices $\mathbf{k}_{aa}$ y $\mathbf{k}_{bb}$ son simétricas y que $\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{k}_{ba}^T$, con lo que se comprueba que la matriz elemental de rigidez es simétrica *en cualquier sistema de referencia*.

Ejemplo 9.3.2.1

Para la estructura reticulada hiperestática de la Figura 9.5a, escribir las ecuaciones elásticas de las barras en el sistema global de referencia.
Datos: $L = 10\,\text{m}$, $EA = 10^5$ kN, $EI = 10^5\,\text{kN}\cdot\text{m}^2$ $F = 12\,\text{kN}$, $M = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$.

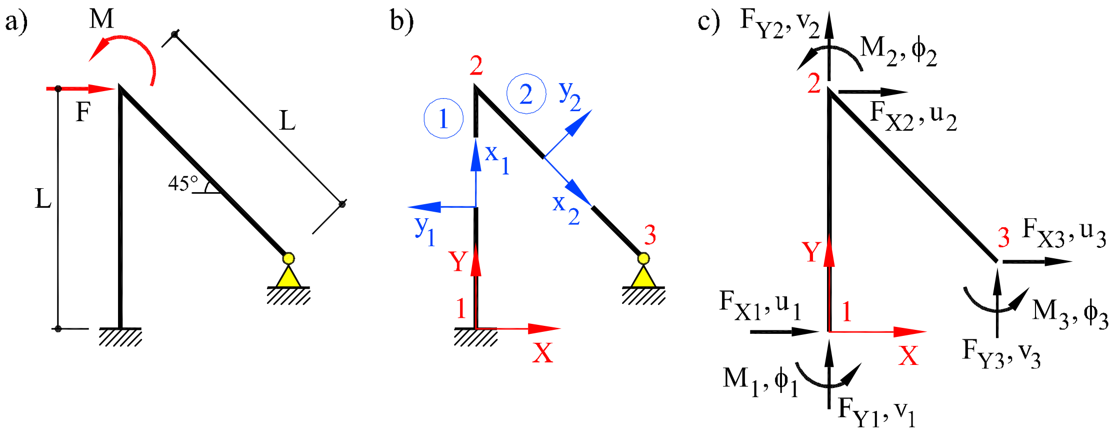


Fig. 9.5: (a) Estructura del Ejemplo 9.3.2.1 (b) numeración y sistemas de referencia global y locales (c) esfuerzos y movimientos en los nudos

Las barras de la estructura tienen la misma longitud y las mismas propiedades mecánicas. Por tanto, las ecuaciones elásticas de las barras en ejes locales son idénticas. Teniendo en cuenta las Ecs. (9.8)-(9.10), las ecuaciones elásticas de las barras en ejes locales (Figura 9.5b) son:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_1 \\ \mathbf{f}'_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \mathbf{K}' \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_1 \\ \mathbf{d}'_2 \end{bmatrix}^{(1)} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_2 \\ \mathbf{f}'_3 \end{bmatrix}^{(2)} = \mathbf{K}' \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_2 \\ \mathbf{d}'_3 \end{bmatrix}^{(2)}$$

donde $\mathbf{K}'$ es la matriz elemental de las barras de valor numérico:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ -\mathsf{A} & 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{B} & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{E} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{array}{ll} \mathsf{A} = EA/L \quad = 100 \cdot 10^2 \text{ kN/m} & \mathsf{D} = 4EI/L = 400 \cdot 10^2 \text{ kN·m} \\ \mathsf{B} = 12EI/L^3 = 12 \cdot 10^2 \text{ kN/m} & \mathsf{E} = 2EI/L = 200 \cdot 10^2 \text{ kN·m} \\ \mathsf{C} = 6EI/L^2 \quad = 60 \cdot 10^2 \text{ kN} & \end{array}$$

Los ángulos que forman las barras con los ejes globales son $\alpha^{(1)} = 90^o$ y $\alpha^{(2)} = -45^o$. Teniendo en cuenta dichos ángulos, las ecuaciones elásticas de las barras referidas al sistema global de coordenadas son:
Barra 1 ($\alpha = 90^o$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ M_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} \\ -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}^{(1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}^{(1)}$$

Barra 2 ($\alpha = -45^o$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \\ M_2 \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \\ M_3 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathsf{F} & -\mathsf{G} & \mathsf{H} & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{G} & \mathsf{F} & \mathsf{H} & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & \mathsf{H} \\ \mathsf{H} & \mathsf{H} & \mathsf{D} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{E} \\ -\mathsf{F} & \mathsf{G} & -\mathsf{H} & \mathsf{F} & -\mathsf{G} & -\mathsf{H} \\ \mathsf{G} & -\mathsf{F} & -\mathsf{H} & -\mathsf{G} & \mathsf{F} & -\mathsf{H} \\ \mathsf{H} & \mathsf{H} & \mathsf{E} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{D} \end{bmatrix}^{(2)} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix}^{(2)}$$

con
$\mathsf{F} = (\mathsf{A}+\mathsf{B})/2 = 56 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{G} = (\mathsf{A}-\mathsf{B})/2 = 44 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{H} = \sqrt{2}/2\ \mathsf{C} = 42,426 \cdot 10^2$
Las constantes F y G se expresan en kN/ m, y H en kN. Las letras restantes tienen significado idéntico al utilizado en la matriz en ejes locales.

9.4 Matriz global de rigidez

9.4.1 Ensamblaje de la matriz global

Una vez calculadas las ecuaciones elásticas de todas las barras que forman la estructura en un sistema de referencia común, el siguiente paso en el *método directo de rigidez* es la construcción de la matriz global de rigidez de la estructura. Esta matriz global se obtiene mediante el *ensamblaje* de las matrices elementales de rigidez de las piezas. Dicho ensamblaje es el resultado de la aplicación sistemática de las condiciones de:

1. *Compatibilidad*: los movimientos de los extremos de las barras que concurren en un nudo son iguales.

2. *Equilibrio*: la suma de las fuerzas y momentos ejercidos por las barras que concurren en un nudo están en equilibrio con la fuerza y momento externo aplicados en dicho nudo.

Así, por ejemplo, en la estructura de la Figura 9.6a, por compatibilidad, los movimientos del extremo b de la barra 1, $\mathbf{d}_b^{(1)}$, y los del extremo a de la barra 2, $\mathbf{d}_a^{(2)}$, son iguales y, ambos a su vez iguales a los del nudo 2, $\mathbf{d}_2$, al que concurren dichas barras.

Por otra parte, por equilibrio, la suma de las fuerzas en el extremo b de la barra 1, $\mathbf{f}_b^{(1)}$, y en el extremo a de la barra 2, $\mathbf{f}_a^{(2)}$, es igual a la fuerza exterior que actúa en el nudo 2, $\mathbf{f}_2$ (Figura 9.6b).

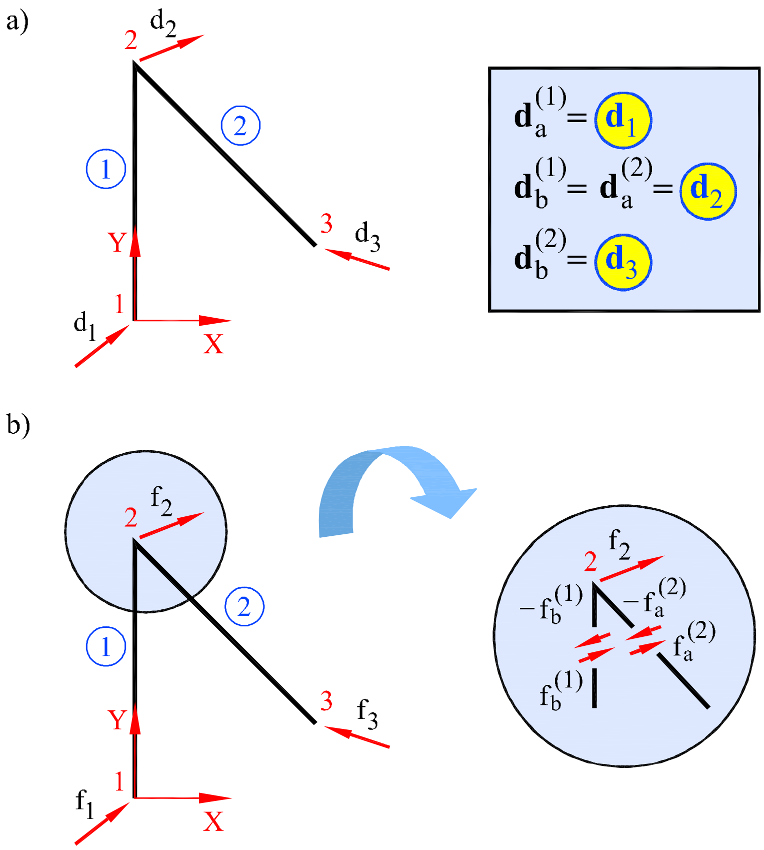


Fig. 9.6: (a) Compatibilidad "a priori" (b) equilibrio "a posteriori"

Por tanto, en la estructura de la Figura 9.6, formada por 2 piezas, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos interiores (esfuerzos en extremos de piezas) y exteriores que actúan sobre los nudos se pueden escribir, en el *sistema global* de referencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_a^{(1)} \\ &= \mathbf{k}_{aa}^{(1)}\,\mathbf{d}_1 + \mathbf{k}_{ab}^{(1)}\mathbf{d}_2 \end{aligned} \tag{9.27a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 &= \mathbf{f}_b^{(1)} + \mathbf{f}_a^{(2)} \\ &= \left[\mathbf{k}_{ba}^{(1)}\,\mathbf{d}_1 + \mathbf{k}_{bb}^{(1)}\,\mathbf{d}_2\right] + \left[\mathbf{k}_{aa}^{(2)}\,\mathbf{d}_2 + \mathbf{k}_{ab}^{(2)}\,\mathbf{d}_3\right] \end{aligned} \tag{9.27b}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 &= \mathbf{f}_b^{(2)} \\ &= \mathbf{k}_{ba}^{(2)}\,\mathbf{d}_2 + \mathbf{k}_{bb}^{(2)}\,\mathbf{d}_3 \end{aligned} \tag{9.27c}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(2)} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} & \mathbf{k}_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} \tag{9.28}$$

o de forma más compacta:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\,\mathbf{d} \tag{9.29}$$

donde $\mathbf{f}$ es el vector global de las fuerzas exteriores (incluidas las reacciones), $\mathbf{K}$ es la matriz global de rigidez de la estructura y $\mathbf{d}$ es el vector global de movimientos en los nudos.

De lo anterior se obtienen algunas conclusiones de validez general:

(a) La matriz $\mathbf{K}$ es *simétrica*, al ser simétricas las matrices $\mathbf{k}_{aa}$ y $\mathbf{k}_{bb}$ elementales y traspuestas una de la otra las matrices $\mathbf{k}_{ab}$ y $\mathbf{k}_{ba}$ de cada pieza. De hecho, debe serlo en virtud de los Teoremas de Reciprocidad, aplicados a la estructura en su conjunto.

(b) La matriz $\mathbf{K}$ es *singular*, ya que las ecuaciones de equilibrio (9.27a)-(9.27c) no se ven afectadas por un movimiento de sólido rígido de la estructura.

Ejemplo 9.4.1.1

Para la estructura reticulada hiperestática del Ejemplo 9.3.2.1, calcular la matriz de rigidez de la estructura.
Datos: $L = 10\,\mathrm{m}$, $EA = 10^5$ kN, $EI = 10^5\,\mathrm{kN\cdot m^2}$ $F = 12\,\mathrm{kN}$, $M = 20\,\mathrm{kN\cdot m}$.

La estructura tiene 9 grados de libertad, tres por cada uno de los tres nudos (Figura 9.5c). El vector global de fuerzas exteriores en los nudos es:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F_{X1} & F_{Y1} & M_1 & F_{X2} & F_{Y2} & M_2 & F_{X3} & F_{Y3} & M_3 \end{bmatrix}^T$$

y el vector global de movimientos en los nudos (Figura 9.5c) es:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \phi_1 & u_2 & v_2 & \phi_2 & u_3 & v_3 & \phi_3 \end{bmatrix}^T$$

Teniendo en cuenta las matrices elementales obtenidas en el Ejemplo 9.3.2.1, y la expresión (9.28), el sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos de la estructura es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(2)} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(2)} & \mathbf{k}_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}$$

con lo que $\mathbf{f} = \mathbf{K}\,\mathbf{d}$, donde $\mathbf{K}$ es la *matriz global de rigidez la estructura* y su valor numérico es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{I} & -\mathsf{G} & \mathsf{M} & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & \mathsf{H} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & -\mathsf{G} & \mathsf{J} & \mathsf{H} & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{M} & \mathsf{H} & \mathsf{N} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{E} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & -\mathsf{H} & \mathsf{F} & -\mathsf{G} & -\mathsf{H} \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & -\mathsf{H} & -\mathsf{G} & \mathsf{F} & -\mathsf{H} \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{H} & \mathsf{H} & \mathsf{E} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

con

$\mathsf{I} = \mathsf{B} + \mathsf{F} = 68 \cdot 10^2$ kN/ m $\qquad \mathsf{M} = (1 + \sqrt{2}/2)\ \mathsf{C} = 102,426 \cdot 10^2$ kN

$\mathsf{J} = \mathsf{A} + \mathsf{F} = 156 \cdot 10^2$ kN/ m $\qquad \mathsf{N} = 2\mathsf{D} = 800 \cdot 10^2$ kN· m

Las letras restantes tienen significado idéntico al utilizado en las matrices del Ejemplo 9.3.2.1.

9.4.2 Energía de deformación y energía potencial de la estructura

Consideremos una pieza recta de una estructura reticulada de plano medio, de sección transversal constante, tal como la que se muestra en la Figura 9.3, sobre la que sólo actúan fuerzas y momentos en sus respectivos extremos a y b. Dado que los sistemas

estructurales que estamos considerando son conservativos, el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre ellos se invierte, íntegramente, en incrementar la energía de deformación de las piezas que los componen. Por tanto, la energía de deformación de una pieza (e) se puede evaluar calculando el trabajo realizado por las fuerzas de extremo de barra sobre sus respectivos movimientos eficaces, los movimientos de los nudos a y b. Según la fórmula de Clapeyron, se tiene que:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}'\right)^T \mathbf{d}' = \frac{1}{2}\left(\mathbf{d}'\right)^T \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' \tag{9.30}$$

donde se ha utilizado la relación $\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}'$ y el hecho de que la matriz de rigidez es simétrica.

En la expresión (9.30) resulta obvio que la energía de deformación de una pieza se puede escribir como una función cuadrática de los movimientos de sus nudos. Como la energía de deformación es necesariamente *no negativa*, la matriz de rigidez es una matriz *semidefinida positiva*.

Llamando al alargamiento unitario de la barra $\epsilon = \left(u'_b - u'_a\right)/l$ y al giro de la barra $\overline{\phi}_{ab} = \left(v'_b - v'_a\right)/l$ y operando, se tiene:

$$\begin{aligned} U^{(e)} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{d}'\right)^T \mathbf{K}'\mathbf{d}' \\ &= \frac{1}{2}\,kl^2\epsilon^2 + \frac{1}{2}\,2K\left[\left(\phi'_a\right)^2 + \phi'_a\,\phi'_b + \left(\phi'_b\right)^2 - 3\left(\phi'_a +\ \phi'_b\right)\overline{\phi}_{ab} - 3\left(\overline{\phi}_{ab}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}K\left\{\lambda^2\epsilon^2 + 2\left[\left(\phi'_a\right)^2 + \phi'_a\,\phi'_b + \left(\phi'_b\right)^2 - 3\left(\phi'_a +\ \phi'_b\right)\overline{\phi}_{ab} - 3\left(\overline{\phi}_{ab}\right)^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{9.31}$$

donde $k = EA/l$ y $K = EI/l$ son las rigideces a axil y a flexión, respectivamente, y $\lambda = l/r$ es la esbeltez de la barra, siendo $r = \sqrt{I/A}$ el radio de giro de la sección de la pieza. En la expresión anterior se distingue claramente la contribución de la deformación por axil de la contribución de la deformación por flexión.

Como puede observarse, la rigidez a axil crece muy rápidamente con la esbeltez de las piezas. En consecuencia, en estructuras reticuladas la deformación debida al axil suele ser pequeña comparada con la deformación debida a la flexión.

La energía de deformación de una pieza (e) de la estructura es, según la expresión (9.30):

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\,\left(\mathbf{d}'^{(e)}\right)^T \mathbf{K}'^{(e)}\mathbf{d}'^{(e)} = \frac{1}{2}\,\left(\mathbf{d}^{(e)}\right)^T \mathbf{K}^{(e)}\,\mathbf{d}^{(e)} \tag{9.32}$$

según se evalúe en los ejes locales o globales, respectivamente.

La energía de deformación de la estructura completa se obtiene, simplemente, sumando (escalarmente) las contribuciones de todas las barras que la forman:

$$U = \sum_{(e)} U^{(e)} \tag{9.33a}$$

$$= \sum_{(e)} \frac{1}{2} \left(\mathbf{d}^{(e)}\right)^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} \tag{9.33b}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K}\, \mathbf{d} \tag{9.33c}$$

donde se han utilizado las condiciones de compatibilidad de movimientos en los nudos para pasar de la expresión (9.33b), en función de las matrices de rigidez elementales, a la (9.33c), en función de la matriz de rigidez global de la estructura. En la expresión (9.33c) resulta, de nuevo, evidente que la energía de deformación de una estructura se puede escribir como una función cuadrática de los movimientos de sus nudos. Como la energía de deformación es necesariamente *no negativa*, la matriz de rigidez global es una matriz *semidefinida positiva*.

Conocida la expresión de la energía de deformación de la estructura, es fácil obtener la expresión de la energía potencial total de ésta. Para ello, basta con considerar la energía potencial de las fuerzas actuantes, H :

$$H = -\mathbf{f}^{\,T}\mathbf{d} \tag{9.34}$$

La energía potencial total Π es la suma de las expresiones (9.33c) y (9.34):

$$\Pi = U + H \tag{9.35a}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T\, \mathbf{K}\mathbf{d} - \mathbf{f}^T\mathbf{d} \tag{9.35b}$$

De nuevo, las ecuaciones de equilibrio en los nudos pueden obtenerse a partir del Principio de Energía Potencial Total Mínima, ya que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{K}\mathbf{d} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{9.36}$$

Puede comprobarse fácilmente que las reglas de ensamblaje de la matriz de rigidez global de la estructura que se deducen de las ecuaciones (9.33a)-(9.33c) coinciden exactamente con las obtenidas a partir de la imposición del equilibrio de fuerzas y momentos en los nudos. De hecho, dichas condiciones de equilibrio pueden deducirse directamente de la expresión (9.36), aplicando el Primer Teorema de Castigliano:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \tag{9.37}$$

ya que las fuerzas que actúan sobre los nudos se pueden obtener derivando la energía de deformación total respecto de los correspondientes movimientos.

9.5 Cálculo de movimientos, esfuerzos y reacciones

9.5.1 Cálculo de los movimientos en los nudos

Una vez construido el sistema de ecuaciones de equilibrio en los nudos:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{d} = \mathbf{f} \tag{9.38}$$

y modificado éste para introducir las condiciones de apoyo (ver Sección 8.6), se tiene el sistema de ecuaciones *reducido*:

$$\widehat{\mathbf{K}}\widehat{\mathbf{d}} = \widehat{\mathbf{f}} \tag{9.39}$$

donde se han eliminado las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad prescritos, tal como se explica en la Sección 8.6. Si las condiciones de apoyo son suficientes para impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura, la matriz modificada $\widehat{\mathbf{K}}$ es no singular y el sistema reducido puede resolverse.

Los movimientos incógnita en los nudos se obtienen resolviendo este sistema; formalmente:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \widehat{\mathbf{K}}^{\,-1}\widehat{\mathbf{f}} \tag{9.40}$$

Ahora se puede considerar resuelto el problema estructural y se pueden calcular *a posteriori* las reacciones y los esfuerzos en las piezas.

Ejemplo 9.5.1.1

Para la estructura reticulada hiperestática de los Ejemplos 9.3.2.1 y 9.4.1.1, sometida a las cargas que se indican en la Figura 9.5a, resolver los movimientos incógnita.
Datos: $L = 10\,\mathrm{m}$, $EA = 10^5$ kN, $EI = 10^5\,\mathrm{kN\cdot m^2}$ $F = 12\,\mathrm{kN}$, $M = 20\,\mathrm{kN\cdot m}$.

La estructura en estudio tiene un empotramiento en el nudo 1 y un apoyo fijo en el nudo 3 (Figura 9.5b). Los movimientos prescritos son:

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0 \quad \phi_1 = 0$$

El sistema de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos obtenido en el Ejemplo 9.4.1.1 se modifica al introducir estos movimientos prescritos. Eliminando las columnas y filas de 1 a 3 y las filas y columnas 7 y 8, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 68,0 & -44,0 & 102,426 & 42,426 \\ -44,0 & 156,0 & 42,426 & 42,426 \\ 102,426 & 42,426 & 800,0 & 200,0 \\ 42,426 & 42,426 & 200,0 & 400,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

que es el *sistema global reducido* de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos.

Las fuerzas externas conocidas que actúan en los nudos de la estructura (Figuras 9.5a y 9.5c) son:

$$F_{X2} = 12\,\text{kN} \qquad F_{Y2} = 0 \qquad M_2 = 20\,\text{kN}\cdot\text{m} \qquad M_3 = 0$$

Introduciendo estos valores en el sistema global reducido, se tiene:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 68,0 & -44,0 & 102,426 & 42,426 \\ -44,0 & 156,0 & 42,426 & 42,426 \\ 102,426 & 42,426 & 800,0 & 200,0 \\ 42,426 & 42,426 & 200,0 & 400,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los movimientos incógnita se calculan resolviendo este sistema, para dar:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,570 \\ 0,828 \\ -0,0376 \\ -0,342 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se miden en metros y los giros en radianes.

9.5.2 Cálculo de las reacciones

Las reacciones en los nudos con movimientos impedidos o prescritos se calculan de la siguiente manera: para un grado de libertad i prescrito, se calcula la reacción correspondiente utilizando la ecuación $i-$ésima del sistema original de ecuaciones de equilibrio, es decir

$$F_i = \sum_j K_{ij}\, d_j \tag{9.41}$$

Dado que la ecuación $i-$ésima no suele haber sido ensamblada en el sistema de ecuaciones reducido, este producto puede evaluarse también pieza a pieza, calculando y sumando los correspondientes esfuerzos en los extremos de las n piezas que concurren en el nudo que tiene el movimiento prescrito:

$$F_i = \sum_n \left(f^{(e)}\right)_n \tag{9.42}$$

Ejemplo 9.5.2.1

Calcular las reacciones de la estructura reticulada hiperestática de los Ejemplos 9.3.2.1, 9.4.1.1 y 9.5.1.1.
Datos: $L = 10\,\text{m}$, $EA = 10^5$ kN, $EI = 10^5\,\text{kN}\cdot\text{m}^2$ $F = 12\,\text{kN}$, $M = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$.

Una vez conocidos los movimientos incógnita de la estructura, pueden calcularse las reacciones en los nudos prescritos (Figura 9.5a). Para ello, se recupera el sistema de ecuaciones completo obtenido en el Ejemplo 9.4.1.1 y aplicando la expresión (9.41) en cada uno de dichos nudos se obtienen las reacciones correspondientes.

Así, por ejemplo, para calcular la componente de la reacción según el eje X en el empotramiento del nudo 1, se tiene:

$$\begin{aligned} H_1 &= F_{X1} = \sum_{j=1}^{9} K_{1j}\, d_j \\ &= -\text{B}\ u_2 - \text{C}\ \phi_2 = -2,86\,\text{kN}\ \ (\longleftarrow) \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se obtienen las reacciones incógnitas restantes:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,86 \\ -8,28 \\ +14,67 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X3} \\ F_{Y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9,14 \\ +8,28 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN· m. En la Figura 9.7a se muestran las reacciones de la estructura.

9.5.3 Cálculo de los esfuerzos en las piezas

Conocidos los movimientos de los nudos $\mathbf{d}_i$, incógnita principal del problema, los esfuerzos en los extremos de las piezas se calculan *a posteriori*. En general, interesa conocer dichos esfuerzos referidos al sistema local de coordenadas de cada pieza, a fin de obtener directamente las leyes de esfuerzos:

$$\mathbf{f}_a'^{(e)} = \mathbf{k}_{aa}'\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{k}_{ab}'\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \tag{9.43a}$$

$$\mathbf{f}_b'^{(e)} = \mathbf{k}_{ba}'\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{k}_{bb}'\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \tag{9.43b}$$

donde $\mathbf{f}_a'$ y $\mathbf{f}_b'$ son los esfuerzos (en el sistema local de referencia) de los extremos de la barra, $\mathbf{d}_a$ y $\mathbf{d}_b$ son los movimientos (en el sistema global) de dichos los extremos, $\mathbf{k}_{aa}'$,

$\mathbf{k}'_{ab}$, $\mathbf{k}'_{ba}$ y $\mathbf{k}'_{bb}$ son las matrices de rigidez de la pieza (e) (en el sistema local) y $\mathbf{T}$ es la matriz de cambio de coordenadas local-global para la pieza (e).

Ejemplo 9.5.3.1

Para la estructura reticulada hiperestática de los Ejemplos 9.3.2.1, 9.4.1.1, 9.5.1.1 y 9.5.2.1, calcular los esfuerzos en los extremos de las barras y dibujar las leyes de esfuerzos y su deformada.
Datos: $L = 10\,\mathrm{m}$, $EA = 10^5$ kN, $EI = 10^5\,\mathrm{kN\cdot m^2}$ $F = 12\,\mathrm{kN}$, $M = 20\,\mathrm{kN\cdot m}$.

Teniendo en cuenta los movimientos de la estructura obtenidos en el Ejemplo 9.5.1.1 y las Ecs. (9.43a) y (9.43b) pueden calcularse los esfuerzos en los extremos de las barras.

Así, por ejemplo, los esfuerzos en el extremo a de la barra 1 con $\alpha^{(1)} = 90^o$, y movimientos en los extremos, nudos 1 y 2:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,557 \\ 0,821 \\ -0,0348 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

son:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'^{(1)}_a \quad = \quad & \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} -\mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con

$$\begin{array}{ll} \mathsf{A} = EA/L \quad = 100 \cdot 10^2 \text{ kN/m} & \mathsf{D} = 4EI/L = 400 \cdot 10^2 \text{ kN·m} \\ \mathsf{B} = 12EI/L^3 = 12 \cdot 10^2 \text{ kN/m} & \mathsf{E} = 2EI/L = 200 \cdot 10^2 \text{ kN·m} \\ \mathsf{C} = 6EI/L^2 \quad = 60 \cdot 10^2 \text{ kN} & \end{array}$$

Por tanto:

$$\mathbf{f}'^{(1)}_a = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathsf{A}\ v_2 \\ \mathsf{B}\ u_2 + \mathsf{C}\ \phi_2 \\ \mathsf{C}\ u_2 \ + \mathsf{E}\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,28 \\ 2,86 \\ 14,67 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN· m.

Repitiendo el procedimiento se obtienen los esfuerzos restantes:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_{1} \\ F'^{(1)}_{x2} \\ F'^{(1)}_{y2} \\ M'^{(1)}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,28 \\ 2,86 \\ 14,67 \\ 8,28 \\ -2,86 \\ 13,90 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F'^{(2)}_{x2} \\ F'^{(2)}_{y2} \\ M'^{(2)}_{2} \\ F'^{(2)}_{x3} \\ F'^{(2)}_{y3} \\ M'^{(2)}_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,30 \\ 0,61 \\ 6,10 \\ -12,30 \\ -0,61 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN· m.

En las Figuras 9.7a-9.7e se muestran las reacciones, la deformada y las leyes de esfuerzos de la estructura.

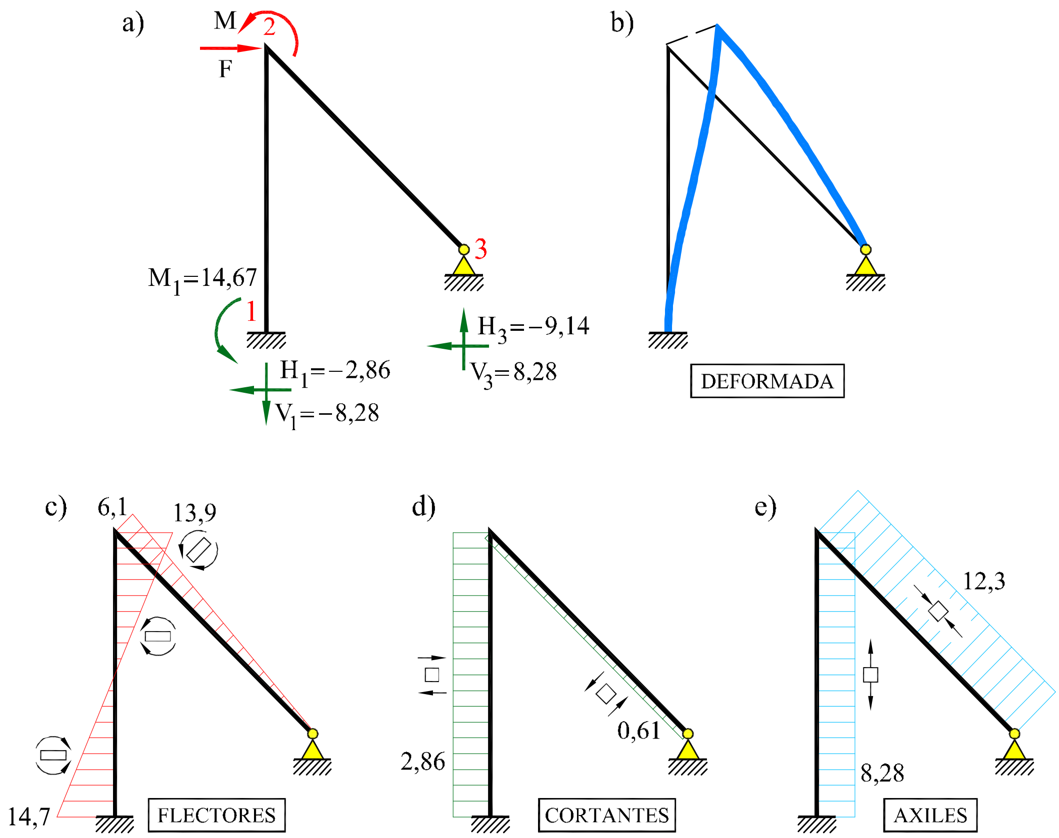


Fig. 9.7: Ejemplo 9.5.3.1: (a) reacciones (b) deformada (c) flectores (d) cortantes y (e) axiles

Ejemplo 9.5.3.2

Resolver la estructura de la Figura 9.8, suponiendo que para limitar el desplazamiento del nudo superior se coloca un tirante con una rigidez a axil de valor $(EA)_t$.
Datos: $L = 10\,\text{m}$, $EA = 10^5\ \text{kN}$, $EI = 10^5\,\text{kN}\cdot\text{m}^2$, $(EA)_t = 11,18 \cdot 10^4\,\text{kN}$, $F = 12\,\text{kN}$, $M = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$.

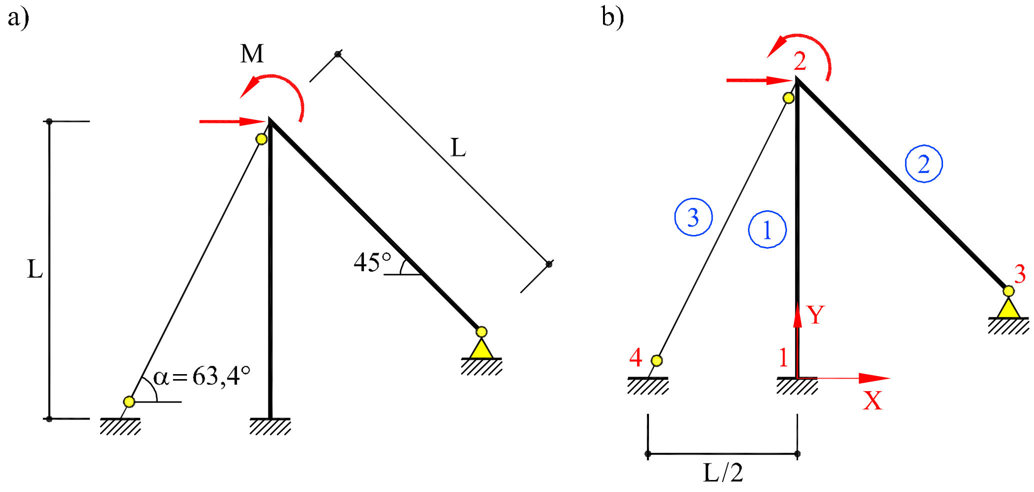


Fig. 9.8: (a) Estructura del Ejemplo 9.5.3.2 (b) numeración y sistema global

La solución de la estructura comienza con el cálculo de las matrices elementales de las barras. Las correspondientes a las barras 1 y 2 han sido calculadas en el Ejemplo 9.3.2.1.

El tirante, barra 3, al estar articulado en ambos extremos sólo trabaja a esfuerzo axil y, en consecuencia, los únicos términos de su matriz elemental no nulos son los correspondientes al esfuerzo axil:

$$\mathbf{K}'^{(3)} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde los términos se expresan en kN/m.

La matriz de rigidez del tirante referida al sistema global se obtiene teniendo en cuenta las expresiones (9.23)-(9.26) y el ángulo $\alpha = 243,2^o$ que forma con el sistema global, para dar:

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{Y} & 0 & -\mathsf{V} & -\mathsf{Y} & 0 \\ \mathsf{Y} & \mathsf{W} & 0 & -\mathsf{Y} & -\mathsf{W} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{V} & -\mathsf{Y} & 0 & \mathsf{V} & \mathsf{Y} & 0 \\ -\mathsf{Y} & -\mathsf{W} & 0 & \mathsf{Y} & \mathsf{W} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con

$\mathsf{V} = 20 \cdot 10^2$ kN/m $\mathsf{W} = 80 \cdot 10^2$ kN/m $\mathsf{Y} = 40 \cdot 10^2$ kN/m

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene realizando el proceso de ensamblaje, descrito en la Sección 9.4.1, y es igual a:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} & \mathbf{k}_{ab}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} & \mathbf{k}_{bb}^{(2)} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(3)} & 0 & \mathbf{k}_{bb}^{(3)} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{k}_{22} = \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(2)} + \mathbf{k}_{aa}^{(3)}$. Sustituyendo los valores adecuados, resulta la matriz global:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{S} & -\mathsf{T} & \mathsf{M} & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & \mathsf{H} & -\mathsf{V} & -\mathsf{Y} & 0 \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & -\mathsf{T} & \mathsf{U} & \mathsf{H} & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & \mathsf{H} & -\mathsf{Y} & -\mathsf{W} & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{M} & \mathsf{H} & \mathsf{N} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & -\mathsf{H} & \mathsf{F} & -\mathsf{G} & -\mathsf{H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & -\mathsf{H} & -\mathsf{G} & \mathsf{F} & -\mathsf{H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{H} & \mathsf{H} & \mathsf{E} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{V} & -\mathsf{Y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{V} & \mathsf{Y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{Y} & -\mathsf{W} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{Y} & \mathsf{W} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con

$\mathsf{T} = \mathsf{G} - \mathsf{Y} = 4 \cdot 10^2$ kN/m $\mathsf{S} = \mathsf{B} + \mathsf{F} + \mathsf{V} = 88 \cdot 10^2$ kN/m

$\mathsf{U} = \mathsf{A} + \mathsf{F} + \mathsf{W} = 236 \cdot 10^2$ kN/m

Las letras restantes tienen el mismo valor que en los Ejemplos 9.3.2.1 y 9.4.1.1.

Las condiciones de apoyo de la estructura son, $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = 0$ y $\phi_1 = \phi_4 = 0$, y las fuerzas externas, $F_{X2} = 12\,\text{kN}$, $F_{Y2} = 0$, $M_2 = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$, y $M_3 = 0$. Introduciendo los movimientos prescritos en el sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos, se eliminan las filas y columnas correspondientes (1, 2, 3, 7, 8, 10, 11 y 12), obteniéndose el sistema de ecuaciones reducido:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 88,0 & -4,0 & 102,426 & 42,426 \\ -4,0 & 236,0 & 42,426 & 42,426 \\ 102,426 & 42,426 & 800,0 & 200,0 \\ 42,426 & 42,426 & 200,0 & 400,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema anterior se resuelve para dar los movimientos incógnita:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,310 \\ 0,036 \\ 0,132 \\ -0,209 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Las reacciones se calculan recuperando el sistema global completo:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,37 \\ -0,36 \\ 10,5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X3} \\ F_{Y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,86 \\ 5,90 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} H_4 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X4} \\ F_{Y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,77 \\ -5,54 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Los esfuerzos se calculan siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores, para resultar:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_{1} \\ F'^{(1)}_{x2} \\ F'^{(1)}_{y2} \\ M'^{(1)}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,36 \\ 2,37 \\ 10,5 \\ 0,36 \\ -2,37 \\ 13,2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F'^{(2)}_{x2} \\ F'^{(2)}_{y2} \\ M'^{(2)}_{2} \\ F'^{(2)}_{x3} \\ F'^{(2)}_{y3} \\ M'^{(2)}_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,02 \\ 0,68 \\ 6,8 \\ -9,02 \\ -0,68 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}'^{(3)} = \begin{bmatrix} F'^{(3)}_{x2} \\ F'^{(3)}_{y2} \\ M'^{(3)}_{2} \\ F'^{(3)}_{x4} \\ F'^{(3)}_{y4} \\ M'^{(3)}_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,19 \\ 0 \\ 0 \\ 6,19 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. Nótese que la barra 3 sólo trabaja a esfuerzo axil (tracción). Las Figuras 9.9a-9.9c muestran las reacciones, la ley de momentos flectores y la deformada, respectivamente. Los resultados obtenidos pueden compararse con los de la Figura 9.7 para la estructura sin tirante.

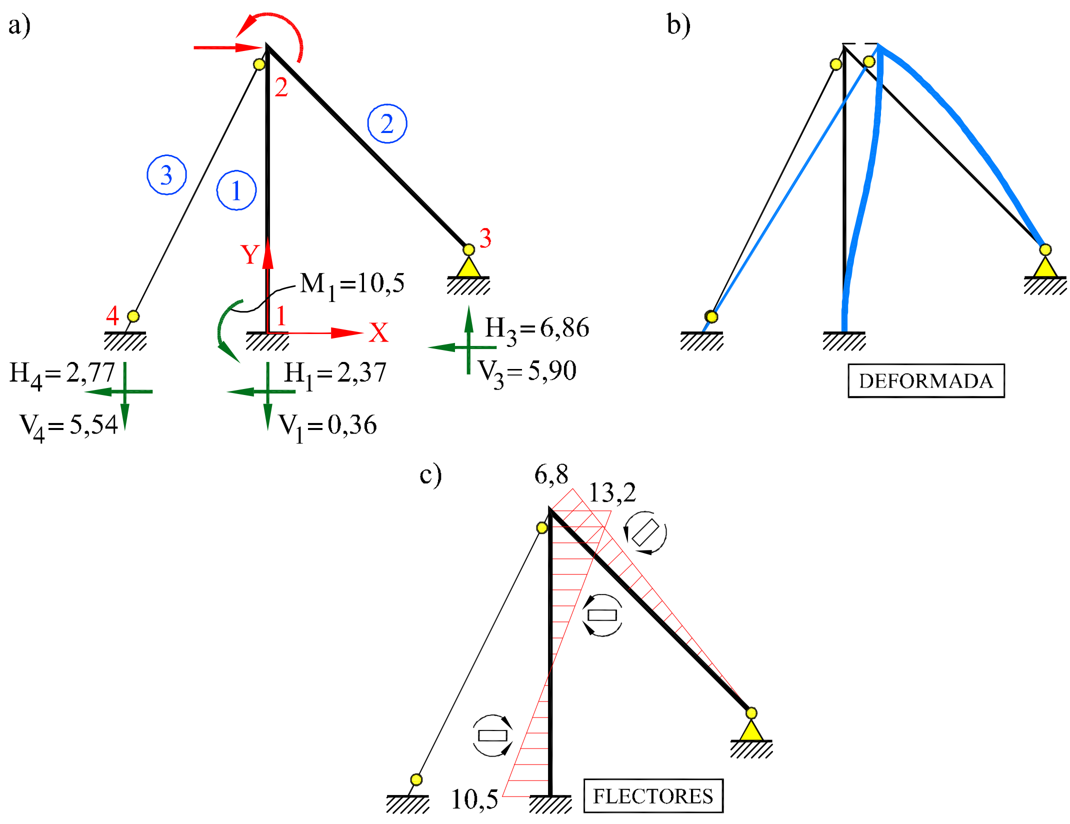


Fig. 9.9: Ejemplo 9.5.3.2: (a) reacciones, (b) deformada y (c) flectores

9.6 Otros tipos de apoyos

Se presentan a continuación ejemplos de resolución de estructuras reticuladas de plano medio con movimientos prescritos no nulos, movimientos prescritos según ejes locales y apoyos elásticos. Los procedimientos seguidos son los explicados en la Sección 8.8 del Capítulo anterior.

Ejemplo 9.6.1

Resolver la estructura reticulada hiperestática de la Figuras 9.10a, suponiendo que el apoyo articulado sufre un movimiento impuesto de componente vertical descendente v_3. Las propiedades mecánicas de las barras son constantes.
Datos: $L = 10\,\mathrm{m}$, $EA = 10^5$ kN, $EI = 10^5\,\mathrm{kN{\cdot}m^2}$, $v_3 = -3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

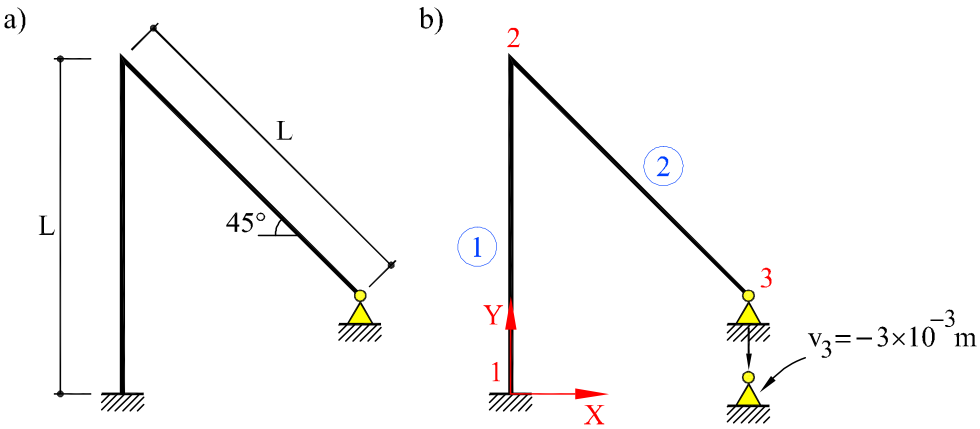


Fig. 9.10: (a) Estructura del Ejemplo 9.6.1 (b) numeración y sistema global

Introduciendo las fuerzas externas $F_{X2} = F_{Y2} = 0$, $M_2 = M_3 = 0$, y las condiciones de apoyo, $u_1 = v_1 = u_3 = 0$, $\phi_1 = 0$ y $v_3 = -3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ en el sistema global de ecuaciones obtenido en el Ejemplo 9.4.1.1, se tiene que el vector de fuerzas es:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F_{X1} & F_{Y1} & M_1 & 0 & 0 & 0 & F_{X3} & F_{Y3} & 0 \end{bmatrix}^T$$

y el vector de movimientos es:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & \phi_2 & 0 & -3 \cdot 10^{-3} & \phi_3 \end{bmatrix}^T$$

Eliminando las ecuaciones correspondientes a los movimientos conocidos, filas 1, 2, 3, 7 y 8, la matriz de rigidez de la estructura (ver Ejemplo 9.4.1.1) se reduce a:

$$\begin{bmatrix} -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{I} & -\mathsf{G} & \mathsf{M} & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & \mathsf{H} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & -\mathsf{G} & \mathsf{J} & \mathsf{H} & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{M} & \mathsf{H} & \mathsf{N} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{E} \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{H} & \mathsf{H} & \mathsf{E} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

donde las letras tienen el mismo valor que en los Ejemplos 9.3.2.1 y 9.4.1.1.

Pasando al segundo miembro las columnas 1, 2, 3, 7 y 8, multiplicadas por u_1, v_1, ϕ_1, u_3, y v_3, respectivamente, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{I} & -\mathsf{G} & \mathsf{M} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{G} & \mathsf{J} & \mathsf{H} & \mathsf{H} \\ \mathsf{M} & \mathsf{H} & \mathsf{N} & \mathsf{E} \\ \mathsf{H} & \mathsf{H} & \mathsf{E} & \mathsf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathsf{G} \\ -\mathsf{F} \\ -\mathsf{H} \\ -\mathsf{H} \end{bmatrix} \cdot v_3$$

Nótese que al ser nulos los movimientos u_1, v_1, ϕ_1, u_3, sólo aparece la columna 8 multiplicada por v_3. Se suprime el vector de cargas por ser nulo y se tiene el sistema reducido de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 68,0 & -44,0 & 102,426 & 42,426 \\ -44,0 & 156,0 & 42,426 & 42,426 \\ 102,426 & 42,426 & 800,0 & 200,0 \\ 42,426 & 42,426 & 200,0 & 400,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,2 \\ -16,8 \\ -12,728 \\ -12,728 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones obtenido es análogo al del Ejemplo 9.5.1.1 con un vector de fuerzas nodales distinto debido al sistema de cargas considerado en cada caso. Los movimientos incógnita se calculan resolviendo este sistema, para obtener:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,749 \\ -0,0826 \\ -0,407 \\ -0,397 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Una vez conocidos los movimientos de la estructura, las reacciones se calculan recuperando el sistema completo de ecuaciones de equilibrio:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,855 \\ 0,826 \\ 8,350 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X3} \\ F_{Y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,855 \\ -0,826 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de las barras se calculan siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_{1} \\ F'^{(1)}_{x2} \\ F'^{(1)}_{y2} \\ M'^{(1)}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,826 \\ 0,855 \\ 8,35 \\ -0,826 \\ -0,855 \\ 0,20 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F'^{(2)}_{x2} \\ F'^{(2)}_{y2} \\ M'^{(2)}_{2} \\ F'^{(2)}_{x3} \\ F'^{(2)}_{y3} \\ M'^{(2)}_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,19 \\ -0,02 \\ -0,20 \\ 1,19 \\ 0,02 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

En la Figura 9.11 se muestran la deformada y las leyes de esfuerzos de la estructura.

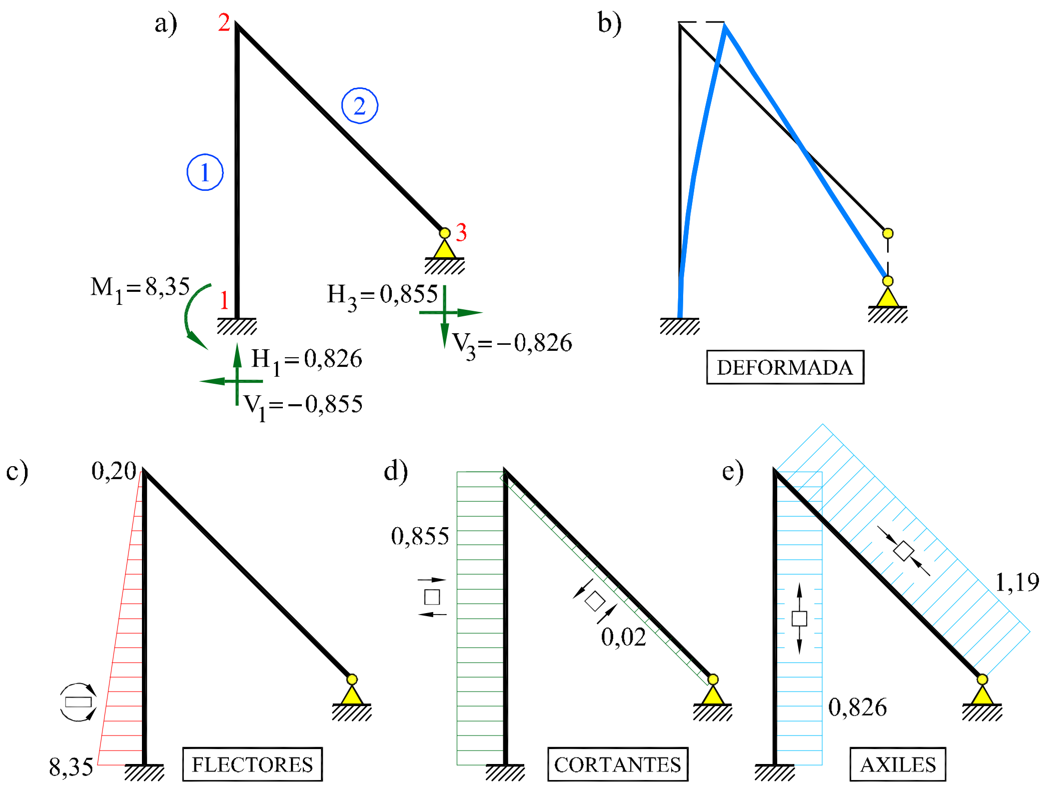


Fig. 9.11: Ejemplo 9.6.1: (a) reacciones (b) deformada (c) flectores (d) cortantes y (e) axiles

Ejemplo 9.6.2

Resolver la estructura reticulada hiperestática de la Figura 9.12a, sometida a las cargas que se indican, teniendo en cuenta que el plano del apoyo 3 forma un ángulo $\alpha = 45^o$ con la horizontal.
Datos: $L = 10\,\text{m}$, $EA = 10^5$ kN, $EI = 10^5\,\text{kN}\cdot\text{m}^2$ $F = 12\,\text{kN}$, $M = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$.

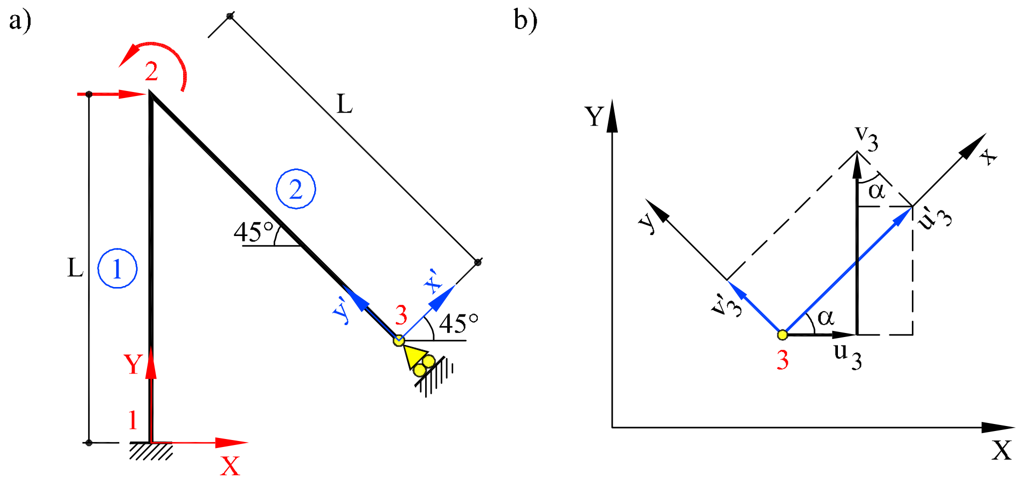


Fig. 9.12: (a) Estructura del Ejemplo 9.6.2 (b) sistema global y local del nudo 3

Las fuerzas externas conocidas son:

$$F_{X2} = 12\,\text{kN} \qquad F_{Y2} = 0 \qquad M_2 = 20\,\text{kN}\cdot\text{m} \qquad F'_{x3} = 0 \qquad M_3 = 0$$

El sistema global de ecuaciones de equilibrio de fuerzas de la estructura (ver Ejemplo 9.4.1.1) es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(2)} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} & \mathbf{k}_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}$$

La estructura tiene prescritos los movimientos $u_1 = v_1 = \phi_1 = 0$ y $v'_3 = 0$. El deslizamiento del nudo 3 está prescrito según los ejes locales de dicho nudo, movimiento nulo según el eje y' (Figura 9.12a). Por tanto, es necesario transformar las ecuaciones correspondientes al nudo 3 al sistema local de dicho nudo. Utilizando las transformaciones:

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{T}}\,\mathbf{f}'_3 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{d}_3 = \widehat{\mathbf{T}}\,\mathbf{d}'_3$$

donde $\widehat{\mathbf{T}}$ es la matriz de transformación del sistema (x', y') al sistema global (X, Y), se puede escribir (ver Sección 8.8.2 del Capítulo anterior):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(2)} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)}\widehat{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{T}}^T\mathbf{k}_{ba}^{(2)} & \widehat{\mathbf{T}}^T\mathbf{k}_{bb}^{(2)}\widehat{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}'_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Dado que el ángulo formado por los sistemas global y local del nudo 3 es $\alpha = 45^o$, la matriz de transformación $\widehat{\mathbf{T}}$ (Figura 9.12b) es:

$$\widehat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz $\mathbf{k}_{ab}^{(2)}\widehat{\mathbf{T}}$, por ejemplo, resulta:

$$\mathbf{k}_{ab}^{(2)}\widehat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -\mathsf{F} & \mathsf{G} & \mathsf{H} \\ \mathsf{G} & -\mathsf{F} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathsf{P} & \mathsf{Q} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{P} & -\mathsf{Q} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{R} & 0 & \mathsf{E} \end{bmatrix}$$

con
$\mathsf{P} = \sqrt{2}/2\ \mathsf{B} = 8,485 \cdot 10^2$ kN/m $\qquad \mathsf{Q} = \sqrt{2}/2\ \mathsf{A} = 70,711 \cdot 10^2$ kN/m
$\mathsf{R} = \sqrt{2}\ \mathsf{H} = 60 \cdot 10^2$ kN
Los coeficientes restantes tienen el mismo valor que en los Ejemplos 9.3.2.1 y 9.4.1.1.

Procediendo de forma análoga para las restantes matrices afectadas por los movimientos del nudo 3, e introduciendo los valores conocidos de las fuerzas externas en los nudos, la Ec. (a), resulta:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{I} & -\mathsf{G} & \mathsf{M} & -\mathsf{P} & \mathsf{Q} & \mathsf{H} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & -\mathsf{G} & \mathsf{J} & \mathsf{H} & -\mathsf{P} & -\mathsf{Q} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{M} & \mathsf{H} & \mathsf{N} & -\mathsf{R} & 0 & \mathsf{E} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{P} & -\mathsf{P} & -\mathsf{R} & \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{R} \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{Q} & -\mathsf{Q} & 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{H} & \mathsf{H} & \mathsf{E} & -\mathsf{R} & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u'_3 \\ 0 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \\ 12 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ F'_{y3} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

Nótese que los movimientos del nudo 3 ahora están referidos al sistema local de dicho nudo.

Eliminando las filas y columnas 1, 2, 3 y 8, correspondientes a los movimientos prescritos se obtiene el sistema global reducido:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 68,0 & -44,0 & 102,426 & -8,485 & 42,426 \\ -44,0 & 156,0 & 42,426 & -8,485 & 42,426 \\ 102,426 & 42,426 & 800,0 & -60,0 & 200,0 \\ -8,485 & -8,485 & -60,0 & 12,0 & -60,0 \\ 42,426 & 42,426 & 200,0 & -60,0 & 400,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u'_3 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtienen los movimientos incógnita:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u'_3 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,477 \\ 0,826 \\ 0,128 \\ 3,619 \\ 0,128 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Recuperando el sistema de ecuaciones completo, Ec. (b), se calculan las reacciones:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,74 \\ -8,26 \\ 17,42 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}'_3 = \begin{bmatrix} H'_3 \\ V'_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11,67 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. Las reacciones en el nudo 1 están referidas al sistema global de referencia, mientras que las reacciones en el nudo 3 se refieren al sistema local de dicho nudo.

Los esfuerzos en los extremos de las barras se calculan siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_{1} \\ F'^{(1)}_{x2} \\ F'^{(1)}_{y2} \\ M'^{(1)}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,26 \\ 3,74 \\ 17,42 \\ 8,26 \\ -3,74 \\ 20,0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F'^{(2)}_{x2} \\ F'^{(2)}_{y2} \\ M'^{(2)}_{2} \\ F'^{(2)}_{x3} \\ F'^{(2)}_{y3} \\ M'^{(2)}_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,67 \\ 0 \\ 0 \\ -11,67 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Las reacciones y la deformada se muestran en las Figuras 9.13a y 9.13b, respectivamente. Las leyes de flectores, cortantes y axiles, se muestran en las Figuras 9.13c-9.13e. La barra 2 trabaja sólo a esfuerzo axil.

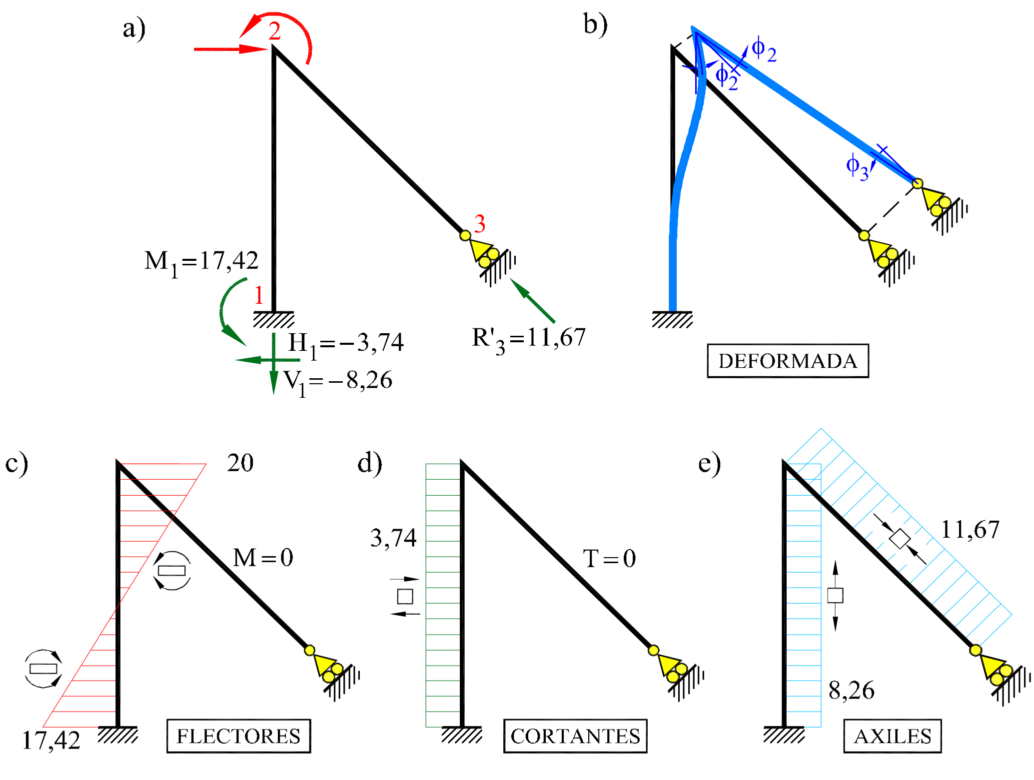


Fig. 9.13: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 9.6.2

Ejemplo 9.6.3

Resolver la estructura reticulada hiperestática de la Figura 9.14a, sometida a las cargas que se indican, teniendo en cuenta que el apoyo articulado tiene un muelle horizontal de rigidez $k = 50 \cdot 10^2$kN/m.
Datos: $L = 10\,\text{m}$, $EA = 10^5$ kN, $EI = 10^5$kN·m^2 $F = 12\,\text{kN}$, $M = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$.

El proceso de solución es idéntico al seguido en el Ejemplo 9.5.1.1, la única modificación reside en las condiciones de apoyo.

Introduciendo los movimientos prescritos, $u_1 = v_1 = v_3 = 0$, $\phi_1 = 0$ y las fuerzas externas, $F_{X2} = 12\,\text{kN}$, $F_{Y2} = 0$, $M_2 = 20\,\text{kN}\cdot\text{m}$, y $F_{X3} = 0$ y $M_3 = 0$, en el sistema global de ecuaciones de fuerzas de equilibrio en los nudos (ver Ejemplo 9.4.1.1), se obtiene:

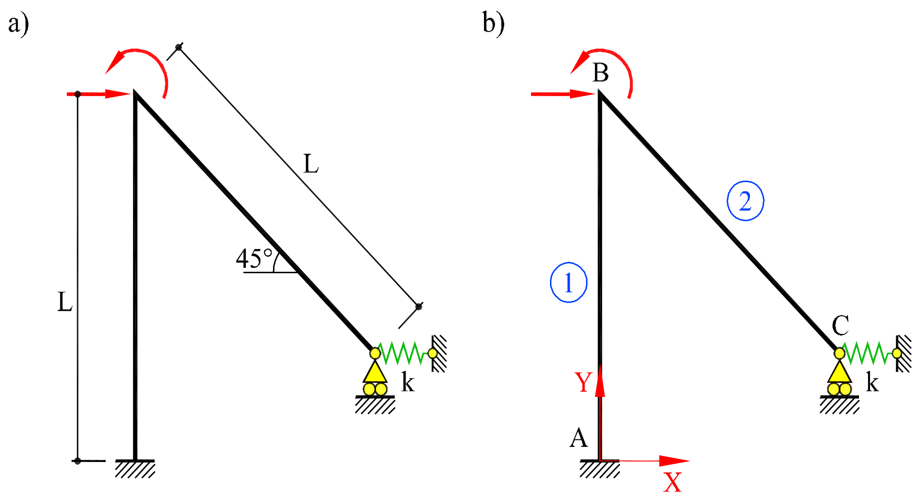


Fig. 9.14: (a) Estructura del Ejemplo 9.6.3 (b) numeración y sistema global

$$\begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{I} & -\mathsf{G} & \mathsf{M} & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & \mathsf{H} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & -\mathsf{G} & \mathsf{J} & \mathsf{H} & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{M} & \mathsf{H} & \mathsf{N} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{E} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & -\mathsf{H} & \mathsf{F} & -\mathsf{G} & -\mathsf{H} \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & -\mathsf{H} & -\mathsf{G} & \mathsf{F} & -\mathsf{H} \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{H} & \mathsf{H} & \mathsf{E} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ 0 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \\ 12 \\ 0 \\ 20 \\ F_{X3} - ku_3 \\ F_{Y3} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

con:

$\mathsf{A} = 100 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{D} = 400 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{G} = 44 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{J} = 156 \cdot 10^2$

$\mathsf{B} = 12 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{E} = 200 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{H} = 42{,}426 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{M} = 102{,}426 \cdot 10^2$

$\mathsf{C} = 60 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{F} = 56 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{I} = 68 \cdot 10^2$ $\quad \mathsf{N} = 800 \cdot 10^2$

en las unidades adecuadas (ver Ejemplos 9.3.2.1 y 9.4.1.1).

Nótese que en la séptima ecuación, correspondiente al apoyo elástico ($F_{X3} = 0$), el vector de fuerzas externas en los nudos se modifica con el término ku_3 (ver Sección 8.8.3 del Capítulo 8).

Pasando el término ku_3 al miembro de la izquierda se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{I} & -\mathsf{G} & \mathsf{M} & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & \mathsf{H} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & -\mathsf{G} & \mathsf{J} & \mathsf{H} & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & \mathsf{H} \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{M} & \mathsf{H} & \mathsf{N} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{E} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{F} & \mathsf{G} & -\mathsf{H} & \underline{\mathsf{F}+k} & -\mathsf{G} & -\mathsf{H} \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{G} & -\mathsf{F} & -\mathsf{H} & -\mathsf{G} & \mathsf{F} & -\mathsf{H} \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{H} & \mathsf{H} & \mathsf{E} & -\mathsf{H} & -\mathsf{H} & \mathsf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ 0 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \\ 12 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ F_{Y3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se muestra subrayado el coeficiente afectado por la constante elástica del muelle ($\mathsf{F}+k$). Eliminando las filas y columnas 1, 2, 3 y 8, correspondientes a los movimientos conocidos, el sistema global reducido es:

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 68,0 & -44,0 & 102,426 & -56,0 & 42,426 \\ -44,0 & 156,0 & 42,426 & 44,0 & 42,426 \\ 102,426 & 42,426 & 800,0 & -42,426 & 200,0 \\ -56,0 & 44,0 & -42,426 & \mathbf{106{,}0} & -42,426 \\ 42,426 & 42,426 & 200,0 & -42,426 & 400,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema anterior se resuelve para dar los movimientos incógnita:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,0 \\ 0,781 \\ -0,153 \\ 1,623 \\ -0,258 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Las reacciones se calculan recuperando el sistema global completo (Ec. (a)):

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,88 \\ -7,82 \\ 20,93 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X3} \\ F_{Y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,12 \\ 7,82 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Los esfuerzos se calculan siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores, para resultar:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_{1} \\ F'^{(1)}_{x2} \\ F'^{(1)}_{y2} \\ M'^{(1)}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,82 \\ 3,88 \\ 20,93 \\ 7,82 \\ -3,88 \\ 17,90 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F'^{(2)}_{x2} \\ F'^{(2)}_{y2} \\ M'^{(2)}_{2} \\ F'^{(2)}_{x3} \\ F'^{(2)}_{y3} \\ M'^{(2)}_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,26 \\ -0,21 \\ 2,10 \\ -11,26 \\ 0,21 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Las Figuras 9.15a-9.15e muestran las reacciones, la deformada y las leyes de flectores, cortantes y axiles, respectivamente.

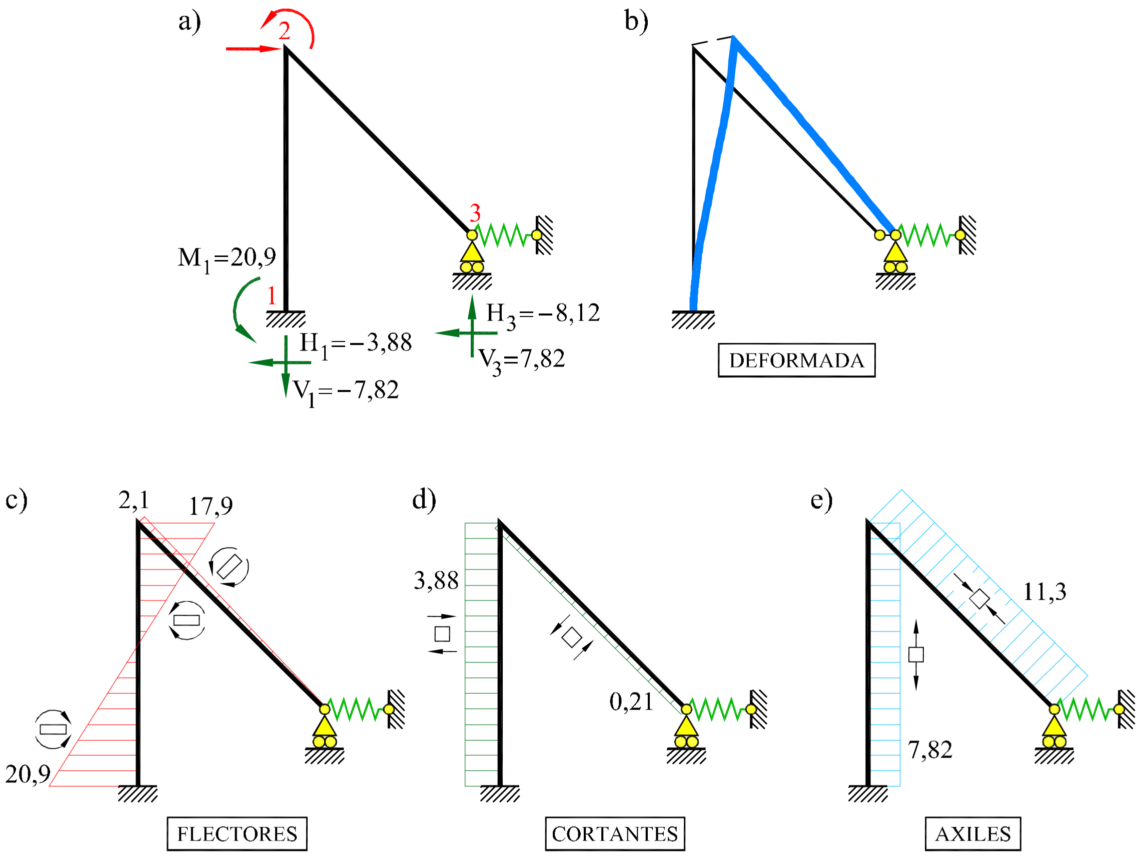


Fig. 9.15: Leyes de esfuerzos y deformada del Ejemplo 9.6.3

9.7 Cargas actuantes sobre las piezas

Los casos de carga que pueden actuar sobre las piezas son muy variados. Es necesario, por tanto, disponer de una metodología que permita tratarlos con generalidad y que, a la vez, permita plantear el método de resolución haciendo abstracción de las particularidades del caso de carga considerado. Esto se consigue por el procedimiento descrito en la Sección 8.10 del Capítulo 8, basado en el *principio de superposición*.

Consideremos la estructura reticulada de plano medio de la Figura 9.16a, con cargas actuando sobre una o más de sus piezas. El sistema real de cargas puede descomponerse en dos estados: el estado I de *empotramiento perfecto* o *intraslacional* (Figura 9.16b), en el que se han impedido los movimientos en los nudos y, el estado II de *cargas sólo en los nudos* (Figura 9.16c), donde se aplican, en los nudos de la estructura, las reacciones cambiadas de signo del estado anterior.

La suma de las cargas actuando en los estados I y II corresponde a las cargas originales sobre la estructura. El resultado final, en movimientos y esfuerzos, es igual a la suma de los resultados de los dos estados.

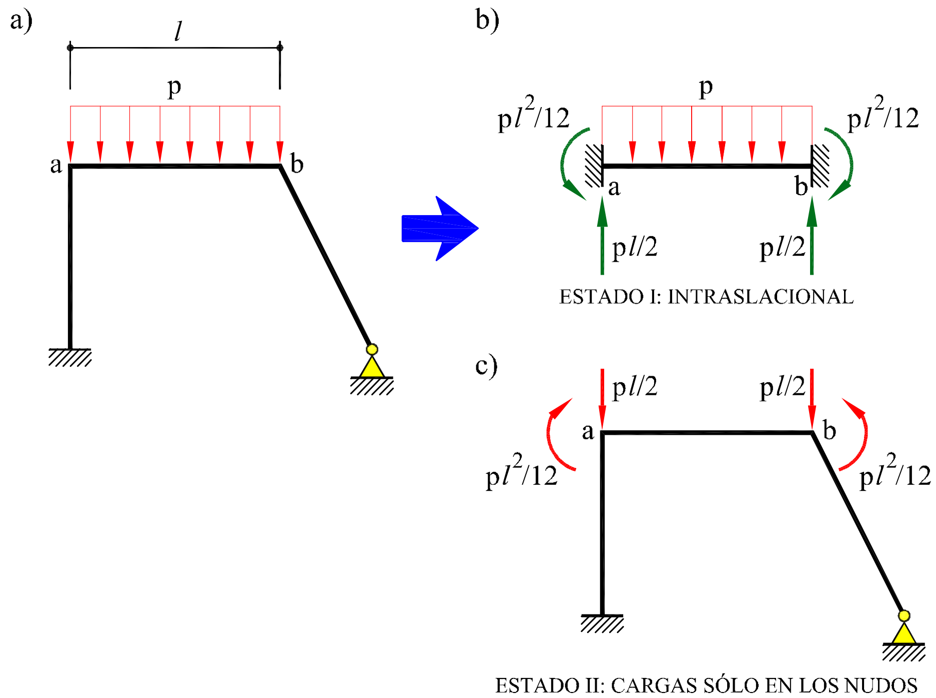


Fig. 9.16: Cargas sobre las barras

Ejemplo 9.7.1

Resolver la estructura de la Figura 9.17, sometida a la carga p uniformemente distribuida que se indica, descomponiendo en suma de un estado de *empotramiento perfecto* más un estado de *cargas en los nudos*. Todas las piezas tienen las mismas propiedades mecánicas.
Datos: $L = 10\,\text{m}$, $EA = 10^5$ kN, $EI = 10^5\,\text{kN}\cdot\text{m}^2$, $p = 2{,}4\,\text{kN/m}$.

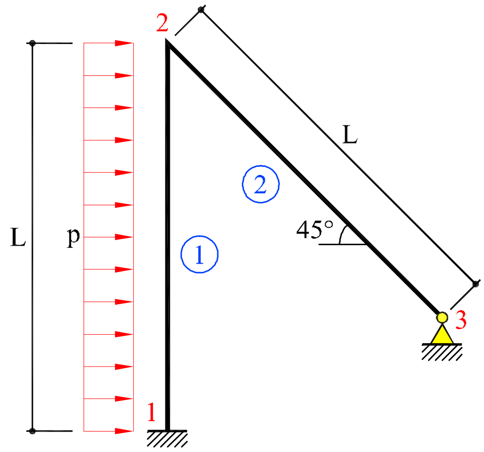


Fig. 9.17: Estructura del Ejemplo 9.7.1

La estructura puede resolverse descomponiendo el estado de cargas en suma de dos estados: (a) el estado I (intraslacional) y (b) el estado II (cargas sólo en los nudos).

El estado I se reduce a resolver por el método tradicional la viga biempotrada 1 sometida a la carga p uniformemente repartida. Las reacciones, las leyes de esfuerzos y la deformada del estado I se muestran en la Figura 9.18, donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

El estado II resuelve la estructura reticulada de plano medio sometida a cargas sólo en los nudos de valor igual a las reacciones obtenidas en el Estado I y de signo opuesto. Las reacciones, las leyes de esfuerzos y la deformada del estado II se muestran en la Figura 9.19 (fuerzas en kN y momentos en kN·m)

Aplicando el principio de superposición, los resultados totales se obtienen sumando los correspondientes a los estados I y II. En la Figura 9.20 se muestran las reacciones, las leyes de esfuerzos y la deformada de la estructura (fuerzas en kN y momentos en kN·m).

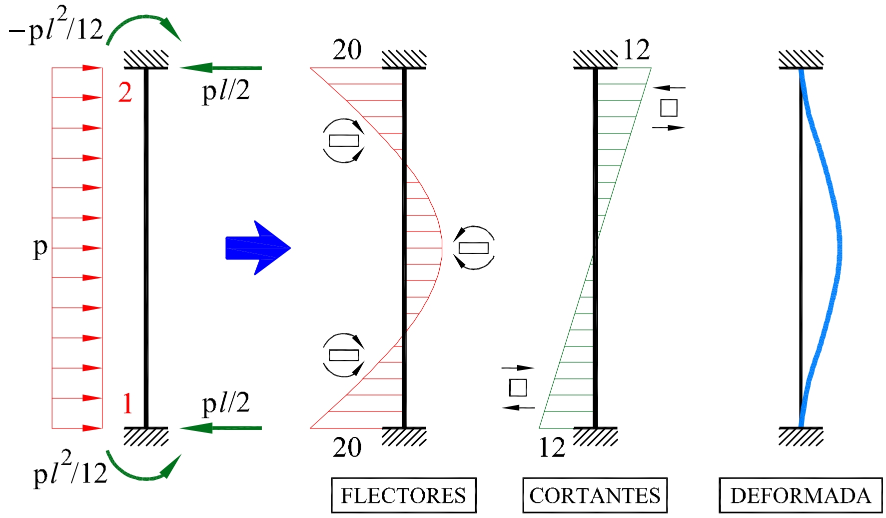


Fig. 9.18: Resolución del estado I del Ejemplo 9.7.1

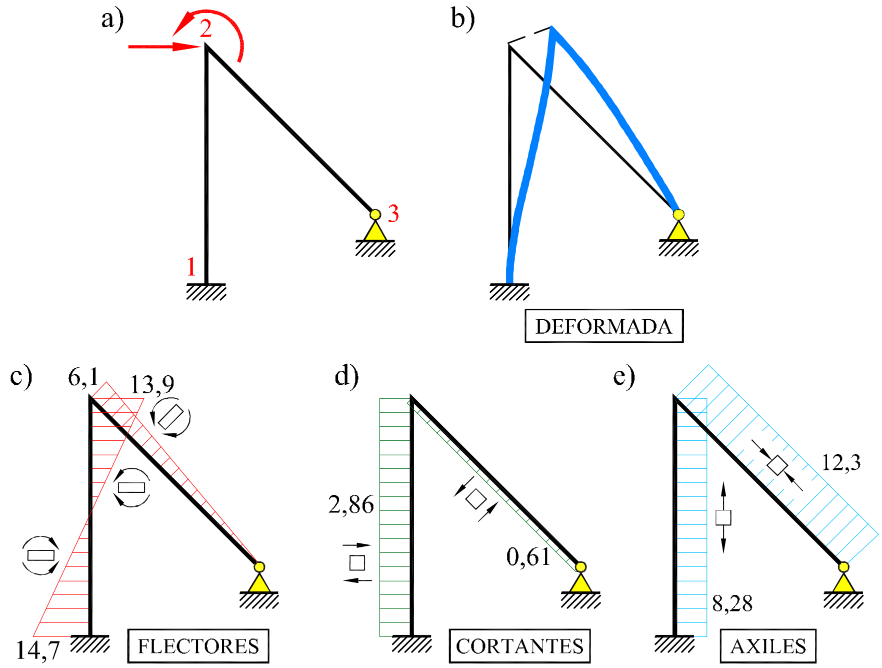


Fig. 9.19: Resolución del estado II del Ejemplo 9.7.1

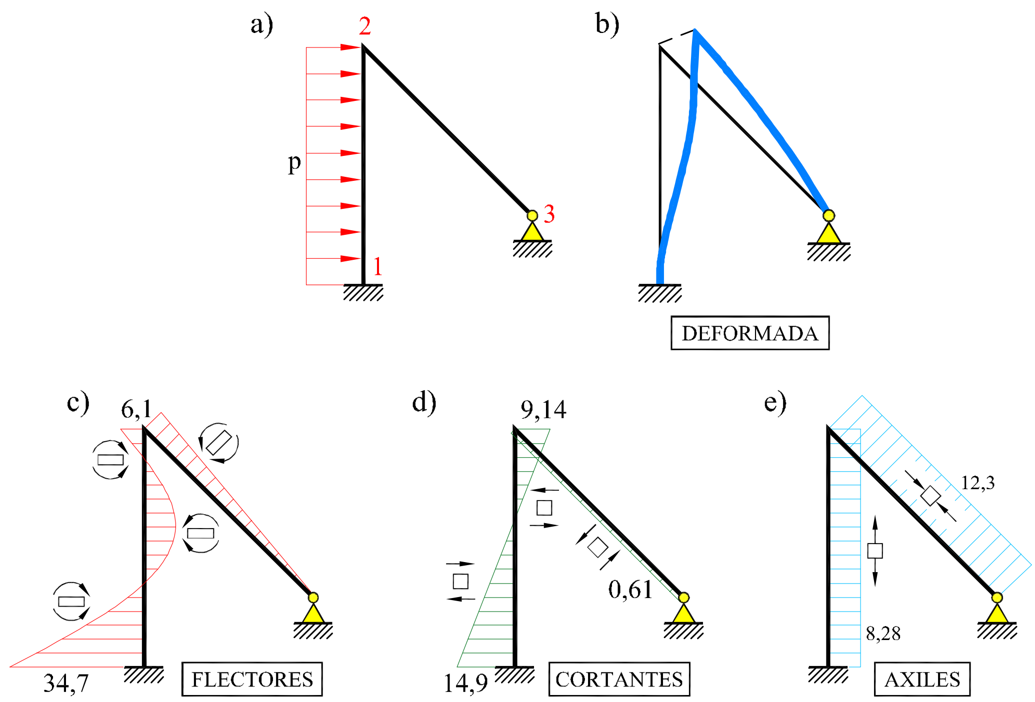


Fig. 9.20: Resultados totales del Ejemplo 9.7.1

Ejemplo 9.7.2

Resolver el pórtico de la Figura 9.21a, sometido a carga vertical uniforme sobre el dintel, descomponiendo en suma de un estado de *empotramiento perfecto* más un estado de *cargas en los nudos*. Todas las piezas tienen las mismas propiedades mecánicas.
Datos: $a = 5\,\text{m}$, $EI = 2 \cdot 10^5$ kN·m^2 y $EA = 10^7$ kN, $p = 20\,\text{kN/ m}$.

Según lo planteado en esta Sección, se descompone el estado de carga uniforme sobre el dintel en suma de dos estados (Figura 9.21b). El estado I, intraslacional, es fácil de resolver de forma analítica para obtener las reacciones $V = pa/2$ y $M = pa^2/12$ (Figura 9.22a). Las leyes de esfuerzos y la deformada se muestran en las Figuras 9.22b-9.22d.

El estado II, con cargas sólo en los nudos (Figura 9.23a), puede resolverse mediante el método directo de rigidez. Las cargas aplicadas en los nudos de la estructura son las reacciones del estado I con signo opuesto, V=50 kN y M= 41,67 kN·m.

La numeración elegida para la resolución del ejemplo, así como los correspondientes sistemas de referencia global y locales se muestran en la Figura 9.23b.

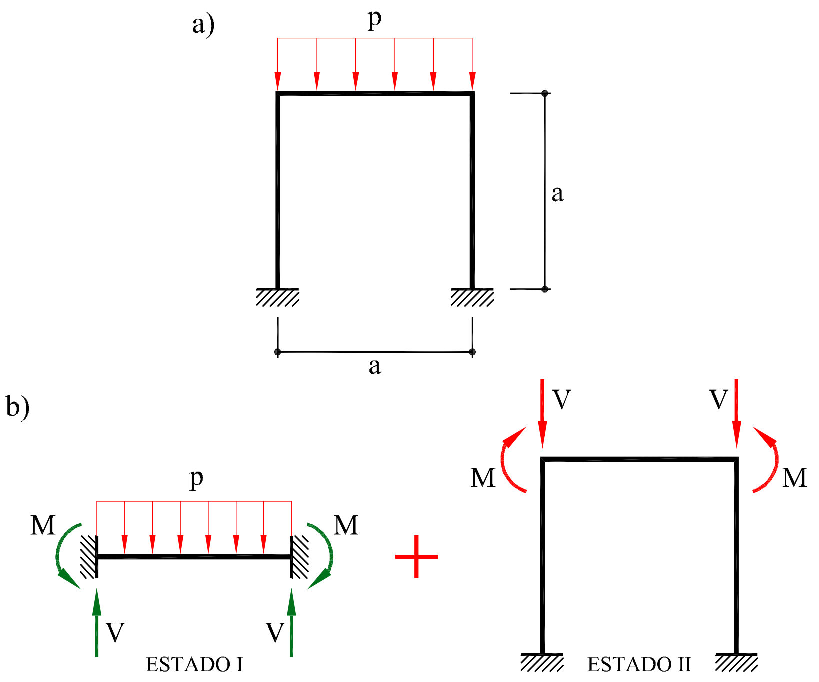


Fig. 9.21: (a) Estructura del Ejemplo 9.7.2 (b) Descomposición del estado de cargas

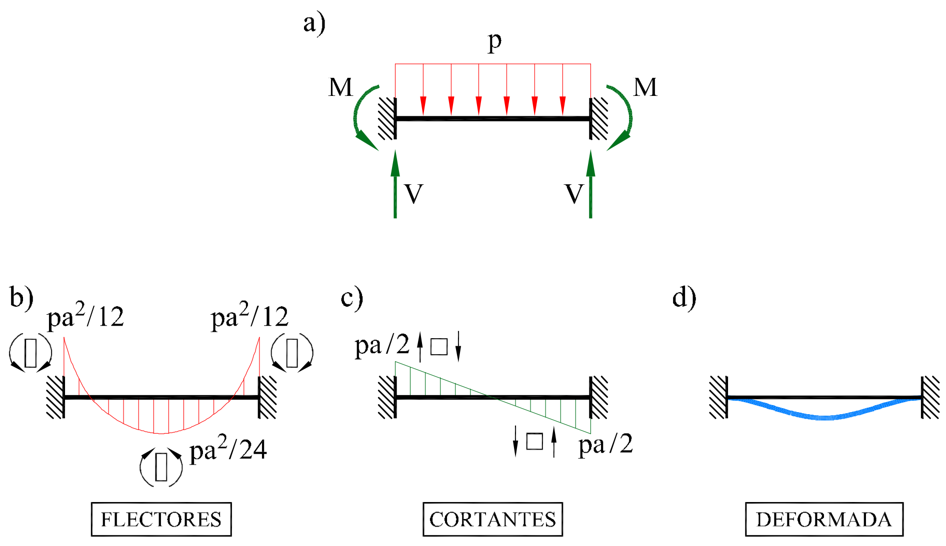


Fig. 9.22: Resolución del estado I del Ejemplo 9.7.2

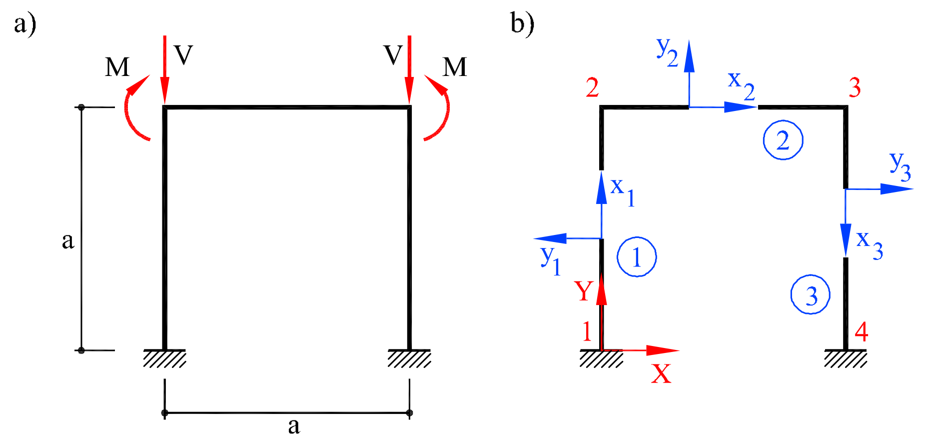


Fig. 9.23: (a) Estado II del Ejemplo 9.7.2 (b) numeración y sistemas de referencia

Se calculan, a continuación, las matrices de rigidez elementales de las piezas. En este caso, las propiedades mecánicas de las barras son idénticas y, por tanto, estas matrices de rigidez son iguales para todas ellas y de valor:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ -\mathsf{A} & 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{B} & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{E} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

con

$\mathsf{A} = EA/a = 200 \cdot 10^4$ kN/m $\mathsf{D} = 4EI/a = 16 \cdot 10^4$ kN·m

$\mathsf{B} = 12EI/a^3 = 1,92 \cdot 10^4$ kN/m $\mathsf{E} = 2EI/a = 8 \cdot 10^4$ kN·m

$\mathsf{C} = 6EI/a^2 = 4,8 \cdot 10^4$ kN

Las matrices de rigidez de cada barra en el sistema global de referencia, teniendo en cuenta las expresiones (9.23)-(9.26) y el ángulo que forma cada barra con el sistema global de coordenadas ($\alpha^{(1)} = 90^o$, $\alpha^{(2)} = 0^o$ y $\alpha^{(3)} = 270^o$), son:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} \\ -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ -\mathsf{A} & 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{B} & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{E} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 \\ \mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} \\ -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 \\ \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

Puede observarse que, en este caso, las matrices en ejes globales son idénticas a $\mathbf{K}'$, salvo permutaciones de filas y columnas.

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene realizando el proceso de ensamblaje, descrito en la Sección 9.4.1, y es igual a:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(2)} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(2)} & \mathbf{k}_{bb}^{(2)} + \mathbf{k}_{aa}^{(3)} & \mathbf{k}_{ab}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(3)} & \mathbf{k}_{bb}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores adecuados, resulta la matriz global:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{F} & 0 & \mathsf{C} & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & \mathsf{F} & \mathsf{C} & 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{C} & \mathsf{C} & \mathsf{G} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & \mathsf{F} & 0 & \mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{B} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{F} & -\mathsf{C} & 0 & -\mathsf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{E} & \mathsf{C} & -\mathsf{C} & \mathsf{G} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

donde $\mathsf{F} = \mathsf{A} + \mathsf{B} = 201,92 \cdot 10^4$ kN/m, $\mathsf{G} = 2\mathsf{D} = 32 \cdot 10^4$ kN·m; las letras restantes tienen significado idéntico al utilizado en las matrices anteriores. Puede observarse claramente que la matriz de rigidez global de la estructura es una matriz en banda y simétrica.

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, es decir, empotramiento en los nudos 1 y 4, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los

grados de libertad de dichos nudos (1, 2, 3 y 10, 11, 12), obteniéndose el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$10^4 \cdot \begin{bmatrix} 201,92 & 0 & 4,80 & -200,0 & 0 & 0 \\ 0 & 201,92 & 4,80 & 0 & -1,92 & 4,80 \\ 4,80 & 4,80 & 32,0 & 0 & -4,80 & 8,0 \\ -200,0 & 0 & 0 & 201,92 & 0 & 4,80 \\ 0 & -1,92 & -4,80 & 0 & 201,92 & -4,80 \\ 0 & 4,80 & 8,0 & 4,80 & -4,80 & 32,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50,0 \\ -41,67 \\ 0 \\ -50,0 \\ 41,67 \end{bmatrix}$$

El término de la derecha del sistema anterior corresponde al caso de cargas considerado, en el que las fuerzas V y los momentos M, actuantes sobre los nudos 2 y 3, se han introducido con los signos correspondientes, respecto al sistema global de referencia. Se observa que el caso de carga es simétrico.

La solución de este sistema de ecuaciones permite obtener el valor de los movimientos incógnita, es decir, los asociados a los nudos 2 y 3, que corresponden a los grados de libertad 4, 5, 6 y 7, 8, 9, respectivamente. Se obtiene:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,0021 \\ -0,25 \\ -1,74 \\ -0,0021 \\ -0,25 \\ +1,74 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

donde los desplazamientos se miden en metros y los ángulos en radianes. Los sentidos de estos movimientos vienen dados por los correspondientes signos, referidos al sistema global de referencia. Se observa que los movimientos de los nudos 2 y 3 son simétricos uno del otro.

Se calculan, a continuación, las reacciones en los nudos con movimientos prescritos (nudos 1 y 4). Para ello, una vez conocidos los movimientos en todos los nudos, se recupera el sistema completo de ecuaciones y se calculan las fuerzas incógnita en los grados de libertad prescritos. A modo de ejemplo, se calcula la componente de la reacción según el eje X en el nudo 1; aplicando la Ec. (9.41), puede escribirse:

$$\begin{aligned} H_1 &= F_{X1} = \sum_{j=1}^{12} K_{1j}\, d_j \\ &= -\mathsf{B}\, u_2 - \mathsf{C}\, \phi_2 = +8,31\,\text{kN} \qquad (\rightarrow) \end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento para las reacciones restantes, se obtiene:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,31 \\ 50,0 \\ -13,8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} H_4 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X4} \\ F_{Y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,31 \\ 50,0 \\ 13,8 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. El sistema de reacciones obtenido es simétrico.

Los valores de los esfuerzos en los extremos de cada barra se calculan a partir de los movimientos expresados mediante las Ecs. (9.43a)-(9.43b). Así, por ejemplo, los esfuerzos en el extremo a de la barra 1 $\left(\alpha^{(1)} = 90^o\right)$ son:

$$\mathbf{f}_a'^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -\mathsf{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\mathbf{f}_a'^{(1)} = \begin{bmatrix} F_{x1}'^{(1)} \\ F_{y1}'^{(1)} \\ M_1'^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathsf{A}\ v_2 \\ \mathsf{B}\ u_2 + \mathsf{C}\ \phi_2 \\ \mathsf{C}\ u_2 + \mathsf{E}\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50,0 \\ -8,31 \\ -13,8 \end{bmatrix}$$

Repitiendo el procedimiento se obtienen los restantes valores para los esfuerzos en los extremos de las barras:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F_{x1}'^{(1)} \\ F_{y1}'^{(1)} \\ M_1'^{(1)} \\ F_{x2}'^{(1)} \\ F_{y2}'^{(1)} \\ M_2'^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50,0 \\ -8,31 \\ -13,8 \\ -50,0 \\ 8,31 \\ -27,7 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F_{x2}'^{(2)} \\ F_{y2}'^{(2)} \\ M_2'^{(2)} \\ F_{x3}'^{(2)} \\ F_{y3}'^{(2)} \\ M_3'^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,31 \\ 0 \\ -13,9 \\ -8,31 \\ 0 \\ 13,9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}'^{(3)} = \begin{bmatrix} F_{x3}'^{(3)} \\ F_{y3}'^{(3)} \\ M_3'^{(3)} \\ F_{x4}'^{(3)} \\ F_{y4}'^{(3)} \\ M_4'^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50,0 \\ 8,31 \\ 27,7 \\ -50,0 \\ -8,31 \\ 13,82 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. La deformada y las leyes de esfuerzos correspondientes al estado II se representan en las Figuras 9.24a-9.24e.

Los desplazamientos horizontales y verticales calculados para los nudos 2 y 3 son debidos a la deformación de las piezas causada por el esfuerzo axil. Si se considera una rigidez a axil $EA = \infty$, se obtienen para los movimientos y reacciones incógnita los siguientes valores:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & \phi_2 & u_3 & v_3 & \phi_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,74 & 0 & 0 & 1,74 \end{bmatrix}^T \cdot 10^{-4}$$

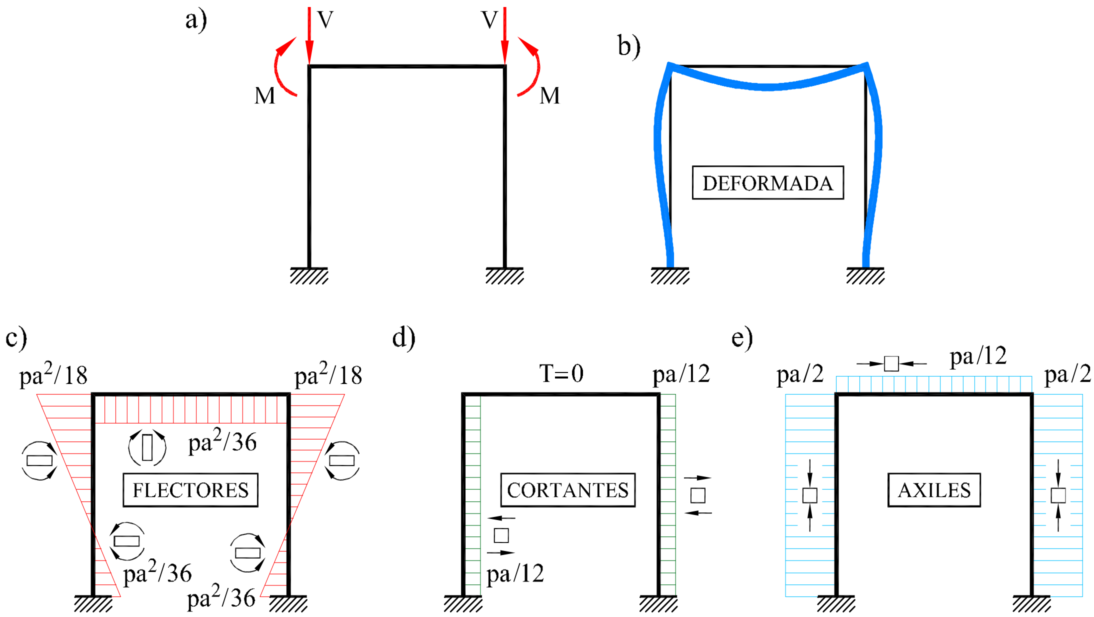


Fig. 9.24: Resolución del Estado II del Ejemplo 9.7.2

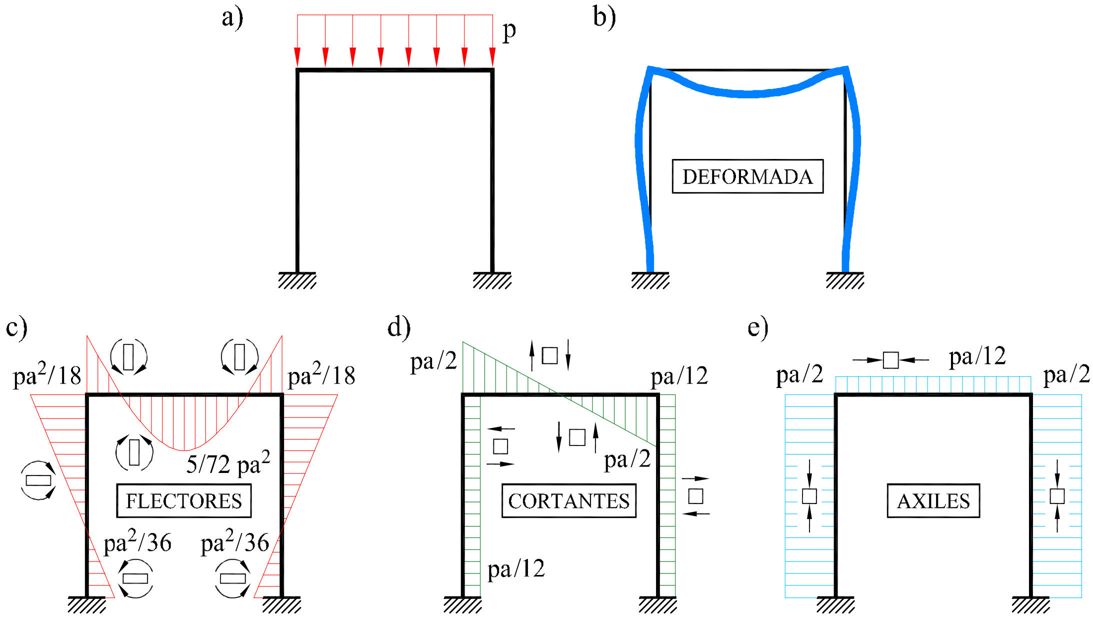


Fig. 9.25: Resultados totales del Ejemplo 9.7.2

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,33 \\ 50,0 \\ -13,9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} H_4 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X4} \\ F_{Y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,33 \\ 50,0 \\ 13,9 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que estos valores son muy próximos a los obtenidos sin despreciar la deformación debida al esfuerzo axil, lo que comprueba la menor influencia de esta deformación en el comportamiento de las estructuras reticuladas.

Aplicando el principio de superposición, los resultados totales se obtienen sumando los correspondientes a los estados I y II. En las Figuras 9.25a-9.25e se muestran la deformada y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 9.7.3

Resolver el pórtico de la Figura 9.26a, sometido a un incremento uniforme de temperatura Δt, descomponiendo en suma de un estado de *empotramiento perfecto* más un estado de *cargas en los nudos*. Todas las piezas tienen las mismas propiedades mecánicas y el coeficiente de dilatación del material es α.
Datos: $a = 5\,\text{m}$, $EI = 2 \cdot 10^5$ kN·m^2, $EA = 10^7$ kN, $\Delta t = 20$ ^{o}C y $\alpha = 10^{-6}$ $^o\text{C}^{-1}$.

De nuevo, se descompone el estado de carga en suma de dos estados (Figura 9.26):

1. El estado I es fácil de resolver, para obtener las reacciones $F = EA\alpha\Delta t = 200$ kN, que producen idéntico estado de compresión en todas las barras (Figura 9.26b).

2. El estado II, con cargas sólo en los nudos (Figura 9.26b), se resuelve, a continuación, mediante el método directo de rigidez.

La resolución es similar a la del ejemplo anterior. La numeración de los nudos y de las barras, así como los ejes de referencia locales y global puede verse en la Figura 9.27b. Las matrices de rigidez de las barras y la matriz de rigidez global de la estructura son las mismas que las del ejemplo anterior.

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, apoyos articulados en los nudos 1 y 4, y eliminando las ecuaciones que corresponden a los grados de libertad prescritos (1, 2 y 10, 11), se obtiene el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

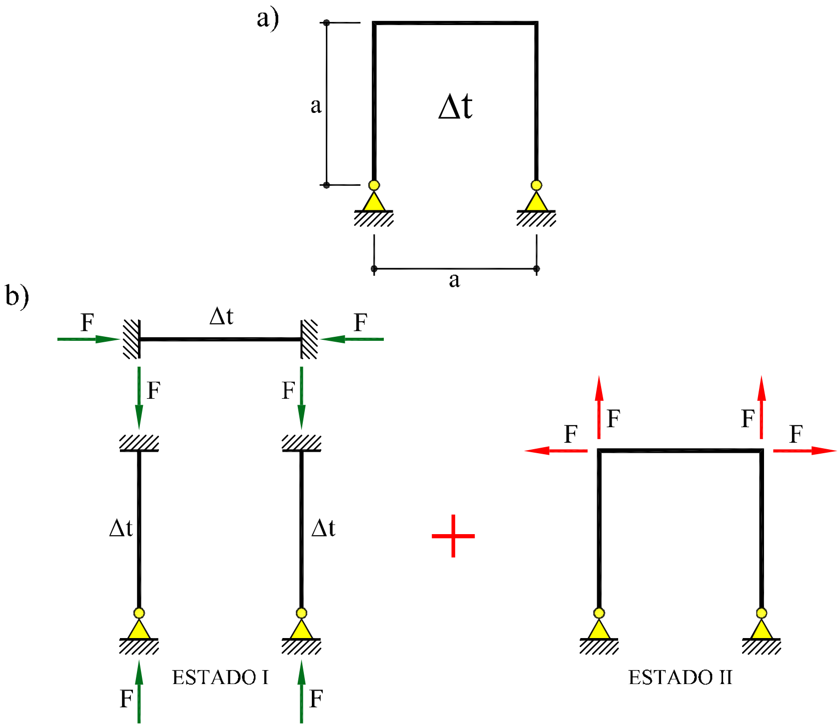


Fig. 9.26: (a) Estructura del Ejemplo 9.7.3 (b) descomposición del estado de carga

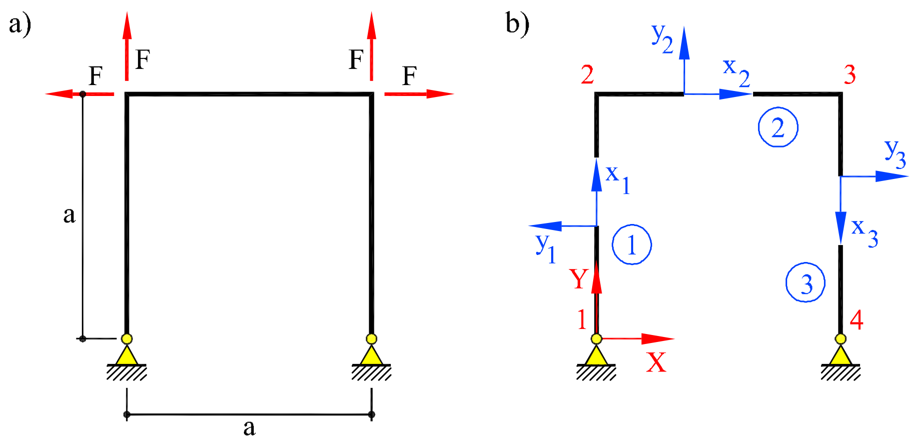


Fig. 9.27: (a) Estado II de cargas en los nudos (b) numeración y sistemas de referencia

$$10^4 \cdot \begin{bmatrix} 16 & 4,80 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4,80 & 201,92 & 0 & 4,80 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 201,92 & 4,80 & 0 & -1,92 & 4,80 & 0 \\ 8 & 4,80 & 4,80 & 32 & 0 & -4,80 & 8 & 0 \\ 0 & -200 & 0 & 0 & 201,92 & 0 & 4,80 & 4,80 \\ 0 & 0 & -1,92 & -4,80 & 0 & 201,92 & -4,80 & 0 \\ 0 & 0 & 4,80 & 8 & 4,80 & -4,80 & 32 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,80 & 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -200 \\ 200 \\ 0 \\ 200 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nótese la variación del sistema de ecuaciones, con respecto al ejemplo anterior. Resolviendo, se obtienen los valores de los movimientos incógnita que, ahora, son los giros de los nudos de la estructura y los desplazamientos de los nudos 2 y 3:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,12 \\ -0,5 \\ 1,0 \\ 0,06 \\ 0,5 \\ 1,0 \\ -0,06 \\ -0,12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Recuperando el sistema de ecuaciones completo, se calculan las reacciones incógnitas en los nudos con movimientos prescritos (nudos 1 y 4):

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,096 \\ -200 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} H_4 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X4} \\ F_{Y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,096 \\ -200 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN. Los esfuerzos en los extremos de las barras son:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_1 \\ F'^{(1)}_{x2} \\ F'^{(1)}_{y2} \\ M'^{(1)}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -0,096 \\ 0 \\ 200 \\ 0,096 \\ -0,48 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} F'^{(2)}_{x2} \\ F'^{(2)}_{y2} \\ M'^{(2)}_2 \\ F'^{(2)}_{x3} \\ F'^{(2)}_{y3} \\ M'^{(2)}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 0 \\ 0,48 \\ 200 \\ 0 \\ -0,48 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}'^{(3)} = \begin{bmatrix} F'^{(3)}_{x3} \\ F'^{(3)}_{y3} \\ M'^{(3)}_{3} \\ F'^{(3)}_{x4} \\ F'^{(3)}_{y4} \\ M'^{(3)}_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 0,096 \\ 0,48 \\ 200 \\ -0,096 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. Las reacciones, la deformada y las leyes de esfuerzos del estado II pueden verse en las Figuras 9.28a-9.28e. En este caso de carga, la estructura trabaja fundamentalmente a esfuerzo axil; por ello, los valores de los movimientos de los nudos y los flectores y cortantes en las barras son muy pequeños. Sin embargo, los axiles *finales* que corresponden a un incremento uniforme de temperatura son nulos, ya que se obtienen sumando los aquí obtenidos *más* los del estado intraslacional (Figura 9.26b), iguales y opuestos a éstos. Los resultados totales coinciden con los obtenidos para el estado II (Figura 9.28), exceptuando las reacciones verticales ($V_1 = V_4 = 0$) y los esfuerzos axiles que son nulos.

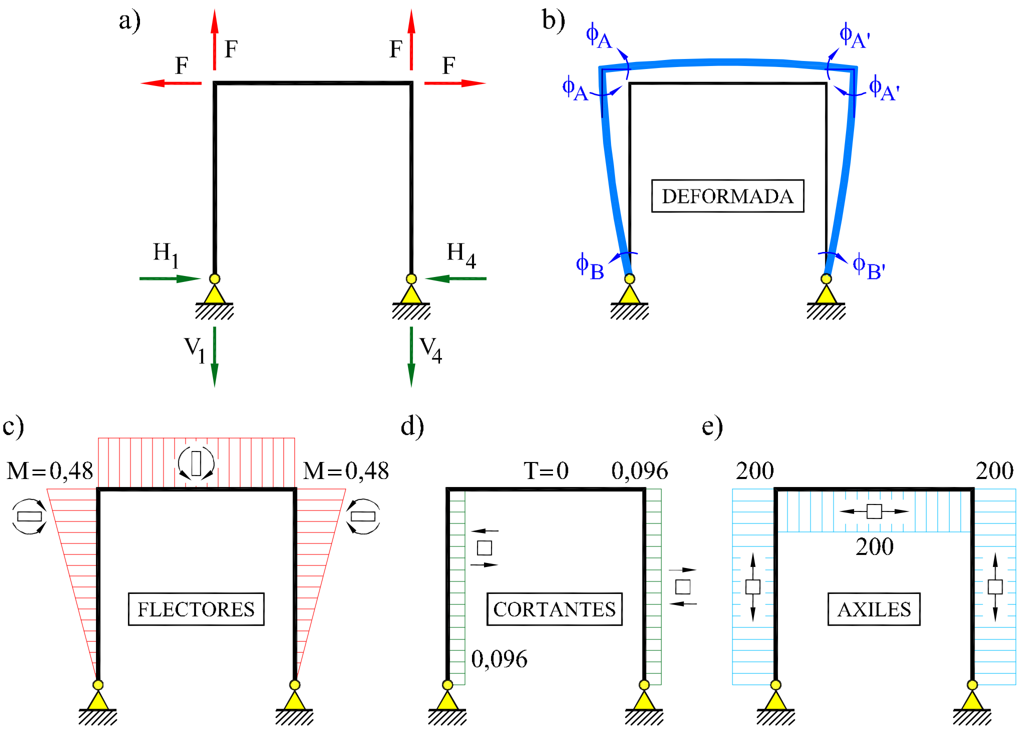


Fig. 9.28: Resultados del estado II del Ejemplo 9.7.3

9.8 Emparrillados Planos

Un emparrillado plano es una estructura plana de nudos rígidos que soporta cargas exteriores normales a su plano (Figura 9.29). Suelen calcularse como emparrillados planos los forjados de edificación y algunas tipologías de tableros de puentes. En la práctica suelen ser estructuras de alto grado de hiperestatismo, muy difíciles de calcular por procedimientos manuales.

El emparrillado está formado por vigas rectas de sección constante tales que el plano vertical sea principal de inercia de las piezas, rígidamente unidas en sus extremos. Se considera la rigidez torsional, pero despreciando el efecto de alabeo y suponiendo que el centro de gravedad de las secciones coincide con el centro de esfuerzos cortantes de las mismas. Asimismo, se consideran cargas verticales al plano del emparrillado y momentos de eje horizontal. No se considerarán, por tanto, cargas horizontales, ni momentos de eje vertical.

Debido a la geometría plana y al tipo de acciones consideradas, son idénticamente nulos los desplazamientos de los nudos en el plano horizontal y los giros de eje vertical. Sólo existen desplazamientos verticales y giros de eje horizontal, y el número de grados de libertad por nudo es tres.

Por tanto, los vectores de movimientos y esfuerzos en extremo de pieza, en el sistema de referencia local de la pieza, son (ver Figura 9.30):

$$\mathbf{d}'_a = \begin{bmatrix} \phi'_{xa} \\ v'_a \\ \phi'_{za} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}'_b = \begin{bmatrix} \phi'_{xb} \\ v'_b \\ \phi'_{zb} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}'_a = \begin{bmatrix} M'_{xa} \\ F'_{ya} \\ M'_{za} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}'_b = \begin{bmatrix} M'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_{zb} \end{bmatrix} \tag{9.44}$$

Las ecuaciones elásticas de *flexión* y *cortante* son análogas a las correspondientes a las estructuras reticuladas de plano medio. En este caso, no hay esfuerzo axil pero sí

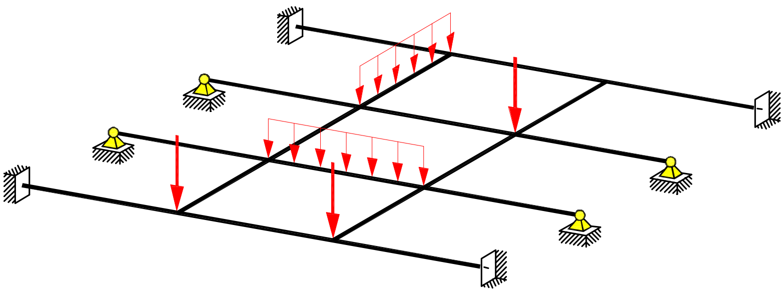


Fig. 9.29: Emparrillado plano

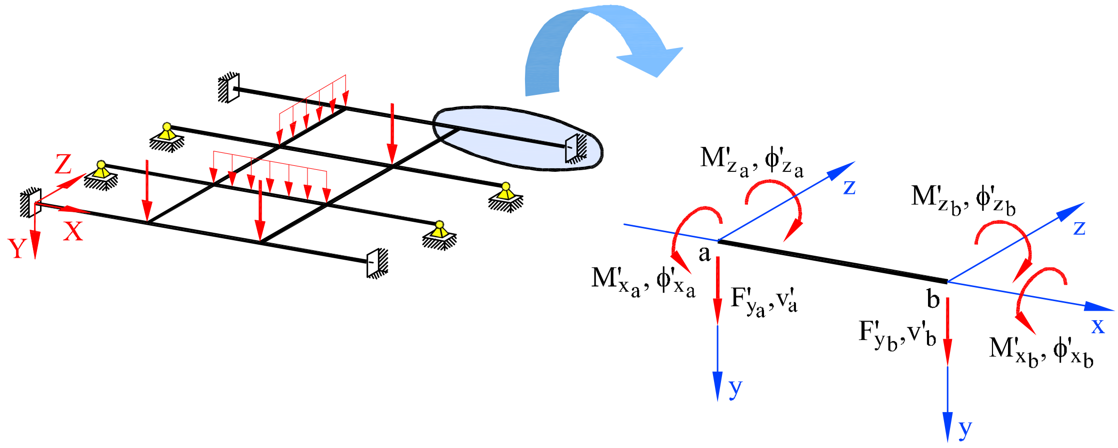


Fig. 9.30: Emparrillado plano: fuerzas y movimientos

hay momento torsor. Las ecuaciones elásticas del momento torsor son:

$$M'_{xa} = +\frac{GI_t}{l}\left(\phi'_{xa} - \phi'_{xb}\right) \tag{9.45a}$$

$$M'_{xb} = -\frac{GI_t}{l}\left(\phi'_{xa} - \phi'_{xb}\right) \tag{9.45b}$$

donde GI_t es la inercia a torsión de la pieza. Se observa que estos términos son formalmente análogos a los correspondientes a axil en las estructuras reticuladas de plano medio, ecuaciones (9.5a) y (9.5b). Tomando los ejes locales de la pieza de forma que los ejes (y, z) sean los principales de inercia de la pieza, las ecuaciones elásticas de los emparrillados planos pueden escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix} \tag{9.46}$$

con las matrices:

$$\mathbf{k}'_{aa} = \begin{bmatrix} +\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}'_{ab} = \begin{bmatrix} -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}'_{ba} = \begin{bmatrix} -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}'_{bb} = \begin{bmatrix} +\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{9.47}$$

Con la expresión general:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' \tag{9.48}$$

Llamando al giro unitario de torsión de la barra, $\theta = \left(\phi'_{xb} - \phi'_{xa}\right)/l$ y $\overline{\phi}_{ab} = \left(v'_b - v'_a\right)/l$ al giro de la barra en el plano vertical y operando, se tiene que la energía de deformación de la barra es:

$$\begin{aligned} U^{(e)} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{d}'\right)^T \mathbf{K}'\mathbf{d}' \\ &= \frac{1}{2}\,k_t\,\theta^2 + \frac{1}{2}\,2K\left[\left(\phi'_a\right)^2 + \phi'_a\;\phi'_b + \left(\phi'_b\right)^2 - 3\left(\phi'_a + \;\phi'_b\right)\overline{\phi}_{ab} - 3\left(\overline{\phi}_{ab}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{9.49}$$

donde $k_t = GI_t/l$ y $K = EI/l$ son las rigideces a torsión y a flexión, respectivamente. Esta expresión es análoga a la correspondiente para piezas de plano medio, con la energía de deformación por torsión en lugar de la energía de deformación por axil. En emparrillados planos las energías de deformación por torsión y flexión suelen ser del mismo orden de magnitud.

La relación entre los ejes locales y globales puede verse en la Figura 9.31. Los ejes globales X, Z y los locales x, z son horizontales mientras que los ejes Y, y, son verticales y coincidentes. El ángulo entre los ejes $(x,\,z)$ locales y los ejes $(X,\,Z)$ globales es α. Por tanto, definiendo la matriz de transformación $\mathbf{T}$ entre ellos como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{9.50}$$

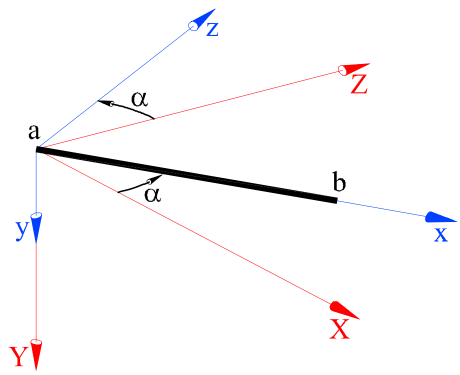


Fig. 9.31: Transformación de sistema de referencia

se pueden transformar las matrices elementales a coordenadas globales, mediante la transformación:

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{T}\mathbf{k}'_{ij}\mathbf{T}^T \tag{9.51}$$

El proceso de ensamblaje, imposición de las condiciones de apoyo, resolución, y cálculo de los esfuerzos en las piezas y de las reacciones es análogo al caso de las estructuras de plano medio.

Ejemplo 9.8.1

Resolver la estructura de la Figura 9.32a, para la carga que se indica. La rigidez a flexión EI y la rigidez a torsión GI_t de las barras es constante.
Datos: $l = 3\,\text{m}$, $EI = 9 \cdot 10^4$ kN·m^2 y $GI_t = 6 \cdot 10^3$kN·m^2, $F_Y = 150\,\text{kN}$.

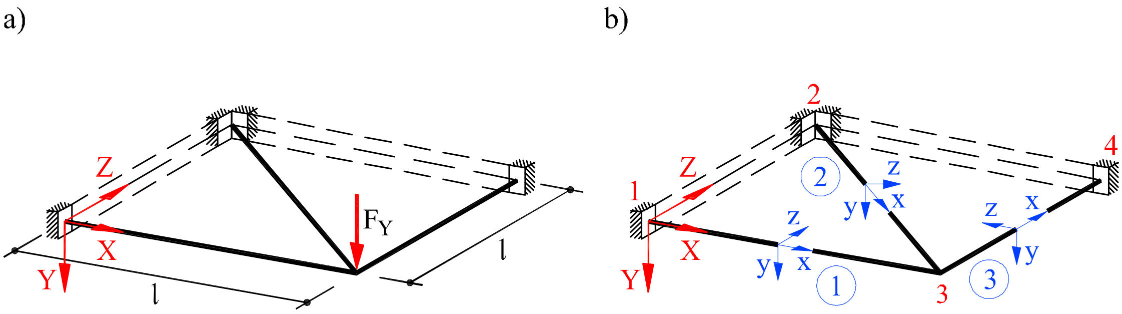


Fig. 9.32: (a) Estructura del Ejemplo 9.8.1 (b) numeración y sistemas de referencia

La estructura está formada por tres barras de directrices contenidas en el plano XZ, sometida a una carga F_Y normal a dicho plano; por tanto, se trata de un emparrillado plano. Para su resolución se adoptan los sistemas de referencia global y locales, y la numeración de nudos y barras que se indica en la Figura 9.32b.

Teniendo en cuenta las Ecs.(9.46) y (9.47), se calculan las matrices elementales de las barras. Al tener la misma longitud y propiedades mecánicas idénticas, las matrices elementales correspondientes a las barras 1 y 3 son iguales:

$$\mathbf{K}'^{(1)} = \mathbf{K}'^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{X} & 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ -\mathsf{X} & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{B} & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{E} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{array}{llll} \mathsf{X} = GI_t/l & = 2 \cdot 10^3 \ \ \text{kN·m} & \mathsf{D} = 4EI/l = 120 \cdot 10^3 \ \text{kN·m} \\ \mathsf{B} = 12EI/l^3 & = 40 \cdot 10^3 \ \ \text{kN/m} & \mathsf{E} = 2EI/l = 60 \cdot 10^3 \ \ \text{kN·m} \\ \mathsf{C} = 6EI/l^2 & = 60 \cdot 10^3 \ \ \text{kN} & \end{array}$$

La barra 2 tiene una longitud $l^{(2)} = 3\sqrt{2}\,\text{m}$, y su matriz elemental es:

$$\mathbf{K}'^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \mathsf{X} & 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B}/2 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 & -\mathsf{B}/2 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 \\ 0 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 & \mathsf{D} & 0 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 & \mathsf{E} \\ -\mathsf{X} & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B}/2 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 & \mathsf{B}/2 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 \\ 0 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 & \mathsf{E} & 0 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (9.50) y (9.51) y el ángulo que forma cada barra con el sistema global de coordenadas ($\alpha^{(1)} = 0^\circ$, $\alpha^{(2)} = 315^\circ$ y $\alpha^{(3)} = 90^\circ$), las matrices de rigidez de cada barra en el sistema global de referencia son:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathsf{X} & 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ -\mathsf{X} & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{B} & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{E} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \mathsf{F} & \mathsf{C}/2 & \mathsf{G} & \mathsf{H} & -\mathsf{C}/2 & \mathsf{I} \\ \mathsf{C}/2 & \mathsf{B}/2 & \mathsf{C}/2 & \mathsf{C}/2 & -\mathsf{B}/2 & \mathsf{C}/2 \\ \mathsf{G} & \mathsf{C}/2 & \mathsf{F} & \mathsf{I} & -\mathsf{C}/2 & \mathsf{H} \\ \mathsf{H} & \mathsf{C}/2 & \mathsf{I} & \mathsf{F} & -\mathsf{C}/2 & \mathsf{G} \\ -\mathsf{C}/2 & -\mathsf{B}/2 & -\mathsf{C}/2 & -\mathsf{C}/2 & \mathsf{B}/2 & -\mathsf{C}/2 \\ \mathsf{I} & \mathsf{C}/2 & \mathsf{H} & \mathsf{G} & -\mathsf{C}/2 & \mathsf{F} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathsf{D} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & \mathsf{C} & 0 \\ -\mathsf{C} & \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 & -\mathsf{X} \\ \mathsf{E} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 \\ \mathsf{C} & -\mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{B} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 & 0 & \mathsf{X} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{array}{llll} \mathsf{F} = \ \ (\mathsf{X}+\mathsf{D})/2 & = 61 \cdot 10^3 \ \ \text{kN·m} & \mathsf{H} = -(\mathsf{X}-\mathsf{E})/2 & = 29 \cdot 10^3 \ \ \text{kN·m} \\ \mathsf{G} = -(\mathsf{X}-\mathsf{D})/2 & = 59 \cdot 10^3 \ \ \text{kN·m} & \mathsf{I} = \ \ (\mathsf{X}+\mathsf{E})/2 & = 31 \cdot 10^3 \ \ \text{kN·m} \end{array}$$

Teniendo en cuenta las matrices elementales obtenidas, y las condiciones de compatibilidad y equilibrio de fuerzas en los nudos (ver Sección 9.4.1) se obtiene el sistema

global de ecuaciones siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{aa}^{(2)} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{ba}^{(2)} & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{ab}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(3)} & \mathbf{k}_{bb}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{k}_{33} = \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{bb}^{(2)} + \mathbf{k}_{aa}^{(3)}$. El sistema anterior de forma compacta es $\mathbf{f} = \mathbf{K}\,\mathbf{d}$, donde $\mathbf{K}$ es la *matriz global de rigidez la estructura* y su valor numérico es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
\mathsf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{-X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{-B} & \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{-C} & \mathsf{E} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathsf{F}/\sqrt{2} & \mathsf{C}/2\sqrt{2} & \mathsf{G}/\sqrt{2} & \mathsf{H}/\sqrt{2} & \mathsf{-C}/2\sqrt{2} & \mathsf{I}/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathsf{C}/2\sqrt{2} & \mathsf{B}/2\sqrt{2} & \mathsf{C}/2\sqrt{2} & \mathsf{C}/2\sqrt{2} & \mathsf{-B}/2\sqrt{2} & \mathsf{C}/2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathsf{G}/\sqrt{2} & \mathsf{C}/2\sqrt{2} & \mathsf{F}/\sqrt{2} & \mathsf{I}/\sqrt{2} & \mathsf{-C}/2\sqrt{2} & \mathsf{H}/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
\mathsf{-X} & 0 & 0 & \mathsf{H}/\sqrt{2} & \mathsf{C}/2\sqrt{2} & \mathsf{I}/\sqrt{2} & \mathsf{J} & \mathsf{-M} & \mathsf{G}/\sqrt{2} & \mathsf{C} & \mathsf{C} & 0 \\
0 & \mathsf{-B} & \mathsf{-C} & \mathsf{-C}/2\sqrt{2} & \mathsf{-B}/2\sqrt{2} & \mathsf{-C}/2\sqrt{2} & \mathsf{-M} & \mathsf{N} & \mathsf{-M} & \mathsf{-C} & \mathsf{-B} & 0 \\
0 & \mathsf{C} & \mathsf{E} & \mathsf{I}/\sqrt{2} & \mathsf{C}/2\sqrt{2} & \mathsf{H}/\sqrt{2} & \mathsf{G}/\sqrt{2} & \mathsf{-M} & \mathsf{J} & 0 & 0 & \mathsf{-E} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{-C} & \mathsf{-C} & \mathsf{D} & \mathsf{C} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{-B} & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{B} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{-E} & 0 & 0 & \mathsf{X}
\end{bmatrix}$$

donde

$\mathsf{J} = \frac{4+\sqrt{2}}{4}(\mathsf{X}+\mathsf{D}) = 165,13 \cdot 10^3$ kN·m $\qquad \mathsf{M} = \frac{4+\sqrt{2}}{4}\mathsf{C} = 81,21$ kN

$\mathsf{N} = \frac{8+\sqrt{2}}{4}\mathsf{B} = 94,14 \cdot 10^3$ kN/m

Las letras restantes tienen significado idéntico al utilizado en las matrices anteriores.

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, empotramiento en los nudos 1, 2 y 4, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad de dichos nudos (1, 2, 3; 4, 5, 6 y 10, 11, 12), obteniéndose el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 165,13 & -81,21 & 41,71 \\ -81,21 & 94,14 & -81,21 \\ 41,71 & -81,21 & 165,13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{X3} \\ v_3 \\ \phi_{Z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema anterior se resuelve para dar los movimientos incógnita:

$$\widehat{\mathbf{d}}_3 = \begin{bmatrix} \phi_{X3} \\ v_3 \\ \phi_{Z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,94 \\ 4,94 \\ 1,94 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Recuperando el sistema de ecuaciones completo y siguiendo el procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores, Ec. (9.41), se calculan las reacciones incógnitas en los nudos con movimientos prescritos (nudos 1, 2 y 4):

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} M_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,88 \\ -81,2 \\ -180,0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} M_{X2} \\ F_{Y2} \\ M_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22,5 \\ 12,4 \\ -22,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} M_{X4} \\ F_{Y4} \\ M_{Z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -180,0 \\ -81,2 \\ -3,88 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Aplicando las Ecs. (9.43a) y (9.43b), se obtienen los esfuerzos en los extremos de

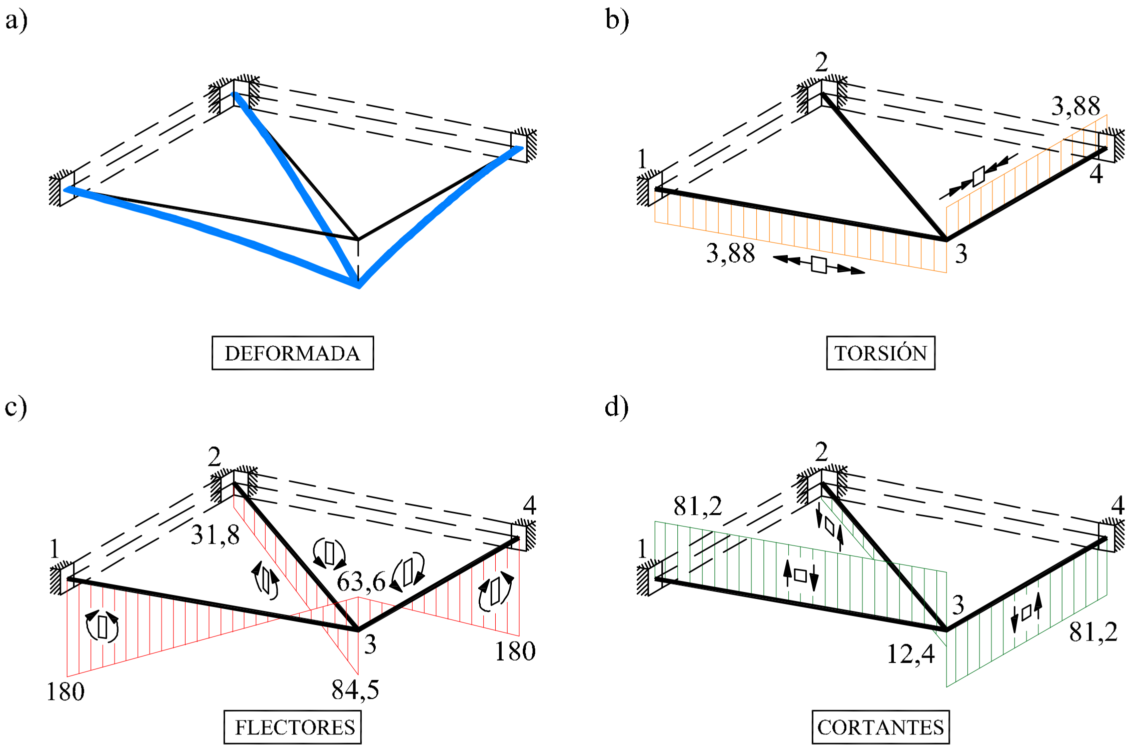


Fig. 9.33: Resultados del Ejemplo 9.8.1

las barras, que resultan:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} M'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_{z1} \\ M'^{(1)}_{x3} \\ F'^{(1)}_{y3} \\ M'^{(1)}_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,88 \\ -81,2 \\ -180,0 \\ 3,88 \\ 81,2 \\ -63,6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} M'^{(2)}_{x2} \\ F'^{(2)}_{y2} \\ M'^{(2)}_{z2} \\ M'^{(2)}_{x3} \\ F'^{(2)}_{y3} \\ M'^{(2)}_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12,4 \\ -31,8 \\ 0 \\ -12,4 \\ 84,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}'^{(3)} = \begin{bmatrix} M'^{(3)}_{x3} \\ F'^{(3)}_{y3} \\ M'^{(3)}_{z3} \\ M'^{(3)}_{x4} \\ F'^{(3)}_{y4} \\ M'^{(3)}_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,88 \\ 81,2 \\ 63,6 \\ -3,88 \\ -81,2 \\ 180,0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

La deformada y las leyes de esfuerzos de la estructura se muestran en las Figuras 9.33a-9.33d.

Ejemplo 9.8.2

Resolver la estructura de la Figura 9.34, para las cargas que se indican. La rigidez a flexión EI y la rigidez a torsión GI_t de las barras es constante.
Datos: $a = 3\,\text{m}$, $b = 6\,\text{m}$, $EI = 40 \cdot 10^4$ kN·m^2, $GI_t = 3 \cdot 10^3$ kN·m^2, $P = 60\,\text{kN}$ y $M = 60$ kN·m.

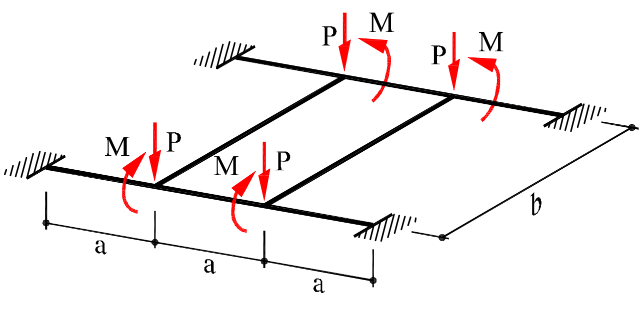


Fig. 9.34: Emparrillado plano del Ejemplo 9.8.2

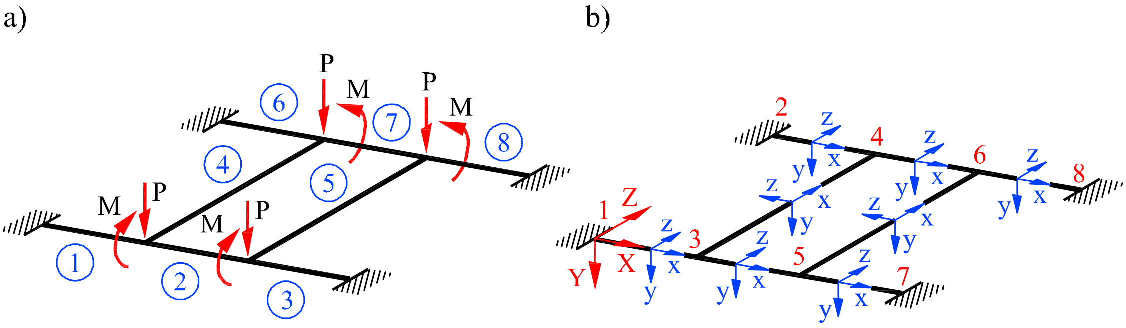


Fig. 9.35: (a) Numeración de barras (b) numeración de nudos y sistemas de referencia

La estructura es un emparrillado plano doblemente simétrico en cuanto a geometría y estado de cargas. En las Figuras 9.35a y 9.35b se muestran la numeración de nudos y de barras, y los sistemas de referencia global y locales adoptados.

Se comienza calculando las matrices elementales de las barras. Las barras paralelas al eje X (1, 2, 3, 6, 7, 8) tienen la misma longitud $l = 3$ m, y forman un ángulo $\alpha = 0°$ con dicho eje global. Por tanto, la expresión de la matriz en el sistema local y global, para estas barras es idéntica.

Barras 1, 2, 3, 6, 7 y 8:

$$\mathbf{K}'^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathsf{X} & 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} \\ -\mathsf{X} & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{B} & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{C} & \mathsf{E} & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, 3, 6, 7, 8$$

con

$\mathsf{X} = GI_t/l = 10^3$ kN·m

$\mathsf{B} = 12EI/l^3 = 177,78 \cdot 10^3$ kN/m

$\mathsf{C} = 6EI/l^2 = 266,67 \cdot 10^3$ kN

$\mathsf{D} = 4EI/l = 533,33 \cdot 10^3$ kN·m

$\mathsf{E} = 2EI/l = 266,67 \cdot 10^3$ kN·m

Las barras paralelas al eje Z (4 y 5) tienen la misma longitud $l = 6$ m, y forman un ángulo ángulo $\alpha = 90°$ con el eje global X. La matriz de rigidez de dichas barras en el sistema local es:

$$\mathbf{K}'^{(4)} = \mathbf{K}'^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathsf{X}/2 & 0 & 0 & -\mathsf{X}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B}/8 & \mathsf{C}/4 & 0 & -\mathsf{B}/8 & \mathsf{C}/4 \\ 0 & \mathsf{C}/4 & \mathsf{D}/2 & 0 & -\mathsf{C}/4 & \mathsf{E}/2 \\ -\mathsf{X}/2 & 0 & 0 & \mathsf{X}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B}/8 & -\mathsf{C}/4 & 0 & \mathsf{B}/8 & -\mathsf{C}/4 \\ 0 & \mathsf{C}/4 & \mathsf{E}/2 & 0 & -\mathsf{C}/4 & \mathsf{D}/2 \end{bmatrix}$$

y su expresión referida al sistema global es:

$$\mathbf{K}^{(4)} = \mathbf{K}^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathsf{D}/2 & -\mathsf{C}/4 & 0 & \mathsf{E}/2 & \mathsf{C}/4 & 0 \\ -\mathsf{C}/4 & \mathsf{B}/8 & 0 & -\mathsf{C}/4 & -\mathsf{B}/8 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{X}/2 & 0 & 0 & -\mathsf{X}/2 \\ \mathsf{E}/2 & 0 & 0 & \mathsf{D}/2 & \mathsf{C}/4 & 0 \\ \mathsf{C}/4 & -\mathsf{B}/8 & 0 & \mathsf{C}/4 & \mathsf{B}/8 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{X}/2 & 0 & 0 & \mathsf{X}/2 \end{bmatrix}$$

Estableciendo las condiciones de compatibilidad y equilibrio de fuerzas en los nudos (ver Sección 9.4.1) se obtiene el sistema de ecuaciones global de la estructura:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \\ \mathbf{f}_6 \\ \mathbf{f}_7 \\ \mathbf{f}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab}^{(6)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{ab}^{(4)} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(6)} & \mathbf{k}_{ba}^{(4)} & \mathbf{k}_{44} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab}^{(7)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{55} & \mathbf{k}_{ab}^{(5)} & \mathbf{k}_{ab}^{(3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(7)} & \mathbf{k}_{ba}^{(5)} & \mathbf{k}_{66} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab}^{(8)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{77} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(8)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{d}_5 \\ \mathbf{d}_6 \\ \mathbf{d}_7 \\ \mathbf{d}_8 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{array}{llll} \mathbf{k}_{11} = \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{k}_{33} = \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(2)} + \mathbf{k}_{aa}^{(4)} & \mathbf{k}_{55} = \mathbf{k}_{bb}^{(2)} + \mathbf{k}_{aa}^{(3)} + \mathbf{k}_{aa}^{(5)} & \mathbf{k}_{77} = \mathbf{k}_{bb}^{(3)} \\ \mathbf{k}_{22} = \mathbf{k}_{aa}^{(6)} & \mathbf{k}_{44} = \mathbf{k}_{bb}^{(4)} + \mathbf{k}_{aa}^{(6)} + \mathbf{k}_{aa}^{(7)} & \mathbf{k}_{66} = \mathbf{k}_{bb}^{(5)} + \mathbf{k}_{bb}^{(7)} + \mathbf{k}_{aa}^{(8)} & \mathbf{k}_{88} = \mathbf{k}_{bb}^{(8)} \end{array}$$

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, se eliminan las filas y columnas correspondientes a los movimientos prescritos. En este caso se eliminan las filas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 20, 21, 22, 23 y 24 que corresponden a los grados de libertad prescritos y se obtiene el sistema reducido de ecuaciones.

Por otra parte, si se tiene en cuenta la doble simetría de la estructura y de la carga, se deduce que los movimientos de los nudos deben ser simétricos y basta conocer los movimientos de uno de ellos para resolver la estructura.

Si en el sistema de ecuaciones reducido se elige el nudo 3, por ejemplo, se obtiene la expresión siguiente:

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{k}_{33}\mathbf{d}_3 + \mathbf{k}_{ab}^{(4)}\mathbf{d}_4 + \mathbf{k}_{ab}^{(2)}\mathbf{d}_5$$

Sustituyendo los valores correspondientes se obtiene

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 266,7 & -66,7 & 0 & 133,3 & 66,7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -66,7 & 377,8 & 0 & -66,7 & -22-2 & 0 & 0 & -177,8 & 266,7 \\ 0 & 0 & 1067 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & -266,7 & 266,7 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \phi_{X3} & v_3 & \phi_{Z3} & \phi_{X4} & v_4 & \phi_{Z4} & \phi_{X5} & v_5 & \phi_{Z5} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -60 \\ 60 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además, por doble simetría:

$$\begin{aligned} v_3 &= v_4 &&= v_5 &&= v_6 \\ \phi_{X3} &= -\phi_{X4} &&= \phi_{X5} &&= -\phi_{X6} \\ \phi_{Z3} &= \phi_{Z4} &&= -\phi_{Z5} &&= -\phi_{Z6} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones que permite obtener los movimientos del nudo 3 es:

$$\begin{aligned} 10^3 \cdot [132,4\ \phi_{X3}] &= -60 \\ 10^3 \cdot [177,8 v_3 - 266,7 \phi_{Z3}] &= 60 \\ 10^3 \cdot [-266,7 v_3 + 799,8 \phi_{Z3}] &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene:

$$\widehat{\mathbf{d}}_3 = \begin{bmatrix} \phi_{X3} \\ v_3 \\ \phi_{Z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,53 \\ 6,75 \\ 2,25 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes. Los movimientos de los nudos 4, 5 y 6 son simétricos.

Las reacciones incógnitas en los nudos prescritos (1, 2, 7 y 8) se calculan recuperando el sistema de ecuaciones completo y siguiendo el procedimiento aplicado en los Ejemplos anteriores, Ec. (9.41). Teniendo en cuenta la simetría de la geometría y de las cargas, basta con calcular las reacciones en uno de los nudos prescritos. Así, por ejemplo, en el nudo 1 se obtiene:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} M_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,453 \\ -60,0 \\ -120,0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. En los nudos 2, 7 y 8 las reacciones son simétricas.

Aplicando las Ecs. (9.43a) y (9.43b), se obtienen los esfuerzos en los extremos de las barras, que resultan:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} M'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_{z1} \\ M'^{(1)}_{x3} \\ F'^{(1)}_{y3} \\ M'^{(1)}_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,45 \\ -60,0 \\ -120,0 \\ -0,45 \\ 60,0 \\ -60,0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(2)} = \begin{bmatrix} M'^{(2)}_{x3} \\ F'^{(2)}_{y3} \\ M'^{(2)}_{z3} \\ M'^{(2)}_{x5} \\ F'^{(2)}_{y5} \\ M'^{(2)}_{z5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \\ -60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}'^{(4)} = \begin{bmatrix} M'^{(3)}_{x3} \\ F'^{(3)}_{y3} \\ M'^{(3)}_{z3} \\ M'^{(3)}_{x4} \\ F'^{(3)}_{y4} \\ M'^{(3)}_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60,45 \\ 0 \\ 0 \\ -60,45 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. Los esfuerzos en las barras restantes se deducen por simetría.

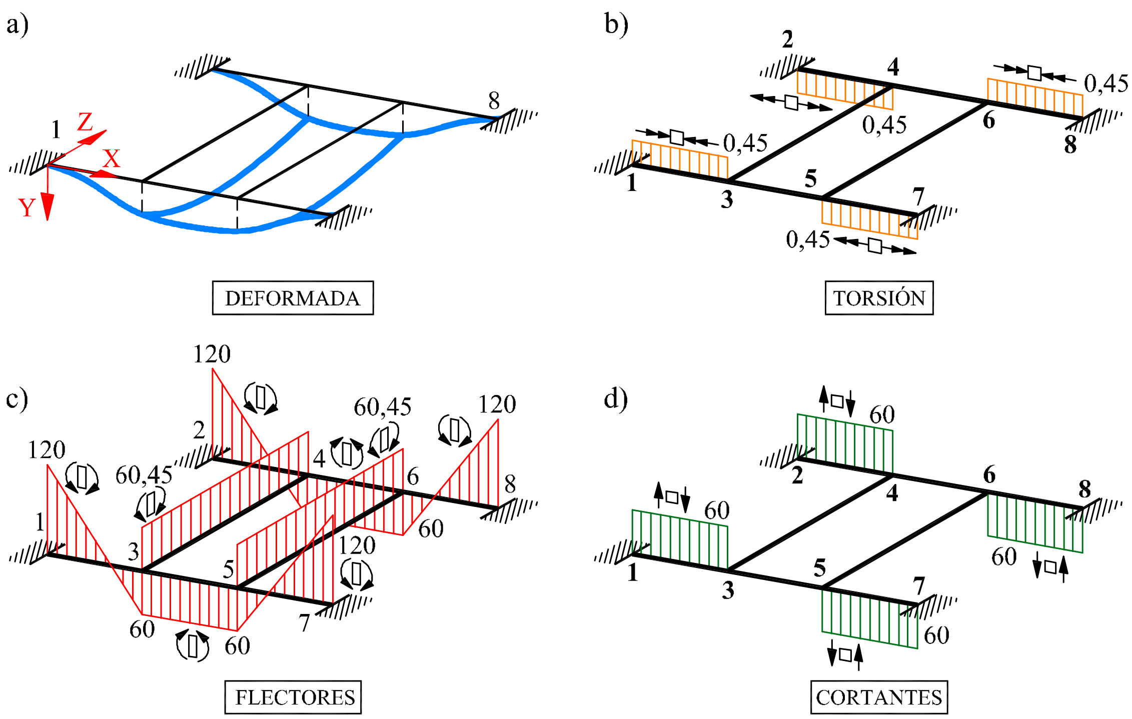


Fig. 9.36: Resultados del Ejemplo 9.8.2

La deformada y las leyes de esfuerzos de la estructura se muestran en las Figuras 9.36a-9.36d.

9.9 Estructuras Reticuladas Espaciales

Las estructuras reticuladas espaciales son estructuras con nudos rígidos formadas por piezas rectas cuyas directrices están en distintos planos (Figura 9.37a). También se consideran en esta tipología las estructuras reticuladas planas que no son ni de plano medio ni emparrillados planos (ver Ejemplo 9.9.1).

Las ecuaciones elásticas correspondientes a una pieza aislada, perteneciente a una estructura reticulada espacial, tienen la forma general:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix} \tag{9.52}$$

en las que los vectores de movimientos y esfuerzos de extremo de pieza son de seis componentes cada uno (ver Figura 9.37b):

$$\mathbf{d}'_a = \begin{bmatrix} u'_a \\ v'_a \\ w'_a \\ \phi'_{xa} \\ \phi'_{ya} \\ \phi'_{za} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}'_b = \begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ w'_b \\ \phi'_{xb} \\ \phi'_{yb} \\ \phi'_{zb} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}'_a = \begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ F'_{za} \\ M'_{xa} \\ M'_{ya} \\ M'_{za} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}'_b = \begin{bmatrix} F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ F'_{zb} \\ M'_{xb} \\ M'_{yb} \\ M'_{zb} \end{bmatrix} \tag{9.53}$$

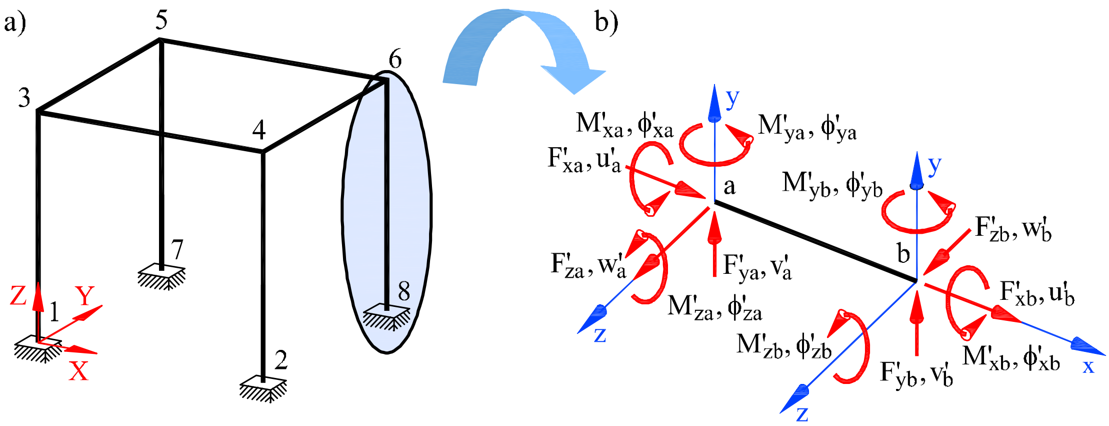


Fig. 9.37: Estructura reticulada espacial: fuerzas y movimientos

Se limita el estudio al caso de estructuras formadas por vigas rectas de sección constante en las que se supone que el centro de gravedad coincide con el centro de esfuerzos cortantes. Se desprecian los efectos de alabeo por torsión, y se toman los ejes locales de forma que los ejes y, z sean los principales de inercia de la pieza, las matrices de rigidez elementales vienen dadas por:

$$\mathbf{k}'_{aa} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & +\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & +\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & +\frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & +\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & +\frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \tag{9.54}$$

$$\mathbf{k}'_{ab} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & +\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & +\frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & +\frac{2EI_z}{l} \end{bmatrix} \tag{9.55}$$

$$\mathbf{k}'_{bb} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & +\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & +\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & +\frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & +\frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \tag{9.56}$$

donde EA es la rigidez a axil, EI_y y EI_z son las rigideces a flexión en los respectivos planos principales de inercia y GI_t es la inercia a torsión. Naturalmente, $\mathbf{k}'_{ab} = \mathbf{k}'^{T}_{ba}$.

Siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 9.3.2, estas ecuaciones se transforman al sistema global y resultan:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{ba} & \mathbf{k}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{bmatrix} \tag{9.57}$$

con:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_a \quad ; \quad \mathbf{f}_b = \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_b \quad ; \quad \mathbf{d}_a = \mathbf{T}\,\mathbf{d}'_a \quad ; \quad \mathbf{d}_b = \mathbf{T}\,\mathbf{d}'_b$$

En las expresiones anteriores la matriz $\mathbf{T}$ tiene por componentes los cosenos direc-

tores de los ejes locales (x, y, z) respecto de los ejes globales (X, Y, Z):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\ (Xx) & \cos\ (Xy) & \cos\ (Xz) & & & \\ \cos\ (Yx) & \cos\ (Yy) & \cos\ (Yz) & & \mathbf{0} & \\ \cos\ (Zx) & \cos\ (Zy) & \cos\ (Zz) & & & \\ & & & \cos\ (Xx) & \cos\ (Xy) & \cos\ (Xz) \\ & \mathbf{0} & & \cos\ (Yx) & \cos\ (Yy) & \cos\ (Yz) \\ & & & \cos\ (Zx) & \cos\ (Zy) & \cos\ (Zz) \end{bmatrix} \tag{9.58}$$

La transformación de matrices de rigidez elementales viene dada por la expresión general:

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{T}\,\mathbf{k}'_{ij}\mathbf{T}^T \tag{9.59}$$

Ejemplo 9.9.1

Resolver la estructura reticulada espacial de la Figura 9.38a, para la carga F que se indica. Las barras están formadas por el mismo material pero poseen propiedades mecánicas diferentes. La rigidez a flexión $EI_y = EI_z$, a axil EA y a torsión GI_t de las barras es constante.
Datos: $l = 3\,\text{m}$, $EI_y = EI_z = 9 \cdot 10^4$ kN·m^2, $EA = 9 \cdot 10^6$ kN , $GI_t = 6 \cdot 10^3$ kN·m^2, $|F_X| = |F_Y| = |F_Z| = 150\,\text{kN}$.

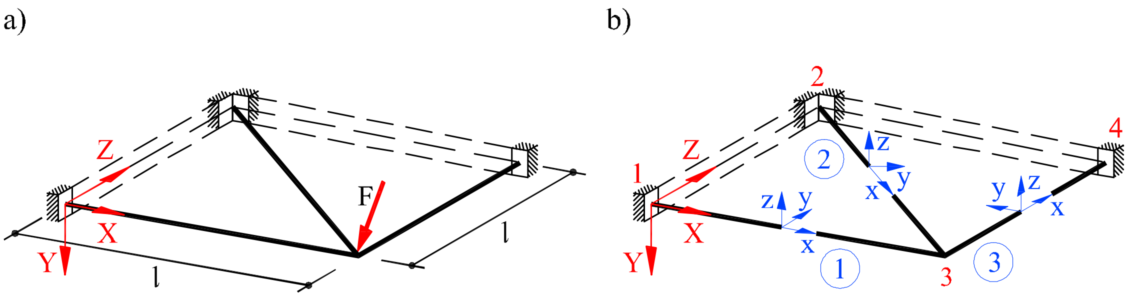


Fig. 9.38: (a) Estructura del Ejemplo 9.9.1 (b) numeración y sistemas de referencia

La estructura está formada por tres barras de directrices contenidas en el plano XY; sin embargo, para la carga aplicada F de componentes F_X, F_Y y F_Z, no puede resolverse como emparrillado plano sino como una estructura reticulada espacial.

Para su resolución se adoptan los sistemas de referencia global y locales y la numeración de nudos y barras que se indican en la Figura 9.38b.

Teniendo en cuenta las Ecs. (9.54)-(9.56), se calculan las matrices elementales de las barras. Al tener la misma longitud y propiedades mecánicas idénticas, las matrices elementales correspondientes a las barras 1 y 3 son iguales:

$$\mathbf{K}'^{(1)} = \mathbf{K}'^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{k}'_{aa} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & 0 \\ 0 & \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix} ; \mathbf{k}'_{ab} = \mathbf{k}'^{T}_{ba} = \begin{bmatrix} -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & 0 & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & 0 \\ 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{E} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}'_{bb} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & 0 \\ 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{array}{llll} \mathsf{A} = EA/l & = 3 \cdot 10^6 \ \text{kN/m} & \mathsf{D} = 4EI/l = 120 \cdot 10^3 \ \text{kN·m} \\ \mathsf{B} = 12EI/l^3 & = 40 \cdot 10^3 \ \text{kN/m} & \mathsf{E} = 2EI/l = 60 \cdot 10^3 \ \text{kN·m} \\ \mathsf{C} = 6EI/l^2 & = 60 \cdot 10^3 \ \text{kN} & \mathsf{X} = GI_t/l = 2 \cdot 10^3 \ \text{kN·m} \end{array}$$

La matriz elemental de la barra 2 de longitud $l^{(2)} = \sqrt{2}\, l$ es:

$$\mathbf{K}'^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'^{(2)}_{aa} & \mathbf{k}'^{(2)}_{ab} \\ \mathbf{k}'^{(2)}_{ba} & \mathbf{k}'^{(2)}_{bb} \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{k}'^{(2)}_{aa} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B}/2 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \mathsf{B}/2 & 0 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 & \mathsf{D} & 0 \\ 0 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}'^{(2)}_{ab} = (\mathbf{k}'^{(2)}_{ba})^T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B}/2 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\mathsf{B}/2 & 0 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 & \mathsf{E} & 0 \\ 0 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{E} \end{bmatrix}$$

$$
\mathbf{k}'^{(2)}_{bb} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B}/2 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \mathsf{B}/2 & 0 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 & \mathsf{D} & 0 \\ 0 & -\mathsf{C}\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}
$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (9.57) y (9.58) y el ángulo que forma cada barra con el sistema global de coordenadas, las matrices de rigidez de cada barra en el sistema global de referencia son:

Barra (1) $\alpha^{(1)} = 0^\circ$:

En este caso los ejes locales de las barras son paralelos a los ejes globales y la matriz de rigidez de la barra en el sistema global coincide con la matriz en ejes locales:

$$
\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}'^{(1)}
$$

Barra (2), $\alpha^{(2)} = 315^\circ$:

La matriz de transformación de sistemas es:

$$
\mathbf{T}^{(2)} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & & & \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ & \mathbf{0} & & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

y la matriz de rigidez en el sistema global es $\mathbf{K}^{(2)}$ con:

$$
\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(2)}_{aa} & \mathbf{k}^{(2)}_{ab} \\ \mathbf{k}^{(2)}_{ba} & \mathbf{k}^{(2)}_{bb} \end{bmatrix}
$$

con:

$$
\mathbf{k}^{(2)}_{aa} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} \mathsf{P} & -\mathsf{Q} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ -\mathsf{Q} & \mathsf{P} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & -\mathsf{C} & -\mathsf{C} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{R} & -\mathsf{S} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{C} & -\mathsf{S} & \mathsf{R} & 0 \\ \mathsf{C} & \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{D} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{k}^{(2)}_{ab} = (\mathbf{k}^{(2))}_{ba})^T = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} -\mathsf{P} & \mathsf{Q} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ \mathsf{Q} & -\mathsf{P} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & 0 & -\mathsf{B} & -\mathsf{C} & -\mathsf{C} & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & -\mathsf{U} & \mathsf{T} & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{T} & -\mathsf{U} & 0 \\ -\mathsf{C} & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{E} \end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{k}_{bb}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} \mathsf{P} & -\mathsf{Q} & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C} \\ -\mathsf{Q} & \mathsf{P} & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{C} & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{R} & -\mathsf{S} & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & -\mathsf{S} & \mathsf{R} & 0 \\ -\mathsf{C} & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 2\mathsf{D} \end{bmatrix}$$

donde

$\mathsf{P} = (\mathsf{A} + \mathsf{B}/2) = 3020 \cdot 10^3$ kN/m $\qquad \mathsf{S} = (\mathsf{X} - \mathsf{D}) = 118 \cdot 10^3$ kN·m

$\mathsf{Q} = (\mathsf{A} - \mathsf{B}/2) = 2980 \cdot 10^3$ kN/m $\qquad \mathsf{T} = (\mathsf{X} + \mathsf{E}) = 62 \cdot 10^3$ kN·m

$\mathsf{R} = (\mathsf{X}+\mathsf{D}) = 122 \cdot 10^3$ kN·m $\qquad \mathsf{U} = (\mathsf{X} - \mathsf{E}) = 58 \cdot 10^3$ kN·m

Barra (3), $\alpha^{(3)} = 90^\circ$:

La matriz de transformación de sistemas es:

$$\mathbf{T}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez en el sistema global es $\mathbf{K}^{(3)}$ con:

$$\mathbf{k}_{aa}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{ab}^{(3)} = (\mathbf{k}_{ba}^{(3)})^T = \begin{bmatrix} -\mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 \\ \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{E} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{bb}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & -\mathsf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 \\ \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

Estableciendo las condiciones de compatibilidad y equilibrio de fuerzas en los nudos (ver Sección 9.4.1) se obtiene el sistema de ecuaciones global de la estructura:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{aa}^{(2)} & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{ba}^{(2)} & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{ab}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(3)} & \mathbf{k}_{bb}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{k}_{33} = \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{bb}^{(2)} + \mathbf{k}_{aa}^{(3)}$.

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, empotramiento en los nudos 1, 2 y 4, se eliminan las ecuaciones correspondientes a los grados de libertad prescritos, que son las filas y las columnas 1 al 6, 7 al 12 y 19 al 24. El sistema de ecuaciones reducido resulta:

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 4107,70 & -1053,60 & 0 & 0 & 0 & -81,21 \\ -1053,60 & 4107,70 & 0 & 0 & 0 & -81,21 \\ 0 & 0 & 94,14 & 81,21 & 81,21 & 0 \\ 0 & 0 & 81,21 & 165,13 & 41,71 & 0 \\ 0 & 0 & 81,21 & 41,71 & 165,13 & 0 \\ -81,21 & -81,21 & 0 & 0 & 0 & 324,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \phi_{X3} \\ \phi_{Y3} \\ \phi_{Z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ -150 \\ -150 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se obtiene:

$$\widehat{\mathbf{d}}_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \phi_{X3} \\ \phi_{Y3} \\ \phi_{Z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0498 \\ -0,0498 \\ -4,940 \\ 1,940 \\ 1,940 \\ -0,0249 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Las reacciones incógnitas en los nudos prescritos (1, 2 y 4) se calculan recuperando el sistema de ecuaciones completo y siguiendo el procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores Ec. (9.41):

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \\ M_{X1} \\ M_{Y1} \\ M_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 149,40 \\ 0,498 \\ 81,20 \\ -3,88 \\ -180,0 \\ 1,49 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \\ M_{X2} \\ M_{Y2} \\ M_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,176 \\ 0,176 \\ -12,40 \\ -22,48 \\ -22,48 \\ 1,06 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} F_{X4} \\ F_{Y4} \\ F_{Z4} \\ M_{X4} \\ M_{Y4} \\ M_{Z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,498 \\ 149,40 \\ 81,20 \\ -180,60 \\ -3,88 \\ 1,49 \end{bmatrix}$$

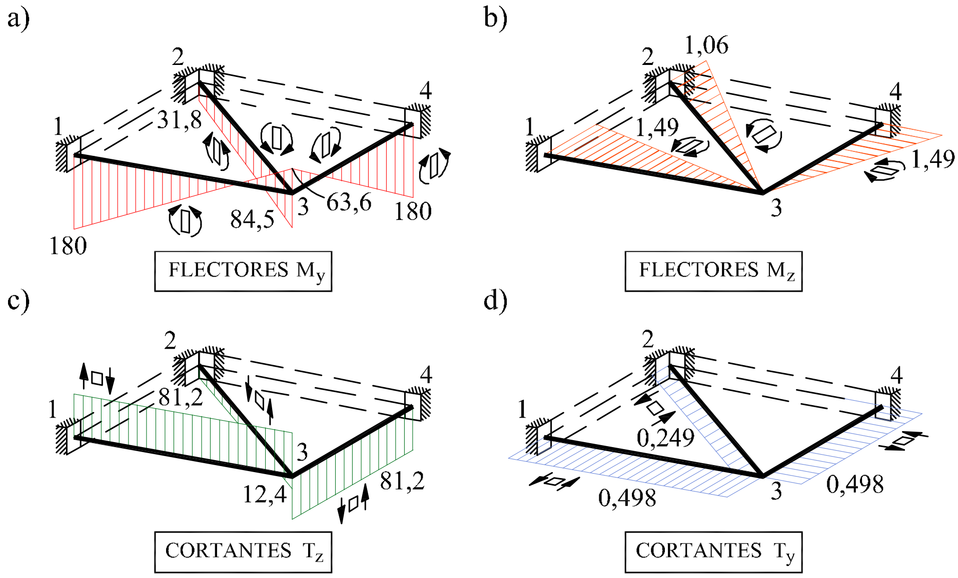


Fig. 9.39: Ejemplo 9.9.1: momentos flectores y esfuerzos cortantes

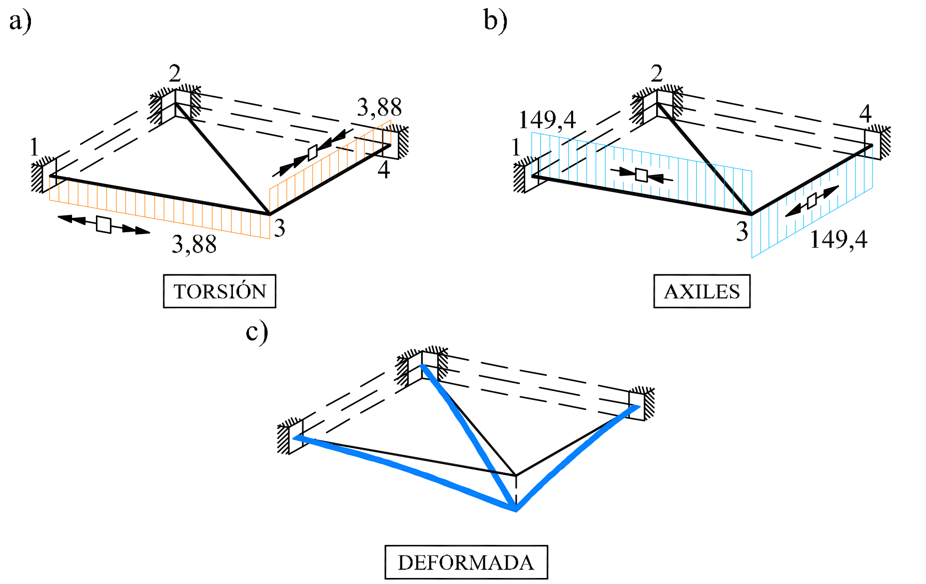


Fig. 9.40: Ejemplo 9.9.1: momentos torsores, axiles y deformada

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

La solución obtenida es la misma que resulta superponiendo al caso de carga y solución del Ejemplo 9.8.1 la deformación de la estructura en su plano. Esta deformación en el plano XY es muy pequeña frente a la deformación fuera del plano y la torsión, ya que se debe a la deformación por axil de las piezas.

La deformada y las leyes de esfuerzos de la estructura se muestran en las Figuras 9.39 y 9.40.

Ejemplo 9.9.2

Resolver la estructura reticulada espacial de la Figura 9.41, para el sistema de fuerzas y momentos que se indica. La rigidez a flexión $EI_y = EI_z$, a axil EA y a torsión GI_t de las barras es constante.
Datos: $a = 5\,\text{m}$, $EI_y = EI_z = 10^5$ kN·m^2, $EA = 10^7$ kN , $GI_t = 10^4$ kN·m^2, $|F_Z| = 120\,\text{kN}$, $|M_X| = |M_Y| = 50$ kN·m.

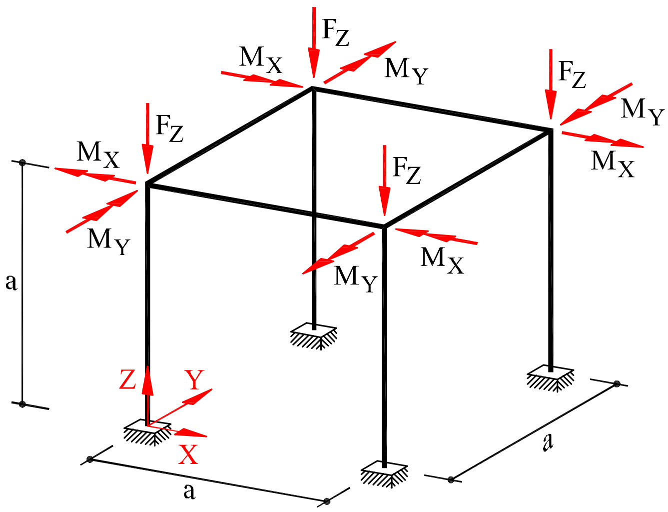


Fig. 9.41: Estructura del Ejemplo 9.9.2

Puede comprobarse que el sistema de carga actuante se corresponde con las fuerzas y momentos en los nudos calculados a partir de fuerzas verticales uniformemente repartidas $p = 24$ kN/m actuando sobre las vigas dintel (ver Sección 9.7).

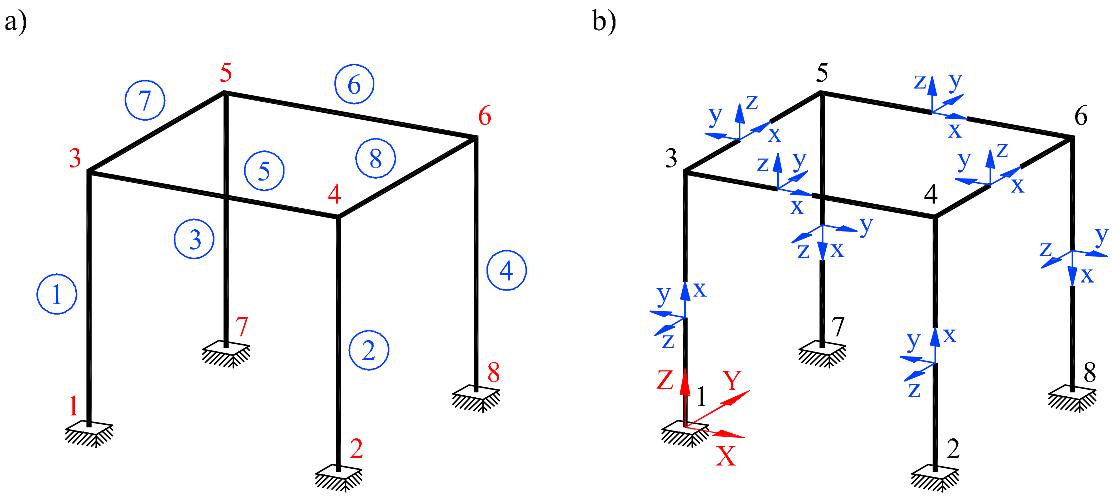


Fig. 9.42: (a) Numeración de barras y nudos (b) sistemas de referencia

La estructura es doblemente simétrica en cuanto a geometría y cargas. En las Figuras 9.42a y 9.42b se muestra la numeración y los sistemas de referencia global y locales adoptados para su resolución.

Las propiedades mecánicas de las barras son idénticas; por tanto, las matrices elementales son iguales y su expresión es:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{aa} & \mathbf{k}'_{ab} \\ \mathbf{k}'_{ba} & \mathbf{k}'_{bb} \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{k}'_{aa} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & 0 \\ 0 & \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix} ; \mathbf{k}'_{ab} = \mathbf{k}'^{T}_{ba} = \begin{bmatrix} -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & 0 & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & 0 \\ 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{E} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}'_{bb} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & 0 \\ 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{array}{llll} \mathsf{A} = EA/l & = 2\cdot 10^6 \ \text{kN/m} & \mathsf{D} = 4EI/l = 80\cdot 10^3 \ \text{kN·m} \\ \mathsf{B} = 12EI/l^3 & = 9{,}6\cdot 10^3 \ \text{kN/m} & \mathsf{E} = 2EI/l = 40\cdot 10^3 \ \text{kN·m} \\ \mathsf{C} = 6EI/l^2 & = 24\cdot 10^3 \ \text{kN} & \mathsf{X} = GI_t/l = 2\cdot 10^3 \ \text{kN·m} \end{array}$$

Las matrices de rigidez de las barras en el sistema global se calculan teniendo en cuenta el ángulo que forman los ejes locales con los ejes globales.

Barras (1) a (4), paralelas al eje Z:

La matriz de transformación de sistemas es:

$$\mathbf{T}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & \mathbf{0} & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3,4$$

y la matriz de rigidez en el sistema global es $\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}^{(3)} = \mathbf{K}^{(4)}$ con:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & \mathbf{k}_{bb}^{(1)} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\mathbf{k}_{aa}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & 0 & 0 \\ \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{ab}^{(1)} = (\mathbf{k}_{ba}^{(1)})^T = \begin{bmatrix} -\mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} & 0 \\ 0 & -\mathsf{B} & 0 & -\mathsf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{E} & 0 & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{X} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{bb}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C} & 0 \\ 0 & \mathsf{B} & 0 & \mathsf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{C} & 0 & \mathsf{D} & 0 & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} \end{bmatrix}$$

Barras (5) y (6), paralelas al eje X:

En este caso los ejes locales de las barras son paralelos a los ejes globales y la matriz de rigidez de las barras en el sistema global coincide con la matriz en ejes locales:

$$\mathbf{K}^{(5)} = \mathbf{K}^{(6)} = \mathbf{K}'$$

Barras (7) y (8), paralelas al eje Y:

La matriz de transformación de sistemas es:

$$\mathbf{T}^{(7)} = \mathbf{T}^{(8)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez en el sistema global es $\mathbf{K}^{(7)} = \mathbf{K}^{(8)}$ con:

$$\mathbf{K}^{(7)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(7)} & \mathbf{k}_{ab}^{(7)} \\ \mathbf{k}_{ba}^{(7)} & \mathbf{k}_{bb}^{(7)} \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{k}_{aa}^{(7)} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 \\ -\mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{ab}^{(7)} = (\mathbf{k}_{ba}^{(7)})^T = \begin{bmatrix} -\mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{C} \\ 0 & -\mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{B} & \mathsf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{X} & 0 \\ \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{E} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{bb}^{(7)} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{C} \\ 0 & \mathsf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{B} & -\mathsf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathsf{C} & \mathsf{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{X} & 0 \\ \mathsf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{D} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones global de la estructura se obtiene considerando las condiciones de compatibilidad y equilibrio de fuerzas en los nudos (ver Sección 9.4.1). Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura se eliminan las ecuaciones correspondientes a los movimientos prescritos. En este caso, los nudos 1, 2, 7 y 8 están empotrados; por tanto, se eliminan las filas y columnas que corresponden a los grados de libertad de dichos nudos, obteniéndose el sistema de ecuaciones reducido.

Si se tiene en cuenta la doble simetría de la geometría y de la carga que soporta la estructura, los movimientos de los nudos deben ser simétricos y basta conocer los movimientos de uno de ellos para resolver la estructura. Si se elige, por ejemplo, el nudo 3 y se plantean las condiciones de equilibrio de fuerzas en el nudo, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 &= \mathbf{f}_b^{(1)} + \mathbf{f}_a^{(5)} + \mathbf{f}_a^{(7)} \\ &= \mathbf{k}_{ba}^{(1)}\mathbf{d}_1 + (\mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(5)} + \mathbf{k}_{aa}^{(7)})\mathbf{d}_3 + \mathbf{k}_{ab}^{(5)}\mathbf{d}_4 + \mathbf{k}_{ab}^{(7)}\mathbf{d}_5 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{d}_1 = 0$ (empotramiento en el nudo 1), en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{ab}^{(5)} & \mathbf{k}_{ab}^{(7)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{d}_5 \end{bmatrix} = \mathbf{f}_3$$

con $\mathbf{k}_{33} = \mathbf{k}_{bb}^{(1)} + \mathbf{k}_{aa}^{(5)} + \mathbf{k}_{aa}^{(7)}$. Sustituyendo los valores correspondientes se tiene:

$$\mathbf{k}_{33} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 2019,2 & 0 & 0 & 0 & -24 & -24 \\ 0 & 2019,2 & 0 & 24 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 2019,2 & 24 & -24 & 0 \\ 0 & 24 & 24 & 162 & 0 & 0 \\ -24 & 0 & -24 & 0 & 162 & 0 \\ -24 & 24 & 0 & 0 & 0 & 162 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{ab}^{(5)} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9,6 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -9,6 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{ab}^{(7)} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -9,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & -2000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9,6 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

El vector de movimientos es:

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \phi_{xi} & \phi_{yi} & \phi_{zi} \end{bmatrix}^T$$

y el vector de fuerzas en el nudo 3 es:

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -120 & -50 & 50 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Además, por doble simetría:

$$\begin{array}{llll} u_3 & = -u_4 & = \ u_5 & = -u_6 \\ v_3 & = \ v_4 & = -v_5 & = -v_6 \\ w_3 & = \ w_4 & = \ w_5 & = \ w_6 \\ \phi_{X3} & = \ \phi_{X4} & = -\phi_{X5} & = -\phi_{X6} \\ \phi_{Y3} & = -\phi_{Y4} & = \ \phi_{Y5} & = -\phi_{Y6} \\ \phi_{Z3} & = \ \phi_{Z4} & = \ \phi_{Z5} & = \ \phi_{Z6} \end{array}$$

El sistema de ecuaciones que permite obtener los movimientos del nudo 3 es:

$$\begin{aligned}
10^3 \cdot [4009,2\ u_3 - 24\ \phi_{Y3} - 48\ \phi_{Z3}] &= 0 \\
10^3 \cdot [4009,2\ v_3 + 24\ \phi_{X3} + 48\ \phi_{Z3}] &= 0 \\
10^3 \cdot [2000\ w_3] &= -120 \\
10^3 \cdot [24\ v_3 + 120\ \phi_{X3}] &= -50 \\
10^3 \cdot [-24\ u_3 + 120\ \phi_{Y3}] &= 50 \\
10^3 \cdot [242\ \phi_{Z3}] &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene:

$$\widehat{\mathbf{d}}_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \phi_{X3} \\ \phi_{Y3} \\ \phi_{Z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0025 \\ 0,0025 \\ -0,060 \\ -0,417 \\ 0,417 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes. Los movimientos de los nudos 4, 5 y 6 son simétricos.

Se observa que el caso de carga calculado es prácticamente intraslacional, con desplazamientos muy pequeños en los nudos; las componentes horizontales son prácticamente nulas. Por simetría, el giro de componente vertical es nulo.

Las reacciones incógnitas en los nudos prescritos (1, 2, 7 y 8) se calculan recuperando el sistema de ecuaciones completo y siguiendo el procedimiento aplicado en los Ejemplos anteriores, Ec. (9.41). Teniendo en cuenta la simetría de la geometría y de las cargas, basta con calcular las reacciones en uno de los nudos prescritos. Así, por ejemplo, en el nudo 1 se obtiene:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \\ M_{X1} \\ M_{Y1} \\ M_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9,98 \\ -9,98 \\ 120,0 \\ -16,62 \\ 16,62 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. En los nudos 2, 7 y 8 las reacciones son simétricas.

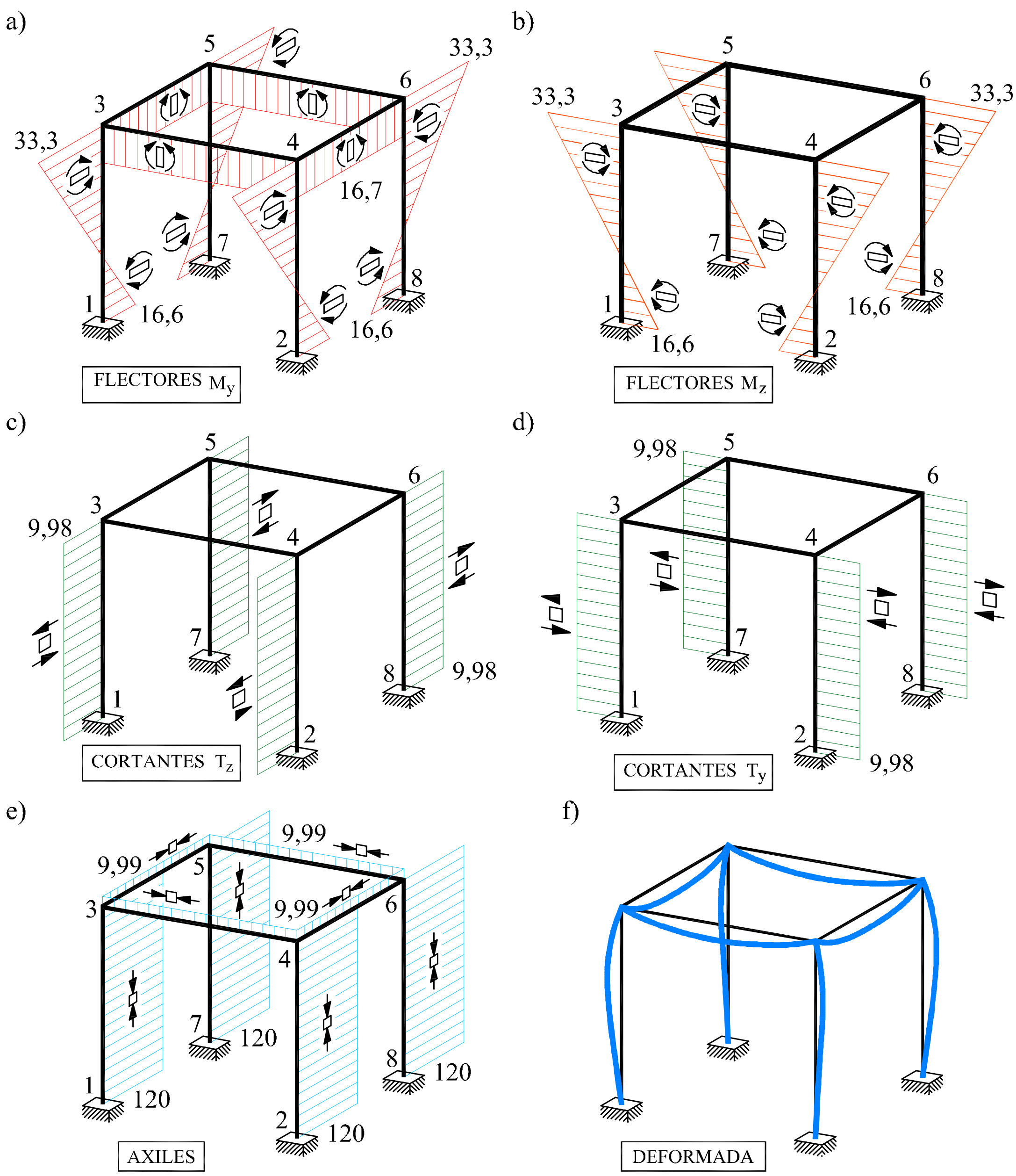


Fig. 9.43: Ejemplo 9.9.2: leyes de esfuerzos y deformada

Aplicando las Ecs. (9.43a) y (9.43b), se obtienen los esfuerzos en los extremos de las barras, que resultan:

$$\mathbf{f}'^{(1)} = \begin{bmatrix} F'^{(1)}_{x1} \\ F'^{(1)}_{y1} \\ F'^{(1)}_{z1} \\ M'^{(1)}_{x1} \\ M'^{(1)}_{y1} \\ M'^{(1)}_{z1} \\ F'^{(1)}_{x3} \\ F'^{(1)}_{y3} \\ F'^{(1)}_{z3} \\ M'^{(1)}_{x3} \\ M'^{(1)}_{y3} \\ M'^{(1)}_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120,0 \\ -9,98 \\ -9,98 \\ 0 \\ 16,62 \\ -16,62 \\ -120,0 \\ 9,98 \\ 9,98 \\ 0 \\ 33,3 \\ -33,3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}'^{(5)} = \begin{bmatrix} F'^{(5)}_{x3} \\ F'^{(5)}_{y3} \\ F'^{(5)}_{z3} \\ M'^{(5)}_{x3} \\ M'^{(5)}_{y3} \\ M'^{(5)}_{z3} \\ F'^{(5)}_{x4} \\ F'^{(5)}_{y4} \\ F'^{(5)}_{z4} \\ M'^{(5)}_{x4} \\ M'^{(5)}_{y4} \\ M'^{(5)}_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,98 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16,7 \\ 0 \\ -9.98 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -16,7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}'^{(7)} = \begin{bmatrix} F'^{(7)}_{x3} \\ F'^{(7)}_{y3} \\ F'^{(7)}_{z3} \\ M'^{(7)}_{x3} \\ M'^{(7)}_{y3} \\ M'^{(7)}_{z3} \\ F'^{(7)}_{x5} \\ F'^{(7)}_{y5} \\ F'^{(7)}_{z5} \\ M'^{(7)}_{x5} \\ M'^{(7)}_{y5} \\ M'^{(7)}_{z5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,98 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16,7 \\ 0 \\ -9,98 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -16,7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. Los esfuerzos en las barras restantes se deducen por simetría. Nótese que por simetría no hay torsión en ninguna barra.

En las Figuras 9.43a-9.43f se muestran las leyes de esfuerzos y la deformada.

A Tablas

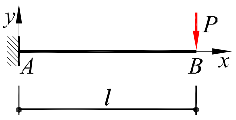
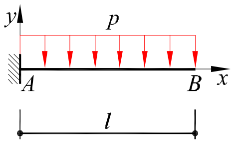
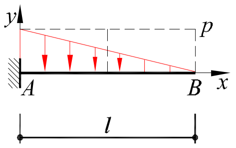
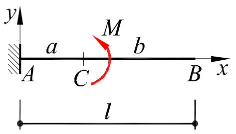
VIGAS EN VOLADIZO			
CARGAS	y_B $(+\uparrow)$	ϕ_B $(+\circlearrowleft)$	ELÁSTICA $y(x)$ $(+\uparrow)$
	$-\dfrac{Pl^3}{3EI}$	$-\dfrac{Pl^2}{2EI}$	$\dfrac{P}{6EI}(x^3-3lx^2)$
	$-\dfrac{pl^4}{8EI}$	$-\dfrac{pl^3}{6EI}$	$-\dfrac{p}{24EI}(x^4-4lx^3+6l^2x^2)$
	$-\dfrac{pl^4}{30EI}$	$-\dfrac{pl^3}{24EI}$	$-\dfrac{px^2}{24EI}\left[2l(l-x)+x^2-\dfrac{x^3}{5l}\right]$
	$\dfrac{Ma}{2EI}(2l-a)$	$\dfrac{Ma}{EI}$	$\dfrac{Mx^2}{2EI}$ $\quad 0\le x\le a$ $\dfrac{Ma}{2EI}(2x-a)$ $\quad a\le x\le l$

Tabla A.1: Flechas y giros en vigas en voladizo

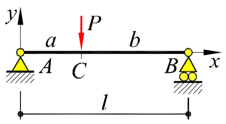
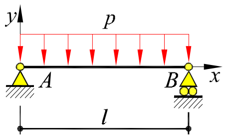
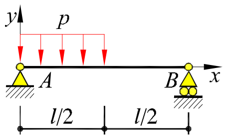
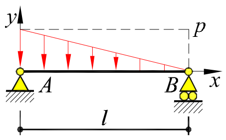
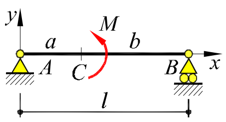
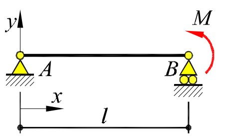
VIGAS BIAPOYADAS		
CARGAS	GIROS (+ ↺)	ELÁSTICA $y(x)$ (+ ↑)
	$\phi_A = -\frac{Pab}{6EIl}(l+b)$ $\phi_B = \frac{Pab}{6EIl}(l+a)$	$-\frac{Pbx}{6EIl}(l^2-b^2-x^2)$ $0 \leq x \leq a$
	$\phi_A = -\frac{pl^3}{24EI}$ $\phi_B = \frac{pl^3}{24EI}$	$-\frac{px}{24EI}(x^3-2lx^2+l^3)$
	$\phi_A = -\frac{3pl^3}{128EI}$ $\phi_B = \frac{7pl^3}{384EI}$	$-\frac{px}{384EI}\left[16x^3-24lx^2+9l^3\right]$ $0 \leq x \leq l/2$ $-\frac{pl}{384EI}\left[8x^3-24lx^2++17l^2x-l^3\right]$ $l/2 \leq x \leq l$
	$\phi_A = -\frac{pl^3}{45EI}$ $\phi_B = \frac{7pl^3}{360EI}$	$-\frac{pl^3x}{360EI}(7-10\frac{x^2}{l^2}+3\frac{x^4}{l^4})$
	$\phi_A = \frac{Ml}{6EI}(3\frac{b^2}{l^2}-1)$ $\phi_B = \frac{Ml}{6EI}(3\frac{a^2}{l^2}-1)$	$-\frac{Mlx}{6EI}(1-3\frac{b^2}{l^2}-\frac{x^2}{l^2})$ $0 \leq x \leq a$ $\frac{Ml(l-x)}{6EI}\left[1-3\frac{a^2}{l^2}-\left(\frac{l-x}{l}\right)^2\right]$ $a \leq x \leq l$
	$\phi_A = -\frac{Ml}{6EI}$ $\phi_B = \frac{Ml}{3EI}$	$-\frac{Mx}{6EIl}(l^2-x^2)$

Tabla A.2: Giros y deformada en vigas biapoyadas

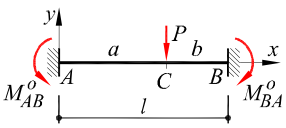
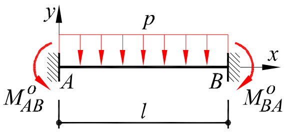
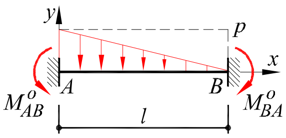
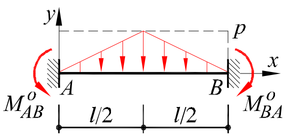
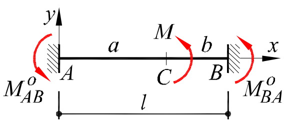
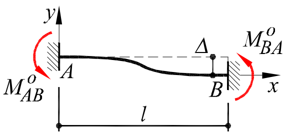
VIGAS BIEMPOTRADAS		
CARGAS	$\mathrm{M}^0_{AB}(+ \circlearrowleft)$	$\mathrm{M}^0_{BA}(+ \circlearrowleft)$
	$\left.\frac{Pab^2}{l^2}\right\rvert_{a=b} = \frac{Pl}{8}$	$-\left.\frac{Pa^2b}{l^2}\right\rvert_{a=b} = -\frac{Pl}{8}$
	$\frac{pl^2}{12}$	$-\frac{pl^2}{12}$
	$\frac{pl^2}{20}$	$-\frac{pl^2}{30}$
	$\frac{5pl^2}{96}$	$-\frac{5pl^2}{96}$
	$\left.\frac{Mb}{l^2}(2a-b)\right\rvert_{a=b} = \frac{M}{4}$	$\left.\frac{Ma}{l^2}(2b-a)\right\rvert_{a=b} = \frac{M}{4}$
	$\frac{6EI}{l^2}\Delta$	$\frac{6EI}{l^2}\Delta$

Tabla A.3: Momentos de empotramiento en vigas biempotradas

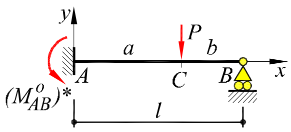
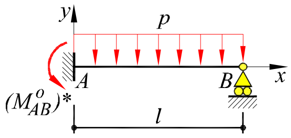
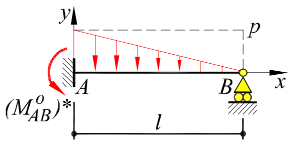
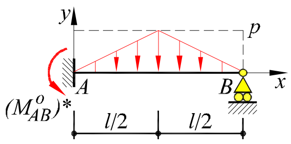
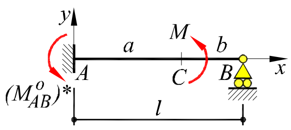
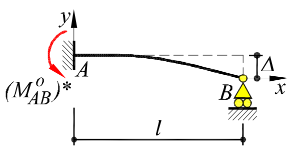
VIGAS EMPOTRADO-APOYADAS		
CARGAS	$(\mathrm{M}^0_{AB})^*$ $(+ \circlearrowleft)$	ϕ_B $(+ \circlearrowleft)$
	$\frac{Pb}{2l^2}(l^2 - b^2)\Big\|_{a=b} = \frac{3Pl}{16}$	$\frac{Pa^2b}{4EIl}\Big\|_{a=b} = \frac{Pl^2}{32EI}$
	$\frac{pl^2}{8}$	$\frac{pl^3}{48EI}$
	$\frac{pl^2}{15}$	$\frac{pl^3}{120EI}$
	$\frac{5pl^2}{64}$	$\frac{5pl^3}{384EI}$
	$\frac{M}{2l^2}(l^2 - 3b^2\Big\|_{a=b} = \frac{M}{8}$	$\frac{M}{4EIl}(l^2 - 4lb + 3b^2\Big\|_{a=b} = -\frac{Ml}{16EI}$
	$\frac{3EI}{l^2}\Delta$	$-\frac{3\Delta}{l}$

Tabla A.4: Momento de empotramiento y giro en vigas empotrado-apoyadas

Múltiplos y submúltiplos en el SI		
Prefijo	Símbolo	Factor multiplicativo
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
mega	M	10^{6} = 1 000 000
kilo	k	10^{3} = 1 000
hecto	h	10^{2} = 100
deca	da	10^{1} = 10
deci	d	10^{-1} = 0,1
centi	c	10^{-2} = 0,01
mili	m	10^{-3} = 0,001
micro	μ	10^{-6} = 0,000 001
nano	n	10^{-9} = 0,000 000 001
pico	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001

Tabla A.5: Múltiplos y submúltiplos en el SI

ALFABETO GRIEGO								
A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	Mu	Υ	υ	Upsilon
E	ϵ	Epsilon	N	ν	Nu	Φ	ϕ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Tabla A.6: Alfabeto griego

Bibliografía

Arbabi, F. (1991). *Structural Analysis and Behaviour.* McGraw-Hill.

Argüelles Álvarez, R. (1996). *Análisis de Estructuras: Teoría, problemas y programas.* Fundación Conde del Valle de Salaza.

Beer, F. P. y Johnston, E. R. (2010). *Mecánica Vectorial para Ingenieros.* McGraw-Hill.

Cervera Ruiz, M. y Blanco Díaz, E. (2001). *Mecánica de Estructuras. Libro 1. Resistencia de Materiales.* UPC.

Cervera Ruiz, M. y Blanco Díaz, E. (2002). *Mecánica de Estructuras. Libro 2. Análisis de Estructuras.* UPC.

Cervera Ruiz, M. y Blanco Díaz, E. (2012). *Mecánica y Resistencia de Materiales.* CIMNE.

Chajes, A. (1990). *Structural Analysis.* Prentice Hall.

Beer, F. P. y Johnston, E. R. (2007). *Estática de Estructuras.* CIMNE.

Cook, R. D. y Young, W. C. (1999). *Advanced Mechanics of Materials.* Prentice Hall.

Gerstle, K. H. (1974). *Basic Structural Analysis.* Prentice Hall.

Ghali, A., Neville, A. M. y Brown, T. G. (2003). *Structural Analysis. A unified classical and matrix approach.* Chapman and Hall.

Hibbeler, R. C. (2011). *Structural Analysis.* Pearson Education.

Hibbeler, R. C. (1997). *Análisis Estructural.* Prentice-Hall Hispanoamericana.

Hsieh, Y.-Y. y Mau, S. T. (1995). *Elementary Theory of Structures.* Prentice Hall.

Kardestuncer, H. (1974). *Elementary Matrix Analysis of Structures.* McGraw-Hill.

Livesley, R. K. (1970). *Métodos Matriciales para Cálculo de Estructuras.* Blume.

Miquel Canet, J. (2012). *Resistencia de Materiales y Estructuras.* CIMNE.

Oden, J. T. y Ripperger, E. A. (1981). *Mechanics of Elastic Structures.* McGraw Hill.

Samartín Quiroga, A. y González de Cangas, J. R. (2001). *Cálculo Matricial de Estructuras.* Colegio de Ing. de Caminos, Canales y Puertos.

Shames, I. H. (1999). *Mecánica para Ingenieros.* Prentice Hall.

Timoshenko, S. P. (1983). *History of Strength of Materials.* Dover.

Timoshenko, S. P. y Young, D. H. (1983). *Teoría de las estructuras.* Urmo.

Utku, S., Norris, C. H., y Wilbur, J. B. (1991). *Elementary Structural Analysis.* McGraw-Hill.

Vázquez, M. (1992). *Cálculo Matricial de Estructuras.* Colegio Ing. Téc. de Obras Públicas.

West, H. H. y Geschwindner, L. F. (2002). *Fundamentals of Structural Analysis.* J. Wiley.

"Mecánica de Estructuras" tiene el objetivo de proporcionar a los estudiantes de grado de ingeniería una visión y una comprensión claras de los fundamentos del análisis estructural y de su aplicación en estructuras de barras articuladas y reticuladas.

El libro tiene dos partes diferenciadas. En la primera, se exponen los conceptos fundamentales de la mecánica de estructuras. En la segunda, se estudia la resolución de estructuras de barras por los métodos de flexibilidad y rigidez. Las estructuras articuladas y reticuladas, planas y espaciales, se tratan en detalle mediante el método directo de rigidez.

La comprensión de los diferentes temas se ve favorecida por la inclusión de numerosos ejemplos resueltos paso a paso.

CIMNE

UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

Generalitat de Catalunya